应用数学和力学，第4卷第6期（1983年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

合成展开法应用于球壳对称弯曲的边界层问题

周 焕 文

（武汉大学，1983年1月20收到）

摘 要

本文推广钱伟长在[5]中提出的合成展开法分析双参数边界层问题.

对于受均布荷载作用的球壳对称变形问题，其非线性平衡方程可以写成(2.3a)，(2.3b)：

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}(x\theta)-\frac{1}{4}F\theta-k^2F-\varepsilon^3p\delta=0$$

$$\delta^2\frac{d^2}{dx^2}(xF)+\frac{1}{2}\theta^2+4k^2\theta=0$$

式中ε与δ是待定参数．当$\delta=1$，ε是小参数时，这是第一边界层问题；当δ与ε都是小参数时．这是第二边界层问题.

对于上述问题，我们假定ε，δ和p满足

$$\varepsilon^3p\delta=1-\varepsilon$$

在这个条件下，应用推广的合成展开法，求出上述问题具有固定边界条件情况的渐近解.

一、前 言

合成展开法在A．H．Nayfeh的书[1]中曾作过介绍，作者介绍了E．Bromberg[2](1956)，M．И．Вишик，Л．А．Люстерник[3]（1957）和G．E．Latta[4]（1951）等的工作。其实，我国钱伟长教授早在1948年，就已经提出了这个方法[5]（有关的介绍，可以参看[6]），这个工作是合成展开法中较早的文献.

合成展开法被Л．С．Срубщик广泛地应用到弹性力学的非线性问题[7]，作者把这些问题化为高阶导数项乘有小参数的奇异摄动方程，在选择小参数时，把$h(a\gamma)^{-1}$作为小参数.这种选法固然可以，但却会使另外一些含参数的项放大，例如荷载项．为了避免在方程中同时出现大参数项，就必须对诸如荷载项等参量加以限制，这样就把应用范围缩小了.

本文采用待定小参数法选择参数，假定ε与δ满足方程$\varepsilon^3p\delta=1-\varepsilon$．这种选择法，对于荷载项可以不加限制．同时，由于改变了方程的结构形式，从而求得了不同于Срубщик的结果.

二、基本方程的建立

对于厚度为h、跨度为$2a$、半径为R的球形薄壳体，如讨论非线性轴对称变形，其方程是

$$Dr\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r\frac{dw}{dr}-rN_r\frac{dw}{dr}-\frac{1}{R}r^2N_r-\int_0^r rqdr=0 \tag{2.1a}$$

$$r\frac{d}{dr}\frac{1}{r}\frac{d}{dr}r^2N_r+\frac{Eh}{2}\left(\frac{dw}{dr}\right)^2+\frac{1}{R}Ehr\frac{dw}{dr}=0 \tag{2.1b}$$

讨论均布荷载的情形，令

$$\left.\begin{aligned}&x=r^2/a^2,\quad \beta=\sqrt{12(1-\mu^2)}\,\varepsilon\delta w/h\\&F=a^2\varepsilon^2N_r/D,\quad \theta=\frac{d\beta}{dx}\end{aligned}\right\} \tag{2.2a}$$

以及

$$k^2=a^2\varepsilon\delta\sqrt{12(1-\mu^2)}/8Rh,\quad p=qa^4[12(1-\mu^2)]^{\frac{3}{2}}/16Eh^4 \tag{2.2b}$$

于是，方程(2.1a)、(2.1b)变成

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}(x\theta)-\frac{1}{4}F\theta-k^2F-\varepsilon^3p\delta=0 \tag{2.3a}$$

$$\delta^2\frac{d^2}{dx^2}(xF)+\frac{1}{2}\theta^2+4k^2\theta=0 \tag{2.3b}$$

其中ε与δ为待定参数，它们可以任意选取，但是要使$\varepsilon^3p\delta$与k^2为大于零的有限常量（当$\varepsilon,\delta\to 0$时）．本文选取ε与δ满足关系式：

$$\varepsilon^3\delta p=1-\varepsilon \tag{2.4}$$

于是(2.3a)与(2.3b)成为

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}(x\theta)-\frac{1}{4}F\theta-k^2F-1+\varepsilon=0 \tag{2.5a}$$

$$\delta^2\frac{d^2}{dx^2}(xF)+\frac{1}{2}\theta^2+4k^2\theta=0 \tag{2.5b}$$

对于方程组(2.3a)、(2.3b)或者(2.5a)、(2.5b)，假定它们具有固定边界条件：

$$[F,\ \theta]_{x=0}<\infty \tag{2.6a}$$

$$\left[F+\frac{2}{1-\mu}x\frac{dF}{dx}\right]_{x=1}=\theta|_{x=1}=0 \tag{2.6b}$$

三、第一边界层

令$\delta=1$．此时方程组(2.3a)、(2.3b)为

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}(x\theta)-\frac{1}{4}F\theta-k^2F-\varepsilon^3p=0 \tag{2.3a$'$}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(xF)+\frac{1}{2}\theta^2+4k^2\theta=0 \tag{2.3b$'$}$$

前面曾经指出，这里的ε是待定参数，有时可以选取[7]$\varepsilon=h[a\sqrt{12(1-\mu^2)}]^{-1}$．不过，此时的$\varepsilon^3p$将等于$\varepsilon^{-1}q/16E\sqrt{12(1-\mu^2)}$，当$\varepsilon\to0$，$\varepsilon^3p$非有限量．欲使$\varepsilon^3p$为有限量，必须假定$q$与$\varepsilon$是同级小量，这样就缩小了应用范围．如果采用(2.4)，此时有

$$\varepsilon^3p=1-\varepsilon \tag{2.4$'$}$$

于是，ε^3p就是有限量了。

将(2.4)′代入(2.3a)′～(2.3b)′，得到

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}(x\theta)-\frac{1}{4}F\theta-k^2F-1+\varepsilon=0 \tag{2.5a$'$}$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(xF)+\frac{1}{2}\theta^2+4k^2\theta=0 \tag{2.5b$'$}$$

我们用合成展开法来求这个方程组具有边界条件(2.6a)、(2.6b)的渐近解．设解的形式为

$$\theta=\omega(x,\ \varepsilon)+\Omega(x,\ \eta,\ \varepsilon) \tag{3.1a}$$

$$F=\varphi(x,\ \varepsilon)+\Psi(x,\ \eta,\ \varepsilon) \tag{3.1b}$$

其中

$$\eta=\pi(x)/\varepsilon \tag{3.2}$$

$\pi(x)$是边界层函数，它是待定的，假定$\pi(1)=0$.

函数ω与φ是方程组的正则摄动解，设

$$\omega(x,\ \varepsilon)=\omega_0(x)+\omega_1(x)\varepsilon+\omega_2(x)\varepsilon^2+\cdots\cdots \tag{3.3a}$$

$$\varphi(x,\ \varepsilon)=\varphi_0(x)+\varphi_1(x)\varepsilon+\varphi_2(x)\varepsilon^2+\cdots\cdots \tag{3.3b}$$

函数Ω与Ψ是方程组的边界层解，设

$$\Omega(x,\ \eta,\ \varepsilon)=\Omega_0(x,\ \eta)+\Omega_1(x,\ \eta)\varepsilon+\Omega_2(x,\ \eta)\varepsilon^2+\cdots\cdots \tag{3.4a}$$

$$\Psi(x,\ \eta,\ \varepsilon)=\Psi_0(x,\ \eta)+\Psi_1(x,\ \eta)\varepsilon+\Psi_2(x,\ \eta)\varepsilon^2+\cdots\cdots \tag{3.4b}$$

函数ω与φ的具体求法，可以参照文献[6]与[9]；而函数Ω与Ψ的具体求法，可以参照文献[6]．函数Ω_i与Ψ_i满足渐近方程：

$$\begin{aligned}x\pi'^2\frac{\partial^2\Omega_n}{\partial\eta^2}-\frac{1}{4}\varphi_0\Omega_n=&\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n}\varphi_i\Omega_{n-i}+\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}\omega_i\Psi_{n-i}+\frac{1}{4}\sum_{i=0}^{n}\Psi_i\Omega_{n-i}\\&+k^2\Psi_n-2x\pi'\frac{\partial^2\Omega_{n-1}}{\partial x\partial\eta}-(2\pi\ +x\pi'')\frac{\partial\Omega_{n-1}}{\partial\eta}-x\frac{\partial^2\Omega_{n-2}}{\partial x^2}\\&-2\frac{\partial\Omega_{n-2}}{\partial x}\end{aligned} \tag{3.5a}$$

$$\begin{aligned}x\pi'^2\frac{\partial^2\Psi_n}{\partial\eta^2}=&-2x\pi'\frac{\partial^2\Psi_{n-1}}{\partial x\partial\eta}-(2\pi'+x\pi'')\frac{\partial\Psi_{n-1}}{\partial\eta}-x\frac{\partial^2\Psi_{n-2}}{\partial x^2}-2\frac{\partial\Psi_{n-2}}{\partial x}\\&-\sum_{i=0}^{n-2}\omega_i\Omega_{n-2-i}-\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{n-2}\Omega_i\Omega_{n-2-i}-4k^2\Omega_{n-2}\end{aligned} \tag{3.5b}$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

其中ω_{-i}，φ_{-i}，Ω_{-i}与Ψ_{-i}都恒等于零 ($i\geqslant1$)．

我们讨论固定边界条件，因此假定

1． $\Omega_i(x,\ \infty)$是有限的，$\Psi_i(x,\ \infty)$是有限的； (3.6a)

2. $\Omega_i(1,\ 0)=-\omega_i(1)$ (3.6b)

$$2\frac{\partial\Psi_i(1,0)}{\partial x}+2\frac{\partial\Psi_{i+1}(1,0)}{\partial\eta}\pi'(1)+(1-\mu)\Psi_i(1,0)=0 \tag{3.6c}$$

$$(i=-1,0,1,2,\cdots)$$

从(3.5b)式中可以得到Ψ_0与Ψ不显含η. 再根据边界条件(3.6a)与(3.6c)，可以得到

$$\Psi_0\equiv0,\ \ \Psi_1=a_1 \tag{3.7}$$

其中a_1是待定常数.

从(3.5a)式看出，如果假定

$$x\pi'^2=\varphi_0 \tag{3.8}$$

则(3.5a)式成为非常简单的线性非齐次常系数微分方程. 对于Ω_0，显然有

$$\frac{\partial^2\Omega_0}{\partial\eta^2}-\frac{1}{4}\Omega_0=0 \tag{3.9}$$

解之，并据条件(3.6a)，得到

$$\Omega_0=c_0(x)e^{-\eta/2} \tag{3.10}$$

其中$c_0(x)$是待定的函数，根据边界条件(3.6b)，应该有

$$c_0(1)=-\omega_0(1) \tag{3.11}$$

从(3.8)式可以得到边界层变量η,

$$\eta=\frac{1}{\varepsilon}\int_x^1\sqrt{\frac{\varphi_0}{x}}dx \tag{3.12}$$

将(3.10)代入(3.5b)，并根据条件(3.6a)，可以得到

$$\Psi_2=a_2(x)-\frac{c_0^2}{2\varphi_0}e^{-\eta}+\frac{16}{\varphi_0'}c_0e^{-\eta/2} \tag{3.13}$$

其中a_2是待定的.

利用Ψ_2的表示式(3.13)，注意到边界条件(3.6c)，可以得到

$$a_1=\frac{16}{(1-\mu)\sqrt{\varphi_0(1)}}\left(k^4-\frac{2k^2}{\varphi_0(1)}-\frac{3}{\varphi_0^2(1)}\right) \tag{3.14}$$

现在转到(3.5a)式，容易得到

$$\frac{\partial^2\Omega_1}{\partial\eta^2}-\frac{1}{4}\Omega_1=\frac{a_1}{\varphi_0}\left(\frac{1}{4}\omega_0+k^2\right)+\frac{1}{\varphi_0}\left[\left(\frac{1}{4}\varphi_1+\frac{1}{4}a_1+\frac{2\pi'+x\pi''}{2}\right)c_0+x\pi'\frac{dc_0}{dx}\right]e^{-\eta/2} \tag{3.15}$$

上式中带有方括号的项会使θ_1产生“共振项”，即所谓“永年项”. 为了消除这种 项，可以命方括号内的函数项为零，即

$$x\pi'\frac{dc_0}{dx}+\left(\frac{1}{4}\varphi_1+\frac{1}{4}a_1+\pi'+\frac{1}{2}x\pi''\right)c_0=0 \tag{3.16}$$

从此可求出$c_0(x)$:

$$c_0(x)=-\omega_0(1)\exp\left[\int_x^1[(\varphi_1/4+a_1/4+\pi'+\frac{1}{2}x\pi'')/x\pi']dx\right] \tag{3.17}$$

有了(3.16)或(3.17)式，就使得(3.15)中的“共振项”被消除了. 于是，从(3.15)中可以求出Ω_1为

$$\Omega_1=c_1(x)e^{-\eta/2}+\frac{-a_1}{\varphi_0}(4k^2+\omega_0) \tag{3.18}$$

式中$c_1(x)$是待定函数．确定c_1的办法与确定c_0的办法一样．

按照上述办法，可以求出其他的Ω_i与Ψ_i的表达式，在这些表达式中，"永年项"全都被消除了．

四、第 二 边 界 层

我们讨论(2.3a)、(2.3b)或(2.5a)、(2.5b)．假定ε与δ都是小参数，这是带有两个小参数的奇异摄动方程组，或者说，这是具有两个边界层的问题．

带有两个或两个以上小参数的奇异摄动理论的应用，公开发表的文献虽不多，但这是一个重要研究课题．这方面，O'Malley有不少的工作[10,12]，Срубщик (1981) 把它应用到弹性球壳的弯曲[7]．关于后者，Reissner也有研究[13]．在[7]与[13]中，基本方程是类似本文中的(2.3a)、(2.3b)的形式．我们不采用这种形式，而是采用方程组(2.5a)、(2.5b)，于是得到不同于Срубщик的结果．

(a) 外部解

在(2.5a)、(2.5b)中，去掉带有ε与δ的项，我们得到两个代数方程：

$$\frac{1}{4}\varphi_{00}\omega_{00}+k^2\varphi_{00}+1=0 \tag{4.1a}$$

$$\frac{1}{2}\omega_{00}^2+4k^2\omega_{00}=0 \tag{4.1b}$$

这里有两组解：

1. $\omega_{00}=0$，$\varphi_{00}=-k^{-2}$ (4.2a)
2. $\omega_{00}=-8k^2$，$\varphi_{00}=k^{-2}$ (4.2b)

这两组解，实际上也就是分叉解，本文只讨论一个分叉，即讨论(4.2b)的情况．

(b) 中间合成解

假定方程组(2.5a)、(2.5b)的解具有下列的形式：

$$\theta=\lambda(x,\ \delta,\ \varepsilon)+\omega(\zeta,\ \delta,\ \varepsilon) \tag{4.3a}$$

$$F=G(x,\ \delta,\ \varepsilon)+\varphi(\zeta,\ \delta,\ \varepsilon) \tag{4.3b}$$

其中

$$\zeta=(1-x)/\delta \tag{4.4}$$

我们称这种解为中间合成解[11]．而ω与φ则是第二边界层解．这种解不能满足(2.6a)、(2.6b)中的全部条件．我们假定φ满足边界条件，而ω可以不满足．函数φ所满足的边界条件

$$\varphi(\infty,\ \delta,\ \varepsilon)=0 \tag{4.5a}$$

$$\left\{G+\varphi+\frac{2x}{1-\mu}\left[\frac{dG}{dx}-\frac{1}{\delta}\frac{d\varphi}{d\zeta}\right]\right\}_{x=1;\zeta=0}=0 \tag{4.5b}$$

假定对λ，G，φ和ω作渐近展开：

$$\lambda=\sum_{i,j=0}^{\infty}\lambda_{ij}(x)\varepsilon^i\delta^j,\quad G=\sum_{i,j=0}^{\infty}G_{ij}(x)\varepsilon^i\delta^j \tag{4.6a}$$

$$\varphi=\sum_{i,j=0}^{\infty}\varphi_{ij}(\zeta)\varepsilon^i\delta^j,\quad \omega=\sum_{i,j=0}^{\infty}\omega_{ij}(\zeta)\varepsilon^i\delta^j \tag{4.6b}$$

将它们代入方程组(2.5a)、(2.5b)及边界条件(4.5a)、(4.5b)，可以得到诸渐近展开分量的表达式：

$$\lambda_{00}=-8k^2,\ \lambda_{ij}=0\quad (i,\ j\text{不同时为零}) \tag{4.7a}$$

$$G_{00}=k^{-2},\ G_{10}=-k^{-2},\ \text{其余的}G_{ij}=0 \tag{4.7b}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\varphi_{00}=0,\ \varphi_{01}=-\frac{1-\mu}{8}k^{-5}\exp[-4k^3\zeta]\\
&\varphi_{02}=\frac{1-4\mu}{128}k^{-8}\exp[-4k^3\zeta]-\frac{3(1-\mu)}{32}k^{-5}\zeta\exp[-4k^3\zeta]\\
&\qquad+\frac{1-\mu}{8}k^{-2}\zeta^2\exp[-4k^3\zeta]-\frac{(1-\mu)^2}{128}k^{-8}\exp[-8k^3\zeta]\\
&\varphi_{10}=0,\ \varphi_{11}=\frac{3(1-\mu)}{16}k^{-5}\exp[-4k^3\zeta]+\frac{1-\mu}{4}k^{-2}\zeta\exp[-4k^3\zeta]
\end{aligned}\right\} \tag{4.7c}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\omega_{00}=0,\ \omega_{01}=-\frac{1-\mu}{2}k^{-1}\exp[-4k^3\zeta]\\
&\omega_{02}=\frac{1-4\mu}{32}k^{-4}\exp[-4k^3\zeta]-\frac{3(1-\mu)}{8}k^{-1}\zeta\exp[-4k^3\zeta]\\
&\qquad+\frac{1-\mu}{2}k^2\zeta^2\exp[-4k^3\zeta]-\frac{3(1-\mu)^2}{32}k^{-4}\exp[-8k^3\zeta]\\
&\omega_{10}=0,\quad \omega_{11}=\frac{1-\mu}{4}k^{-1}\exp[-4k^3\zeta]+(1-\mu)k^2\zeta\exp[-4k^3\zeta]
\end{aligned}\right\} \tag{4.7d}$$

其余的φ_{ij}与ω_{ij}亦可求出。

(c) 完全合成解

我们讨论方程组(2.5a)、(2.5b)具有边界条件(2.6a)、(2.6b)的解，这种解可以利用前一节的方法求出，假定

$$\theta=\lambda(x,\ \delta,\ \varepsilon)+\omega(\zeta(x),\ \delta,\ \varepsilon)+\Omega(x,\ \eta,\ \delta,\ \varepsilon) \tag{4.8a}$$

$$F=G(x,\ \delta,\ \varepsilon)+\varphi(\zeta(x),\ \delta,\ \varepsilon)+\Psi(x,\ \eta,\ \delta,\ \varepsilon) \tag{4.8b}$$

其中

$$\eta=\pi(x,\ \delta)/\varepsilon \tag{4.9}$$

$\pi(x,\ \delta)$是边界层函数．同前一节相仿，假定

$$\pi(x,\ \delta)=\int_x^1\sqrt{\frac{G(x,\delta,0)+\varphi(\zeta(x),\delta,0)}{x}}dx \tag{4.10}$$

改写(2.5a)、(2.5b)成

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}(x\theta)-\frac{1}{4}F\theta-k^2F-1+\varepsilon=0 \tag{2.5a)''$$

$$\frac{d^2}{dx^2}(xF)+\frac{\delta^{-2}}{2}\theta^2+4\delta^{-2}k^2\theta=0 \tag{2.5b)''$$

这与(2.5a)′、(2.5b)′有类似的形式．因此，我们可以用第三节相同的办法求出Ω与Ψ的渐近解．例如

$$\Omega_0=c_0(x,\ \delta)e^{-\eta/2} \tag{4.11}$$

其中

$$c_0(x,\ \delta)=-[\lambda(1,\delta,0)+\omega(0,\delta,0)]\exp\left[\int_x^1 p(x,\delta)dx\right]$$

而

$$P=\left[\frac{G_\varepsilon(x,\delta,0)+\varphi_\varepsilon(\zeta(x),\delta,0)+a_1}{4}+\frac{2\pi+x\pi''}{2}\right]\Big/x\pi'$$

$$a_1=\frac{16\delta^{-2}}{(1-\mu)\sqrt{G(1,\delta,0)+\varphi(0,\delta,0)}}\left[k^4-\frac{2k^2}{G(1,\delta,0)+\varphi(0,\delta,0)}\right.$$

$$\left.-\frac{3}{[G(1,\delta,0)+\varphi(0,\delta,0)]^2}\right]$$

(d) δ值的估计

在前面推导基本方程时，曾对p与k^2加以限制，即要求

$$\varepsilon^3p\delta=O(1) \tag{4.12}$$

$$k^2=O(1) \tag{4.13}$$

其中k^2与p的表示式是(2.2b)．

利用(4.12)、(4.13)与(2.2b)，便可求得δ的估计值，

$$\delta=O\left(\frac{\sqrt{p}}{\rho^3}\right) \tag{4.14}$$

其中

$$\rho^2=\sqrt{12(1-\mu^2)}\frac{a^2}{Rh} \tag{4.15}$$

这一结果与Reissner的结果是一致的[13]．

参 考 文 献

[1] Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, (1973).

[2] Bromberg, E., Nonlinear bending of a circular plate under normal pressure *Comm. Pure Appl. Math.*, 9, (1956), 633—659.

[3] Вишик, М. И. и Л. А Люстерник, Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, *УСПЕХИ МАТЕ.*, 12, 5(1957).

[4] Latta, G. E., Singular perturbation problems, Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, (1951).

[5] Chien Wei-zang, Asymptotic behavior of a thin clamped circular plate under uniform normal pressure at very large deflection, 清华大学理科报告, 5, 1(1948).

[6] 周焕文，奇异摄动法在圆板大挠度问题中的应用，刊于钱伟长主编《奇异摄动理论及其在力学中的应用》，科学出版社，(1981)．

[7] Срубщик, Л. С. и В. И. Юдович, *ДАН*, 139, 2 (1961); *ПММ*, 26, 5 (1962); *ПММ*, 30, 1(1966); Срубщик, Л. С., *ПММ*, 32, 3(1968); *ПММ*, 36, 4 (1972); *ПММ*, 37, 1(1973); *ПММ*, 44, 2; 5(1980); *ПММ*, 45, 5(1981).

[8] 钱伟长，《奇异摄动理论》，(即将出版)．

[9] 周焕文，《合成展开法在球壳大挠度问题中的应用》，(待出版)．

[10] O'Malley, Jr., R. E., (a) *Arch. Rational Mech Anal.*, 26(1967); 40(1971); (b) *J. Math Mech.*, 16(1967).

[11] O'Malley, Jr., R. E., A boundary value problem for certain nonlinear second order differential equations with a small parameter, *Arch. Rat. Mech. Anal.*, 29 (1968), 66—74.

[12] O'Malley, Jr., R. E., On the asymptotic solution of a two-parameter boundary value problem of chemical reactor theory, *SIAM J. Appl. Math.*, 26, 4(1974).

[13] Reissner, E., The edge effect in symmetric bending of shallow shells of revolution, *Pure and Appl. Math.*, 12, 2(1959), 385.

The Method of Composite Expansions Applied to Boundary Layer Problems in Symmetric Bending of the Spherical Shells

Chou Huan-wen

(*Wuhan University, Wuhan*)

Abstract

In this paper, the method of composite expansions, which was proposed by W. Z. Chien(1948, [5]), is extended to investigate two-parameter boundary layer problems.

For the problems of symmetric deformations of the spherical shells under the action of uniformly distributed load q, its nonlinear equilibrium equations can be written as follows(2.3a), (2.3b):

$$\varepsilon^2\frac{d^2}{dx^2}(x\theta)-\frac{1}{4}F\theta-k^2F-\varepsilon^3p\delta=0$$

$$\delta^2\frac{d^2}{dx^2}(xF)+\frac{1}{2}\theta^2+4k^2\theta=0$$

where ε and δ are undetermined parameters. If $\delta=1$ and ε is a small parameter, the above problem is called first boundary layer problem. If ε is a small parameter, and δ is a small parameter, too, the above problem is called second boundary layer problem.

For the above problems, however, we assume that constant ε, δ and p satisfy the following equation

$$\varepsilon^3p\delta=1-\varepsilon$$

In the defining of this condition, using the extended method of composite expansions, we find out the asymptotic solution of the above problems with the clamped boundary condition.