

# 加筋板大变形的混合有限元解法\*

陈 远 汉

(中国科学技术大学, 1981年2月18日收到)

## 摘 要

本文由非线性弹性力学导出带偏心正交加筋板大变形有限元混合泛函及其迭代方程。在计算中运用一个将二维耦合矩阵分解、求出三维系数矩阵作为原始输入数据的重要技巧, 把非线性方程转化为瞬态线性方程, 并用共轭斜量法求解, 从而极大地简化了计算, 提高了精度, 取得了满意的结果。

## 主 要 符 号

$X, Y, Z$  加筋板总体坐标  
 $x, y, z$  板单元局部坐标  
 $A^n, N, h$  板单元中面、板单元总数、板厚度  
 $\{W\}, F, W$  板单元总试探函数、艾雷应力函数、侧向位移函数  
 $\{q\}, \{q_F\}, \{q_W\}$  板单元结点总变量列阵、广义力变量列阵、位移变量列阵  
 $\{X\}, \{Y_1\}, \{Y_2\}$  板单元形变列阵  
 $M_x, M_y, M_{xy}$  板单元结点弯矩和扭矩  
 $\sigma_{bx}, \sigma_{by}, \tau_{bxy}$  板单元弯曲应力  
 $\sigma_{mx}, \sigma_{my}, \tau_{mxy}$  板单元薄膜应力  
 $E, \mu, G$  弹性模量、泊松比、剪切弹性模量  
 $h_0, s_0$  梁单元腹板厚度、横截面面积  
 $B, B_1, B_2$  梁单元总数、 $x$ 方向梁单元数、 $y$ 方向梁单元数  
 $J_x, J_y$  梁单元在 $zox$ 平面内、 $zoy$ 平面内惯矩  
 $[D], [D_F]$  板弹性矩阵、柔性矩阵  
 $[D_{G1}], [D_{G2}]$  非线性耦合核矩阵  
 $[K_F], [K_W], [K_{g1}]$ 和 $[K_{g2}]$  板柔度、刚度、耦合矩阵  
 $[K_{OF}], [K_{OW}], [K_{og1}]$ 和 $[K_{og2}]$  梁柔度、刚度、耦合矩阵

$[K_{mo}], [K_{om}]$   $x$ 方向、 $y$ 方向偏心梁单元线耦合矩阵  
 $[K], [H]$  加筋板线刚度和柔度矩阵、非线性耦合矩阵  
 $[Q], [Q_W], [Q_F]$  加筋板总广义载荷列阵、横向荷载列阵、中面位移列阵  
 $q, q_F, q_W$  加筋板总变量列阵、总广义力列阵、总广义位移列阵  
 $m$  梁单元附加偏心力矩, 见图1。

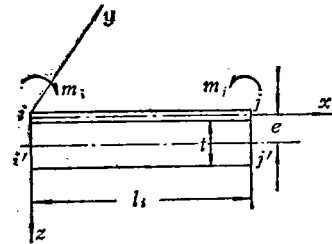


图 1 偏心梁单元

$$m_i = (\sigma_m, s_0 t) \Big|_{x,y} = \frac{s_0 e}{h} F_{,yy} \Big|_{x,y}$$

$$m_j = \frac{s_0 e}{h} F_{,yy} \Big|_{x,y}$$

其中 $e$ 为偏心矩, 图1所示 $m$ 方向为正, 反之为负。

\* 钱伟长推荐  
 本文在黄茂光教授指导下完成。

## 一、引 言

加筋板是工程中应用最为广泛的板-梁组合结构。加筋板的大变形属于几何非线性问题，即薄板和梁在外载荷作用下，当挠度较大，超出小变形理论研究的范围时，分析这类结构必须考虑中面或中性轴线的伸缩效应、结构形状的变化。对于几何非线性问题，经典弹性力学都归结为求解相应的偏微分方程，除少数特例外，一般无法获得解析解。以往，有限元的许多文献分析了不带加筋平板的大变形问题，使用的方法有运动坐标法和势能最小化法等<sup>[1]-[4]</sup>，而关于偏心加筋板壳的分析尚属少见。文[5]用“位移法”对单向加筋板的大变形和过屈曲进行了计算，取得了好的结果；然而文中为避免非线性耦合矩阵的浩繁计算，把弯曲与薄膜力的非线性耦合近似处理成一个等效载荷，其理论分析不够严谨。

过去，经典弹性力学解板的大变形问题实际上是一种混合法，即解用变量  $W(x, y)$ ,  $F(x, y)$  表示的卡门 (von Karman) 方程组。据此，文[7]采用了混合有限元法分析板和圆柱壳的大变形问题，取得了满意的解答，但文中没有将非线性耦合矩阵进行分解，故计算工作量很大。

本文用混合有限元法分析计算加筋板的大变形，着重在处理非线性耦合矩阵方面取得进展。文中首先由非线性弹性力学分别导出平板和筋条大变形的混合泛函，然后引入空间梁元的偏心处理。梁元的偏心带来弯曲与薄膜性质的线性耦合，为将梁结点位移转为板结点位移而补充“附加偏心力矩”，从而建立了正交偏心加筋板大变形问题的一般方程。程序设计中将弯曲与结构形状的变化、弯曲与薄膜力的非线性耦合矩阵进行分解，将预先分解出的三维系数矩阵作为原始输入数据。这就巧妙地把非线性方程转化成了瞬态线性方程，并用共轭斜量法迭代求解，故计算极为简便、收敛快、精度高，适合于工程应用。

## 二、加筋板大变形混合泛函

几何非线性问题的主要类型之一是小应变、大转动问题或者小应变、小转动，但应变的大小与转动的平方同级的问題，结果均使物体产生大变形。因此，板的变形能中的应变张量应以如下的 Lagrangian 有限应变张量代入<sup>[6]</sup>，即

$$e_{ij} = e_{ij0} - z k_{ij} \quad (i, j = x, y) \quad (2.1)$$

其中

$$\left. \begin{aligned} e_{xx0} &= u_{,x} + \frac{1}{2} W_{,x}^2 \\ e_{yy0} &= v_{,y} + \frac{1}{2} W_{,y}^2 \\ \gamma_{xy0} &= 2e_{xy0} = u_{,y} + v_{,x} + W_{,x} W_{,y} \end{aligned} \right\} \quad (2.2a, b, c)$$

$$\text{及曲率张量} \quad k_{ij} = W_{,ij} \quad (2.3)$$

大变形板单元应变能为

$$U^N = \frac{1}{2} \iiint_V e_{ij} \sigma_{ij} dV \quad (2.4)$$

将(2.1)代入(2.4)，并用 Lagrange 乘子引入条件(2.2a, b, c)、(2.3)，并通过变分求出 Lagrange 乘子<sup>[10]</sup>，于是

$$\begin{aligned}
U^N = & \iint_{A^*} \left\{ \frac{Eh}{2(1-\mu^2)} [(e_{xx0} + e_{yy0})^2 + 2(1-\mu)(e_{x'yo}^2 - e_{x'yo}e_{yy0})] \right. \\
& + \frac{D}{2} [(k_{xx} + k_{yy})^2 - 2(1-\mu)(k_{xy}^2 - k_{xx}k_{yy})] - \left[ e_{xx0} - \left( u_{,x} + \frac{1}{2}W_{,x}^2 \right) \right] N_x \\
& - \left[ e_{yy0} - \left( v_{,y} + \frac{1}{2}W_{,y}^2 \right) \right] N_y - [2e_{xy0} - (u_{,y} + v_{,x} + W_{,xy})] N_{xy} \\
& \left. + (k_{xx} - W_{,xx}) M_x + (k_{yy} - W_{,yy}) M_y + 2(k_{xy} - W_{,xy}) M_{xy} \right\} dx dy \quad (2.5)
\end{aligned}$$

其中

$$N_x = h\sigma_x, \quad N_y = h\sigma_y, \quad N_{xy} = h\tau_{xy} \quad (2.6a, b, c)$$

$$M_x = -D(k_{xx} + \mu k_{yy})$$

$$M_y = -D(k_{yy} + \mu k_{xx})$$

$$M_{xy} = -D(1-\mu)k_{xy}$$

$$\left. \begin{aligned} & \\ & \\ & \end{aligned} \right\} \quad (2.7a, b, c)$$

式中  $D$  是各向同性板的抗弯刚度, 它是

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

引入“Airy”应力函数  $F(x, y)$ , 则薄膜力为

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (2.8a, b, c)$$

设板单元上作用有分布载荷  $\bar{q}$ , 边界横向剪力  $\bar{Q}_z$ , 弯矩  $\bar{M}_{,z}$ , 平面内位移  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ , 则外力功为

$$V^N = -\iint_{A^*} \bar{q}W dx dy - \int_{s_1} [\bar{Q}_z W - \bar{M}_{,z} W_{,z}] ds - \int_{s_2} [u F_{,xx} - v F_{,yy}] ds \quad (2.9)$$

故大变形板单元混合泛函为  $\Pi'_i = U^N + V^N$ .

由  $\delta \Pi'_i = 0$ , 消去  $e_{xx0}$ ,  $e_{yy0}$ ,  $e_{xy0}$ ,  $k_{xx}$ ,  $k_{yy}$ ,  $k_{xy}$ , 忽略位移高阶项, 并运用平衡条件

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0 \quad (2.10a, b)$$

$$\begin{aligned}
\Pi'_i = & \iint_{A^*} \left\{ -\frac{1}{2Eh} [F_{,xx}^2 + F_{,yy}^2 - 2\mu F_{,xx}F_{,yy} + 2(1+\mu)F_{,xy}^2] + \frac{D}{2} [W_{,xx}^2 + W_{,yy}^2 \right. \\
& \left. + 2\mu W_{,xx}W_{,yy} + 2(1-\mu)W_{,xy}^2] + \frac{1}{2} [F_{,yy}W_{,xx}^2 + F_{,xx}W_{,yy}^2 - 2F_{,xy}W_{,xy}^2] \right. \\
& \left. - \bar{q}W \right\} dx dy - \int_{s_1} (\bar{Q}_z W - \bar{M}_{,z} W_{,z}) ds - \int_{s_2} (u F_{,xx} - v F_{,yy}) ds \quad (2.11)
\end{aligned}$$

由  $\delta \Pi'_i = 0$ , 可推出著名的“von Karman”方程组如下:

$$\left. \begin{aligned} D\Delta\Delta W &= \bar{q} + F_{,yy}W_{,xx} + F_{,xx}W_{,yy} - 2F_{,xy}W_{,xy} \\ \Delta\Delta F &= Eh(W_{,xx}^2 - W_{,xx}W_{,yy}) \end{aligned} \right\} \quad (2.12a, b)$$

下面按正交偏心加筋进一步导出加筋板大变形的混合泛函。

设筋条横截面积  $s_0$ 、腹板高度  $t$  均相同, 则对于沿  $x$  方向的筋条有

$$e_{xx} = e_{xx0} - zk_{xx} \quad (2.13)$$

其中

$$e_{xx0} = u_{,x} + \frac{1}{2}W_{,x}^2 \quad (2.14)$$

$$k_{xx} = W_{,xx}|_y \quad (2.15)$$

$$\text{其应变能为 } U^{B1} = \frac{1}{2} \iiint_V E e_x^2 dV \quad (2.16)$$

将(2.13)代入(2.16), 并用 Lagrange 乘子引入条件(2.14)、(2.15), 通过变分求出 Lagrange 乘子, 于是有

$$U^{B1} = \frac{1}{2} \int_{l_1} \left[ -\frac{s_0}{E h h_0} F^2_{,yy} + E J_y W^2_{,xx} + \frac{s_0}{h} F_{,yy} W^2_{,x} \right]_{y_i} dx_i \quad (2.17)$$

同理, 沿  $y$  方向加筋条混合应变能为

$$U^{B2} = \frac{1}{2} \int_{l_1} \left[ -\frac{s_0}{E h h_0} F^2_{,xx} + E J_x W^2_{,yy} + \frac{s_0}{h} F_{,xx} W^2_{,y} \right]_{x_i} dy_j \quad (2.18)$$

于是求得非偏心正交加筋单元总应变能为

$$U^B = U^{B1} + U^{B2} \quad (2.19)$$

偏心处理后,  $x, y$  方向筋条附加力矩应变能为

$$\omega 1 = \int_{l_1} d\omega 1 = \int_{l_1} \frac{s_0 e}{2h} F_{,yy} |_{y_i} dW_{,x_i} = \frac{s_0 e}{2h} \int_{l_1} (F_{,yy} W_{,xx}) |_{y_i} dx_i \quad (2.20)$$

$$\omega 2 = \frac{s_0 e}{2h} \int_{l_1} (F_{,xx} W_{,yy}) |_{x_i} dy_j \quad (2.21)$$

$$\therefore \omega = \omega 1 + \omega 2 \quad (2.22)$$

又外力对偏心正交加筋所作的功为

$$\begin{aligned} V^B = & -[\bar{Q}_z, W - \bar{M}_{xx} W_{,x}]_{y_i} - [\bar{Q}_z, W - \bar{M}_{yy} W_{,y}]_{x_i} \\ & - \frac{th_0}{h} \bar{u}' F_{,yy} |_{y_i} - \frac{th_0}{h} \bar{v}' F_{,xx} |_{x_i} \end{aligned} \quad (2.23)$$

其中  $\bar{u}', \bar{v}'$  为筋条端面形心沿  $x, y$  方向已知位移,  $\bar{Q}_z, \bar{Q}_z$  为切力,  $\bar{M}_{xx}, \bar{M}_{yy}$  为筋端外力矩。

故正交偏心筋条总泛函为

$$\Pi_n^B = U^B + V^B + \omega \quad (2.24)$$

于是求得加筋板大变形混合泛函为

$$\begin{aligned} \Pi = & \sum_{n=1}^N \Pi_n^B + \sum_{n=1}^B \Pi_n^B = \sum_{n=1}^N \iint_{A^*} \left\{ -\frac{1}{2Eh} [F^2_{,xx} + F^2_{,yy} - 2\mu F_{,xx} F_{,yy} \right. \\ & + 2(1+\mu) F^2_{,xy}] + \frac{D}{2} [W^2_{,xx} + W^2_{,yy} + 2\mu W_{,xx} W_{,yy} + 2(1-\mu) W^2_{,xy}] \\ & \left. + \frac{1}{2} [F_{,yy} W^2_{,x} + F_{,xx} W^2_{,y} - 2F_{,xy} W_{,x} W_{,y}] - \bar{q} W \right\} dx dy \\ & + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{B_1} \int_{l_1} \left[ -\frac{s_0}{E h h_0} F^2_{,yy} + E J_y W^2_{,xx} + \frac{s_0}{h} F_{,yy} W^2_{,x} \right]_{y_i} dx_i \right. \\ & \left. + \sum_{n=1}^{B_2} \int_{l_1} \left[ -\frac{s_0}{E h h_0} F^2_{,xx} + E J_x W^2_{,yy} + \frac{s_0}{h} F_{,xx} W^2_{,y} \right]_{x_i} dy_j \right\} + \left\{ \frac{s_0 e}{2h} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \cdot \sum_{n=1}^{B1} \int_{l_1} [F_{,yy} W_{,xx}]_y dx_1 + \frac{s_0 e}{2h} \sum_{n=1}^{B2} \int_{l_1} [F_{,xx} W_{,yy}]_x dy_1 \Big\} + \sum_{n=1}^N \left\{ - \int_{s_1} [\bar{Q}_z W_{,z} \right. \\
 & - \bar{M}_{,yy} W_{,y}] ds - \int_{s_2} [\bar{u} F_{,yy} - \bar{v} F_{,xx}] ds \Big\} - \left\{ \sum_{n=1}^{B1} [\bar{Q}_z W - \bar{M}_{,xx} W_{,x}]_y \right. \\
 & \left. + \sum_{n=1}^{B2} [\bar{Q}_z W - \bar{M}_{,yy} W_{,y}]_x + \frac{th_0}{h} u' \sum_{n=1}^{B1} F_{,yy}|_y + \frac{th_0}{h} v' \sum_{n=1}^{B2} F_{,xx}|_x \right\} \quad (2.25)
 \end{aligned}$$

### 三、非线性分析所用单元

根据加筋板的形状，可以选取各种协调元或非协调收敛单元作为非线性分析所用单元。本文典型算例为矩形加筋板，故以选取矩形单元为宜。双三次 Hermite 协调元收敛快、精度高，但内存较大。“ACM”非协调元单刚简练、收敛良好、精度较高，但本文不用它，而用文[8]构造的一种新型快速收敛12自由度板弯曲矩形拟协调元，因该单元比“ACM”元优越，见图2。据此，令单元上的试探应力、位移函数分别为：

$$\left. \begin{aligned}
 F(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^{12} \alpha_i \xi^{\theta_i} \eta^{n_i} \\
 W(\xi, \eta) &= \sum_{i=1}^{24} \alpha_i \xi^{p_i} \eta^{\beta_i}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.1a, b)$$

其中  $\alpha_i$  为待定系数， $\xi, \eta$  为无量纲坐标

$$\xi = \frac{x}{a}, \quad \eta = \frac{y}{b} \quad (3.2a, b)$$

指数  $\theta_i, n_i, p_i, \beta_i$  取以下数值

$$\left. \begin{aligned}
 \theta = p &= [0, 1, 0, 2, 1, 0, 3, 2, 1, 0, 4, 1] \\
 n = \beta &= [0, 0, 1, 0, 1, 2, 0, 1, 2, 3, 1, 4]
 \end{aligned} \right\} \quad (3.3a, b)$$

定义单元体广义力结点参量和结点位移参量分别为

$$\left. \begin{aligned}
 \{q_F\} &= \{F_i, F_{,x}, F_{,y}, F_j, F_{,x}, F_{,y}, F_k, F_{,x}, F_{,y}, F_m, F_{,x}, F_{,y}\}^T \\
 \{q_W\} &= \{W_i, W_{,x}, W_{,y}, W_j, W_{,x}, W_{,y}, W_k, W_{,x}, W_{,y}, W_m, W_{,x}, W_{,y}\}^T
 \end{aligned} \right\} \quad (3.4a, b)$$

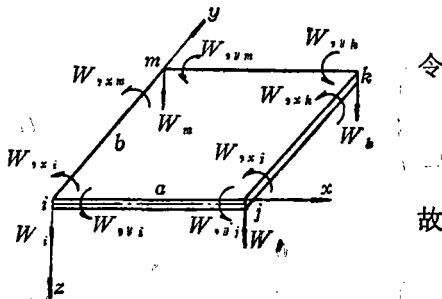


图 2

$$\{q\} = \left\{ \begin{array}{l} \{q_F\} \\ \{q_W\} \end{array} \right\} \quad (3.5)$$

故

$$\left. \begin{aligned}
 F(\xi, \eta) &= [N]^T \{q_F\} \\
 W(\xi, \eta) &= [N]^T \{q_W\}
 \end{aligned} \right\} \quad (3.6a, b)$$

$$\{W\} = \begin{Bmatrix} F(\xi, \eta) \\ W(\xi, \eta) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} [N]^T & 0 \\ 0 & [N]^T \end{bmatrix} \{q\} \quad (3.7)$$

其中插值函数 $[N]$ 和单元线刚度矩阵见文[8]附录。

#### 四、非线性平衡方程

$$\text{由(3.2 a, b)得} \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{a} \frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \eta} \quad (4.1a, b)$$

故泛函(2.25)中各项分别为

$$\sum_{n=1}^N \left\{ -\frac{1}{2Eh} \iint_{A^e} [F^2_{,xx} + F^2_{,yy} - 2\mu F_{,xx}F_{,yy} + 2(1+\mu)F^2_{,xy}] dx dy \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_F^T [\mathbf{K}_F] \mathbf{q}_F \quad (4.2)$$

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \frac{D}{2} \iint_{A^e} [W^2_{,xx} + W^2_{,yy} + 2\mu W_{,xx}W_{,yy} + 2(1-\mu)W^2_{,xy}] dx dy \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_W^T [\mathbf{K}_W] \mathbf{q}_W \quad (4.3)$$

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \iint_{A^e} [F_{,yy}W^2_{,x} + F_{,xx}W^2_{,y} - 2F_{,xy}W_{,x}W_{,y}] dx dy \right\} = \frac{1}{2} \mathbf{q}_W^T [\mathbf{K}_{G1}] \mathbf{q}_W \quad (4.4)$$

其中

$$\{X\} = -\left\{ \frac{\partial^2 [N]}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 [N]}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 [N]}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (4.5)$$

$$\{Y1\} = \left\{ \frac{\partial [N]}{\partial x}, \frac{\partial [N]}{\partial y}, \frac{\partial [N]}{\partial x} \right\}^T \quad (4.6)$$

$$\{Y2\} = \left\{ \frac{\partial [N]}{\partial x}, \frac{\partial [N]}{\partial y}, \frac{\partial [N]}{\partial y} \right\}^T \quad (4.7)$$

$$[D] = D \begin{pmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

$$[D_F] = -\frac{1}{Eh} \begin{pmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1+\mu}{2} \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

$$[D_{G1}] = \begin{pmatrix} \{q_F\}^T [N_{,yy}] & 0 & 0 \\ 0 & \{q_F\}^T [N_{,xx}] & 0 \\ 0 & 0 & -2\{q_F\}^T [N_{,xy}] \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

$$[\mathbf{K}_F] = \sum_{n=1}^N ab \int_0^1 \{X\}^T [D_F] \{X\} d\xi d\eta \quad (4.11)$$

$$[\mathbf{K}_W] = \sum_{n=1}^N ab \int_0^1 \{X\}^T [D] \{X\} d\xi d\eta \quad (4.12)$$

$$[\mathbf{K}_{\theta_1}] = \sum_{n=1}^N ab \int_0^1 \{Y_1\}^T [D_{\theta_1}] \{Y_2\} d\xi d\eta \quad (4.13)$$

其它各项为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^B \frac{1}{2} \left\{ \int_{l_1} \left[ -\frac{s_0}{Eh h_0} F^2_{,yy} + EJ_y W^2_{,xx} + \frac{s_0}{h} F_{,yy} W^2_{,x} \right]_y dx_1 \right. \\ & \quad \left. + \int_{l_1} \left[ -\frac{s_0}{Eh h_0} F^2_{,xx} + EJ_x W^2_{,yy} + \frac{s_0}{h} F_{,xx} W^2_{,y} \right]_x dy_1 \right\} \\ & = \frac{1}{2} \{ \mathbf{q}_F^T [\mathbf{K}_{OF}] \mathbf{q}_F + \mathbf{q}_W^T [\mathbf{K}_{OW}] \mathbf{q}_W + \mathbf{q}_W^T [\mathbf{K}_{\theta_1}] \mathbf{q}_W \} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$\omega = \frac{1}{2} \mathbf{q}_F^T ([\mathbf{K}_{m\theta}] + [\mathbf{K}_{\theta m}]) \mathbf{q}_W \quad (4.15)$$

其中

$$[\mathbf{K}_{OF}] = -\frac{s_0}{Eh h_0} \sum_{n=1}^B \left\{ \int_0^a ([N_{,yy}] [N_{,yy}]^T) |_{y_1} dx_1 + \int_0^b ([N_{,xx}] [N_{,xx}]^T) |_{x_1} dy_1 \right\} \quad (4.16)$$

$$[\mathbf{K}_{OW}] = E \sum_{n=1}^B \left\{ \int_0^a J_y ([N_{,xx}] [N_{,xx}]^T) |_{y_1} dx_1 + \int_0^b J_x ([N_{,yy}] [N_{,yy}]^T) |_{x_1} dy_1 \right\} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned} [\mathbf{K}_{\theta_1}] &= \frac{s_0}{h} \sum_{n=1}^B \left\{ \int_0^a ([N_{,x}] \{q_F\}^T [N_{,yy}] [N_{,x}]^T) |_{y_1} dx_1 \right. \\ & \quad \left. + \int_0^b ([N_{,y}] \{q_F\}^T [N_{,xx}] [N_{,y}]^T) |_{x_1} dy_1 \right\} \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$[\mathbf{K}_{m\theta}] = \frac{s_0 e}{h} \sum_{n=1}^{B_1} \int_{l_1} ([N_{,yy}] [N_{,xx}]^T) |_{y_1} dx_1 \quad (4.19)$$

$$[\mathbf{K}_{\theta m}] = \frac{s_0 e}{h} \sum_{n=1}^{B_2} \int_{l_1} ([N_{,yy}] [N_{,xx}]^T) |_{x_1} dy_1 \quad (4.20)$$

$$\text{又因 } \sum_{n=1}^N \iint_{A^n} \bar{q} W dx dy = [\mathbf{Q}_W] \mathbf{q}_W \quad (4.21)$$

$$\text{其中: } [Q_{w_1}]^T = \sum_{n=1}^N \iint_{A^n} \bar{q} [N]^T dx dy \quad (4.22)$$

在边界上由于

$$[N, \bar{n}]^T = [N, x]^T \cos \alpha + [N, y]^T \sin \alpha \quad (4.23)$$

其中  $\cos \alpha$ ,  $\sin \alpha$  为边界上法线  $\bar{n}$  的方向余弦。

$$\therefore \begin{Bmatrix} W \\ W, \bar{n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} [N]^T \\ [N, \bar{n}]^T \end{Bmatrix} \{q_w\} \quad (4.24)$$

于是其余各项为

$$\sum_{n=1}^N \left\{ \int_{s_1} [\bar{Q}_z W - \bar{M}_{xx} W, x] ds + \int_{s_2} [u F, y - \bar{v} F, x] ds \right\} = [Q_{w_2}]^T q_w + [Q_{p_1}]^T q_p \quad (4.25)$$

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{B_1} \bar{Q}_{oz} [W - \bar{M}_{xx} W, x]_y + \sum_{n=1}^{B_2} [\bar{Q}_{oz} W - \bar{M}_{yy} W, y]_x + \frac{th_0}{h} \sum_{n=1}^{B_1} u' F, yy|_{y_i} \\ & + \frac{th_0}{h} \sum_{n=1}^{B_2} \bar{v}' F, xx|x_i = [Q_{ow_2}]^T q_w + [Q_{op}]^T q_p \end{aligned} \quad (4.26)$$

其中

$$[Q_{w_2}]^T = \sum_{n=1}^N \int_{s_1} [\bar{Q}_z, -\bar{M}_{xx}] \begin{Bmatrix} [N]^T \\ [N, \bar{n}]^T \end{Bmatrix} ds \quad (4.27)$$

$$[Q_{p_1}]^T = \sum_{n=1}^N \int_{s_2} [u, \bar{v}] \begin{Bmatrix} [N, yy]^T \\ [N, xx]^T \end{Bmatrix} ds \quad (4.28)$$

$$[Q_{ow_2}]^T = \sum_{n=1}^{B_1} [\bar{Q}_{oz}, -\bar{M}_{xx}] \begin{Bmatrix} [N]^T \\ [N, x]^T \end{Bmatrix}_y + \sum_{n=1}^{B_2} [\bar{Q}_{oz}, -\bar{M}_{yy}] \begin{Bmatrix} [N]^T \\ [N, y]^T \end{Bmatrix}_x \quad (4.29)$$

$$[Q_{op}]^T = \frac{th_0}{h} \left\{ u' \sum_{n=1}^{B_1} [N, yy]^T|_{y_i} + \bar{v}' \sum_{n=1}^{B_2} [N, xx]^T|x_i \right\} \quad (4.30)$$

以上各式代入总泛函(2.25)中得

$$\Pi = \frac{1}{2} q^T ([K] + [K_G]) q - [Q]^T q \quad (4.31)$$

其中

$$q = \begin{Bmatrix} q_p \\ q_w \end{Bmatrix} \quad (4.32)$$

$$[K_G] = [K_{G_1}] + [K_{G_2}] \quad (4.33)$$

$$[K] = \begin{pmatrix} [K_p] + [K_{op}] & [K_{mo}] + [K_{om}] \\ 0 & [K_w] + [K_{ow}] \end{pmatrix} \quad (4.34)$$



$$[K_G] = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & [K_{G1}] \end{pmatrix} \quad (4.35)$$

$$[Q] = \begin{pmatrix} [Q_F] + [Q_{OF}] \\ [Q_{W1}] + [Q_{W2}] + [Q_{OW2}] \end{pmatrix} = \begin{Bmatrix} [Q_F] \\ [Q_W] \end{Bmatrix} \quad (4.36)$$

由于非线性耦合矩阵 $[K_G]$ 中耦合着变量 $q$ , 故 $\Pi$ 的变分与一般线性泛函不同, 为了清楚起见, 下面用张量形式进行运算:

令 $\mathcal{K}_{ij}$ 为线性矩阵 $[K]$ 中系数,  $\mathcal{H}_{ijk}$ 为 $[K_G]$ 中各系数,  $q$ 为 $q$ 中元素,  $R$ 为加筋板计算所取的结点总自由度数, 故加筋板的总混合应变能为

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \mathcal{K}_{ij} q_i q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R \sum_{k=1}^R \mathcal{H}_{ijk} q_i q_j q_k \quad (4.37)$$

外力功为

$$V = \sum_{i=1}^R Q_{ki} q_i \quad (4.38)$$

于是由  $\delta\Pi = \delta(U+V) = 0$ ,  $\frac{\partial\Pi}{\partial q} = 0$  得

$$\sum_{j=1}^R \mathcal{K}_{kj} q_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^R \sum_{j=1}^R (\mathcal{H}_{ijk} + 2\mathcal{H}_{kij}) q_i q_j = Q_k \quad (k=1, 2, \dots, R) \quad (4.39)$$

用矩阵表示即为

$$([K] + [H])q = [Q] \quad (4.40)$$

其中

$$[H] = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2}[K_{G2}] \\ 0 & [K_{G1}] \end{pmatrix} \quad (4.41)$$

$$[K_{G2}] = [K_{G2}] + [K_{OG2}] \quad (4.42)$$

$$[K_{G2}] = \sum_{n=1}^N \iint_{A_n} \{Y1\}^T [D_{G2}] \{Y2\} dx dy \quad (4.43)$$

$$[K_{OG2}] = \sum_{n=1}^{B_1} \frac{s_0}{h} \int_{l_n} ([N, x] \{q_W\}^T [N, yy] [N, x]^T) |_y dx_i + \sum_{n=1}^{B_2} \frac{s_0}{h} \int_{l_n} ([N, v] \{q_W\}^T [N, xx] [N, v]^T) |_x dy_j \quad (4.44)$$

$$[D_{G2}] = \begin{pmatrix} \{q_W\}^T [N, yy] & 0 & 0 \\ 0 & \{q_W\}^T [N, xx] & 0 \\ 0 & 0 & -2\{q_W\}^T [N, xv] \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

故大变形迭代公式为

$$([K_F] + [K_{OF}])q_F^{(n)} + ([K_{m0}] + [K_{om}])q_m^{(n)} + \frac{1}{2}[K_{G2}]q_m^{(n)} = [Q_F] \quad (4.46)$$

$$([K_W] + [K_{OW}])q_W^{(n)} + [K_{G1}]q_W^{(n-1)} = [Q_W] \quad (4.47)$$

## 五、非线性耦合矩阵的分解

二维非线性耦合矩阵 $[K_{\sigma_1}]$ 和 $[K_{\sigma_2}]$ 是几何非线性问题的最重要特征之一，它反映了弯曲与结构形状的变化、弯曲与薄膜力的非线性耦合。在计算中如何处理非线性耦合矩阵，这是各种有限元法分析几何非线性问题的关键所在。若按常规计算，迭代方程(4.46)、(4.47)中二个非线性耦合矩阵各元素的二重积分将使运算极为浩繁。为了简化计算，同时又保持理论的严谨性，下面用张量形式进行分解：

(4.46)、(4.47)可写成

$$\sum_{j=1}^{R_1} \mathcal{K}_{kj}^* q_j^* + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{R_1} \sum_{j=1}^{R_1} \mathcal{H}_{ij} q_i q_j = Q_k^* \quad (5.1)$$

$$\sum_{j=1}^{R_1} \mathcal{K}_{kj} q_j + \sum_{i=1}^{R_1} \sum_{j=1}^{R_1} \mathcal{H}_{kij} q_i^* q_j = Q_k^* \quad (5.2)$$

其中  $R_1 = \frac{R}{2}$  ( $k=1, 2, \dots, R_1$ )。

$\mathcal{K}_{kj}^*$ ,  $\mathcal{K}_{kj}$  分别为二阶线柔度张量、线刚度张量。

$\mathcal{H}_{ijk}$ ,  $\mathcal{H}_{kij}$  分别为三阶耦合系数张量。

$q_i^*$ ,  $q_j^*$  为一阶广义力变量张量。

$q_i$ ,  $q_j$  为一阶位移变量张量。

$Q_k^*$ ,  $Q_k^*$  分别为一阶广义位移张量、广义力张量。

令张量  $G_{jk}^*$  和  $G_{jk}$  分别表示 $[K_{\sigma_1}]$ 和 $[K_{\sigma_2}]$ ，则

$$G_{jk}^* = \sum_{i=1}^{R_1} \mathcal{H}_{ij} q_i \quad (5.3)$$

$$G_{jk} = \sum_{i=1}^{R_1} \mathcal{H}_{kij} q_i^* \quad (5.4)$$

因三阶张量 $\mathcal{H}_{ijk} = \mathcal{H}_{kij}$ ，故可预先将单元耦合系数用二重积分逐个求出，作为三维输入数组。当上一次迭代中变量 $q_i$ (或 $q_i^*$ )作为定值时，则每一次迭代中二维非线性耦合矩阵便被确定。于是，在各次迭代中，非线性方程组(4.46)、(4.47)就转化成了瞬态线性方程组。

## 六、共轭斜量法迭代求解

二维非线性耦合矩阵的分解，不仅使非线性方程组线性化了，而且也构成了一种共轭斜量法的迭代格式<sup>[9]</sup>：

$$\bar{K}_w \bar{q}_w = \bar{P} - c\bar{r} \quad (6.1)$$

其中

$K_w$  为结构总线刚度矩阵， $\bar{q}_w$  为结点位移列阵。

$\bar{P}$  为结点荷载列阵(修正方向向量)。

$\bar{r}$  为计算剩余向量， $c$  为引入的比例因子。

共轭斜量法是一种非线性迭代法，它适合于系数矩阵  $\bar{K}_w$  为对称正定情况。只要修正方向  $\bar{P}$  不与被修正的向量  $\bar{q}_w$  相应的余量  $\bar{r}$  正交，则总可以通过不断修正而得到一个较好的近似解  $\bar{q}_w^{(n)}$ 。用共轭斜量法解(4.46)、(4.47)计算步骤如下：

- (1) 令  $\bar{q}_r=0$ ，由(4.47)解得初始向量  $\bar{q}_w^{(1)}$ ，代入(4.46)求得  $\bar{q}_r^{(1)}$ ；
- (2) 将向量  $\bar{q}_r^{(1)}$  代入(4.47)中的  $[K_{o_2}]$  中，求得剩余向量  $\bar{r}^{(0)}$ ；
- (3) 由  $\bar{K}_w \bar{q}_w^{(n)} = \bar{P} - c^{(n)} \bar{r}^{(n-1)}$  求得向量  $\bar{q}_w^{(n)}$ ；

其中

$$c^{(n)} = \frac{(\bar{r}^{(n-1)}, \bar{r}^{(n-1)})}{(\bar{K}_w \bar{P}, \bar{P})} \quad (6.2)$$

- (4) 对于  $n=1, 2, \dots$ ，重复上述步骤；

当  $\left| \frac{\bar{q}_w^{(n)} - \bar{q}_w^{(n-1)}}{\bar{q}_w^{(n)}} \right| < \varepsilon$  (允许误差) 时计算停止，相应的  $\bar{q}_w^{(n)}$  即为有限元方程组的解。

## 七、典型算例及比较

本文编制 FORTRAN 程序，在国产 320 机上进行了计算。计算中假设板梁材料相同且各向同性，忽略加筋条的扭转和翘曲。为了加快收敛，还采取了将前后两次计算的位移值取平均值作为下一次迭代初值的措施。

<1> 实例 1. 均布侧压下的四周固支方板 (图 3)。

已知  $a'=b'=60\text{cm}$ ， $h=1\text{cm}$ ， $\mu=0.3$ ， $E=7.2 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ ， $\bar{q}=1 \sim 10 \text{kg/cm}^2$ ，由于对称，取  $\frac{1}{4}$  板计算，用  $3 \times 3$  网格。因  $[K_{oP}] = [K_{oW}] = [K_{m_o}] = [K_{o_m}] = [Q_P] = 0$ ，故内存仅占一万八千全字长。

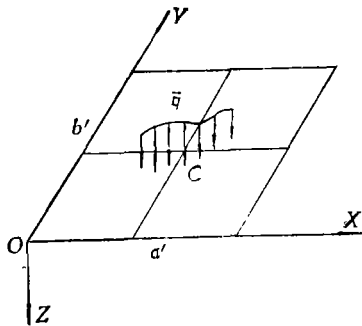


图 3

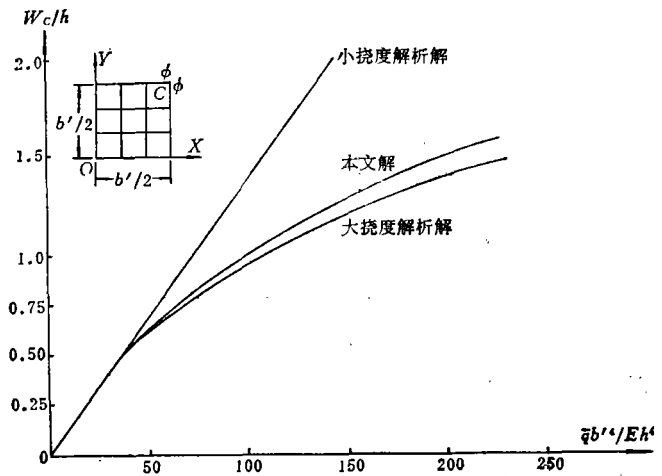


图 4

图 4 表示大变形板中心挠度与载荷之间关系。其中小挠度解析解按文献[12]所提供的解析式子计算得到，大挠度解析解则按文献[11]所提供的解析式子计算得到。

表 1 给出了  $\bar{q}=2.5 \text{kg/cm}^2$  时，板中心处挠度、薄膜应力和弯曲应力。

表 1 板中心挠度和应力

计算方法	挠度(cm)	薄膜应力(kg/cm <sup>2</sup> )	弯曲应力(kg/cm <sup>2</sup> )
小挠度解析解	0.625	0	1215
大挠度解析解	0.542	205	1078
本文解	0.549	228	980

以上实例 5 次加载仅用机时 15 分钟, 中心挠度与解析解相比误差在 4% 左右。

<2> 实例 2. 均布侧压作用下的四周固支  $x$  方向偏心加筋方板 (图 5)。

已知  $a'=b'=60\text{cm}$ ,  $h=h_0=1\text{cm}$ ,  $\mu=0.3$ ,  $E=7.2\times 10^5\text{kg/cm}^2$ ,  $s_0=4\text{cm}^2$ ,  $e=2.5\text{cm}$ ,  $t=4\text{cm}$ ,  $J_y=5.33\text{cm}^4$ ,  $\bar{q}=1\sim 10\text{kg/cm}^2$ 。由于对称, 取  $\frac{1}{4}$  板计算, 用  $3\times 3$  网格。由于  $[K_{om}] = [Q_r]=0$ , 内存占二万全字长。图 6 表示大变形偏心加筋板中心挠度与载荷的关系, 其中小挠度解析解按照文献 [12] 所提供的解析式计算得到。表 2 给出了  $\bar{q}=5\text{kg/cm}^2$  时板中心挠度和板、梁中心点应力。

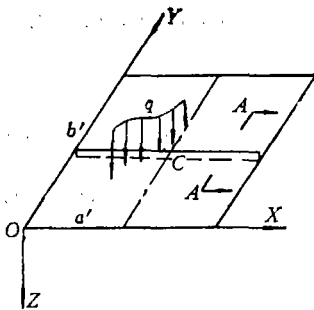


图 5

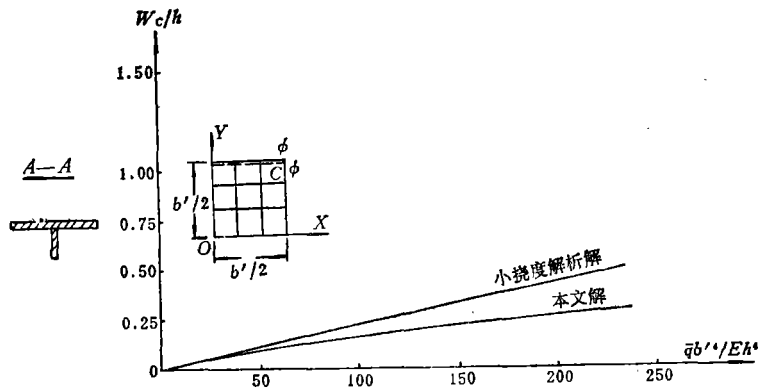


图 6

表 2 板中心挠度和板、梁中心点应力

计算方法	板中心挠度 (cm)	弯曲应力 (kg/cm <sup>2</sup> )	薄膜应力 (kg/cm <sup>2</sup> )	梁中点最大应力 (kg/cm <sup>2</sup> )	梁中点剪力 (kg)
小挠度解析解	0.188	1200	0	1340	1780
本文解	0.136	821	38.5	920	1218
大挠度解析解	缺				

以上实例 6 次加载仅用机时 15 分钟。

上述两个典型算例表明, 用本文方法分析计算加筋板的大变形问题具有收敛快、计算量少、精度高、理论严谨等显著特点, 能为工程界接受。至于加筋板的过屈曲分析, 将另有专文论述。

## 参 考 文 献

- [1] Murray, D. W. and E. L. Wilson, Finite element large deflection analysis of plates, *J. Struct. Div. ASCE*, 95(1969).
- [2] Walter, E. Haisler, Development and evaluation of solution procedures for geometrically nonlinear structural by the direct stiffness method, *AIAA J.*, 4(1971), 1—13
- [3] Fox, R. L., Development in structural analysis by direct energy minimization, *AIAA J.*, 6, 6 (1968).
- [4] 刘正兴、冯太华、李定夏, 用有限元法解加筋板壳的几何非线性问题, 南京航空学院学报, 5(1979).
- [5] 常福忠、刘玉兰等, 加筋板大变形及过屈曲的有限元分析, 科技资料, 第三机械工业部第六〇五所编, 1(1980).
- [6] B. B. 诺沃日洛夫, 《非线性弹性理论》, 朱兆祥译(1953).
- [7] Gass, N. and B. Tabarrok, Large deformation analysis of plates and cylindrical shells by a mixed finite element method, *Int. J. Num. Mesh. Eng.*, 10, 711—746.
- [8] 陈远汉, 一种快速收敛 12 自由度板弯曲矩形拟协调元, 1981 年中国科学技术大学研究生毕业论文.
- [9] 冯康, 《数值计算方法》, 国防工业出版社, (1978).
- [10] Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, (1968), 164.
- [11] A. C. 沃耳密尔, 《柔韧板与柔韧壳》, 科学出版社, (1963).
- [12] S. 铁木辛柯, 《板壳理论》, 科学出版社, 1977年10月第一版.

## Large Deformation Solution of Stiffened Plates by a Mixed Finite Element Method

Chen Yen-han

(University of Science and Technology of China, Hefei)

### Abstract

In the present paper, a finite element mixed variational functional and the iterative equations of the eccentric orthogonal stiffened plates are developed in accordance with nonlinear elasticity. By using an important technique the coupling coefficients of the two dimensional coupling matrix are resolved into the known input data in the programming which is a three-dimensional coefficient matrix. The nonlinear equations are transformed into the instantaneous linear equations. The linear equations are solved by using the conjugate gradient method. As a result, therefore, the calculation is simplified enormously, the precision is improved, and a satisfactory result is obtained.