

旋转充液腔体的全局稳定性及其 受扰运动的定性分析

李 骊

(天津大学, 1982年10月12日收到)

摘 要

本文是[1]的继续. 在本文中, 我们研究了旋转充液腔体定常解的分布情况, 确定了每一定常解的稳定性并给出了相应的稳定与不稳定区域, 此外, 对旋转充液腔体的受扰运动作出了全面的定性分析.

一、基本公式

为方便计, 我们将[1]中的几个有关公式与结论重写如下(公式编号与[1]同).

1. 扰动动能函数

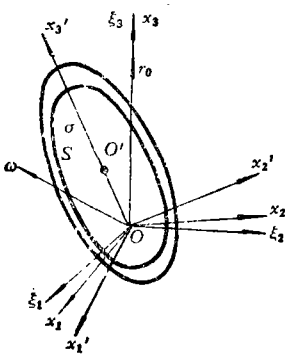


图 1

$$T = \frac{1}{2} \bar{\omega} \cdot \bar{J}_1 \cdot \bar{\omega} + \iiint_{(\sigma)} \frac{1}{2} \rho \bar{v}_r^2 d\sigma \quad (3.19)^{[1]}$$

其中

$\bar{\omega}$ ——腔体扰动角速度, \bar{J} ——腔体的惯性张量, ρ ——液体密度, \bar{v}_r ——液体扰动速度, σ ——液体体积.

显然, 由(3.19)^[1]知, 有

$$T \geq 0 \quad (1.1)$$

2. 扰动势能函数

$$U = ag_{13}^2 + bg_{23}^2 + 2c(g_{33} - 1) \quad (3.20)^{[1]}$$

其中

$$a = \frac{r_0^2}{2} (C_1 + C_2 - A_1 - A_2), \quad b = \frac{r_0^2}{2} (C_1 + C_2 - B_1 - B_2), \quad c = \frac{1}{2} (M_1 g h_1 + M_2 g h_2) \quad (3.17)^{[1]}$$

在上式中

$A_1, A_2; B_1, B_2; C_1, C_2$ ——腔体与液体沿 $Ox_1'x_2'x_3'$ 各轴的惯性主矩

M_1, M_2 ——腔体与液体的质量

h_1, h_2 ——腔体与液体的重心沿 Ox'_3 轴到 O 点的距离

g ——重力加速度

r_0 ——旋转坐标系 $Ox_1x_2x_3$ 绕 $O\xi_3$ 轴转动的角速度、它是一常数, 并表示旋转充液腔体的某一定常解

g_{13}, g_{23}, g_{33} ——扰动坐标系 $Ox'_1x'_2x'_3$ (它表示旋转充液腔体受扰动后的位置) 中的 Ox'_3 轴对定坐标系 $O\xi_1\xi_2\xi_3$ 三轴的方向余弦, 因而它满足

$$g_{13}^2 + g_{23}^2 + g_{33}^2 = 1 \quad (4.1)^{(1)}$$

(4.1)⁽¹⁾ 的几何意义为一单位球面, 而 U 即为定义在此球面上的函数. 在以后的讨论中, 我们称此球面为 K , 并称 $g_{33} > 0$ 为上半球面, $g_{33} < 0$ 为下半球面, $g_{33} = 0$ 为赤道.

作变换

$$g_{13} = \sqrt{1 - g_{33}^2} \cos\theta, \quad g_{23} = \sqrt{1 - g_{33}^2} \sin\theta \quad (4.2)^{(1)}$$

此时 (4.1)⁽¹⁾ 恒被满足. 在此情况下, (3.20)⁽¹⁾ 化为

$$U = (1 - g_{33}) \{ (1 + g_{33}) [(a - b) \cos^2\theta + b] - 2c \} \quad (4.3)^{(1)}$$

并由此得

$$\frac{\partial U}{\partial g_{33}} = -2g_{33} [(a - b) \cos^2\theta + b] + 2c \quad (4.5)^{(1)}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \theta} = -(1 - g_{33}^2) (a - b) \sin 2\theta \quad (4.8)^{(1)}$$

令 $U = 0$, 得 U 的零值曲线 $U^{(0)}$ 的方程为

$$g_{33}^{(0)} = \frac{2c}{(a - b) \cos^2\theta + b} - 1, \quad g_{33}^{(0)} = 1 \quad (1.2)$$

令 $\frac{\partial U}{\partial g_{33}} = 0$, 得 U 的极值曲线 $U^{(m)}$ 的方程为

$$g_{33}^{(m)} = \frac{c}{(a - b) \cos^2\theta + b} \quad (4.6)^{(1)}$$

令 $\frac{\partial U}{\partial \theta} = 0$, 得 $\theta = 0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}$, 且

$$U = \begin{cases} \max & \text{当 } \theta = 0, \pi \\ \min & \text{当 } \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \end{cases} \quad (1.3)$$

3. 扰动耗散函数

$$R = \frac{\mu}{2} \iiint_{(\sigma)} \sum_{i=1}^3 r_i^2 d\sigma \quad (3.21)^{(1)}$$

其中

μ ——液体粘性系数

$$\tau_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (i, j=1, 2, 3) \quad (2.2)^{[1]}$$

v_1, v_2, v_3 ——液体沿 $Ox_1x_2x_3$ 各轴的绝对速度

在[1]中已证明, 只有对于充液腔体的定常解, 亦即只有对于腔体与液体一起以某一匀角速度绕定轴作整体转动时, 才有 $R \equiv 0$. 据此, 并由(3.21)^[1], 可得

$$\left. \begin{array}{l} R \geq 0 \text{ 但 } \neq 0 \quad \text{当充液腔体不处于定常解} \\ R \equiv 0 \quad \quad \quad \text{当充液腔体处于定常解} \end{array} \right\} \quad (1.4)$$

4. 扰动总能量函数

$$V = T + U \quad (3.22)^{[1]}$$

在[1]中已证明

$$\frac{dV}{dt} = -R \quad (3.23)^{[1]}$$

据此, 并由(1.4), 可得

$$\left. \begin{array}{l} \frac{dV}{dt} \leq 0 \text{ 但 } \neq 0 \quad \text{当充液腔体不处于定常解} \\ \frac{dV}{dt} \equiv 0 \quad \quad \quad \text{当充液腔体处于定常解} \end{array} \right\} \quad (1.5)$$

下面研究充液腔体定常解的分布, 并利用上述有关公式与结论, 确定每一定常解的稳定性并给出其相应的稳定与不稳定区域, 同时, 对充液腔体的受扰运动, 进行全面的定性分析.

上面已指出, 所谓充液腔体的定常解, 是指这样一种运动状态, 即液体与腔体一起以某一匀角速度绕定轴作整体转动. 因此, 在求充液腔体的定常解时, 我们将把液体与腔体视为一个刚体. 如果, 设此刚体的质量为 M , 沿 $Ox'_1x'_2x'_3$ 各轴的惯性主矩为 A, B, C , 其重心 O' 沿 Ox'_3 轴到固定点 O 之距为 h , 于是显然有

$$M = M_1 + M_2 \quad (1.6)$$

$$A = A_1 + A_2, \quad B = B_1 + B_2, \quad C = C_1 + C_2 \quad (1.7)$$

$$h = \frac{M_1 g h_1 + M_2 g h_2}{M} \quad (1.8)$$

而且, 由(3.17)^[1]知

$$c = \frac{1}{2} M g h \quad (1.9)$$

从而 c 与 h 同号, 并且 $h=0$ 时有 $c=0$.

以下分别讨论两种情况, 即Lagrange-Poisson情况与Euler-Poinsot情况.

二、Lagrange-Poisson情况

此时腔体与液体的重心 O' 不与固定点 O 重合 (图2). 如腔体与液体绕固定点 O 转动的角速度矢量沿 $Ox'_1x'_2x'_3$ 各轴的投影分别为 p, q, r , 则其Euler动力学方程为^[2]

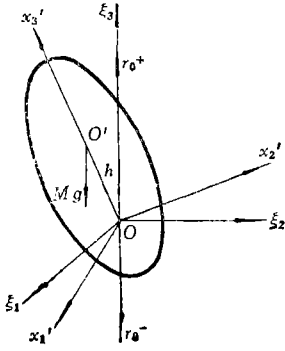


图 2

$$\left. \begin{aligned} A \frac{d\phi}{dt} &= (B-C)qr + Mghg_{23} \\ B \frac{dq}{dt} &= (C-A)rp - Mghg_{13} \\ C \frac{dr}{dt} &= (A-B)pq \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

此时(2.1)的定常解为

$$g_{13} = g_{23} = 0, \quad p = q = 0, \quad r = r_0 = \text{常数} \quad (2.2)$$

正如[1]所指出,实际上它对应于两个定常解集合

$$\left. \begin{aligned} g_{33} &= +1, \quad r = r_0 \\ g_{33} &= -1, \quad r = r_0 \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

它们都表示绕 Ox_3' 轴的匀角速转动, 不过前者表示 Ox_3' 轴为铅直向上(此时 O' 在 O 之上), 后者表示 Ox_3' 轴为铅直向下(此时 O' 在 O 之下). 为便于说明, 我们称前一定常解集合为 r_0^+ , 后一定常解集合为 r_0^- .

以下讨论各种可能情况.

1. $a > b > c > 0$

这一情况在[1]中的第四节已讨论过. 这时由(4.6)^[1]所得出的 U 的极值曲线 $U^{(m)}$ 位于 K 的上半球面内(图3), 而且, 在条件 $a > b > c > 0$ 之下, 由(4.3)^[1]容易算出

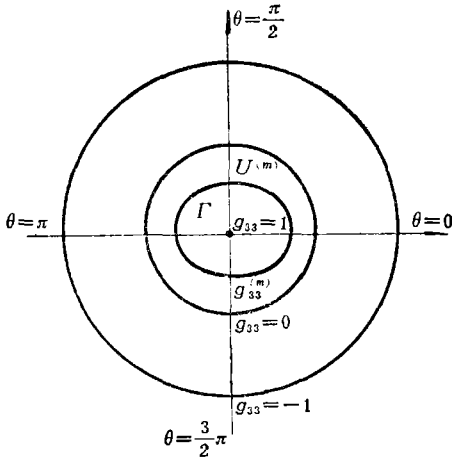


图 3

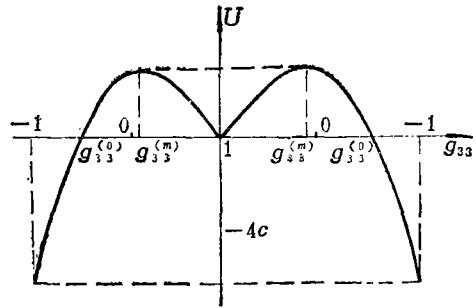


图 4

$$U = \begin{cases} 0 & \text{当 } g_{33} = +1 \\ (U_{\max})_{\max} = \left(1 - \frac{c}{a}\right)(a-c) > 0 & \text{当 } g_{33} = g_{33}^{(m)}, \quad \theta = 0, \pi \\ (U_{\max})_{\min} = \left(1 - \frac{c}{b}\right)(b-c) > 0 & \text{当 } g_{33} = g_{33}^{(m)}, \quad \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ -4c & \text{当 } g_{33} = -1 \end{cases} \quad (2.4)$$

此外, 由(4.5)^[1]可得

$$\frac{\partial U}{\partial g_{33}} \begin{cases} > 0 & \text{当 } -1 \leq g_{33} < g_{33}^{(m)} \\ = 0 & \text{当 } g_{33} = g_{33}^{(m)} \\ < 0 & \text{当 } g_{33}^{(m)} < g_{33} \leq +1 \end{cases} \quad (2.5)$$

因此, 如沿任一 θ 方向将球面 K 切开, 则得 U 沿 g_{33} 的变化情况如图4所示.

应注意, 图3与图4均是球面 K 的展开图, 其中 $g_{33} = -1$ 实质上是一个点, 如将球面 K 比作地球, 那么 $g_{33} = +1$ 相当其北极, $g_{33} = -1$ 相当其南极.

根据图3与图4所示的情况, 并注意到(1.1), (3.22)^[1], (3.23)^[1]及(1.5)诸式所表示的性质, 然后利用[1]中定理1的同样证明方法, 可得

定理1 如 $a > b > c > 0$, 则:

(1) 如初始扰动能量 $V_0 \leq (U_{\max})_{\min} = \left(1 - \frac{c}{b}\right)(b-c)$ 时, 如 $(g_{33}^{(0)}, \theta^{(0)}) \in \Gamma$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 充液腔体的受扰运动将渐近趋于 r_+^* , 如 $(g_{33}^{(0)}, \theta^{(0)}) \notin \Gamma$, 充液腔体的受扰运动将渐近趋于 r_0^- ;

(2) 如初始扰动能量 $V_0 > (U_{\max})_{\min} = \left(1 - \frac{c}{b}\right)(b-c)$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 充液腔体的受

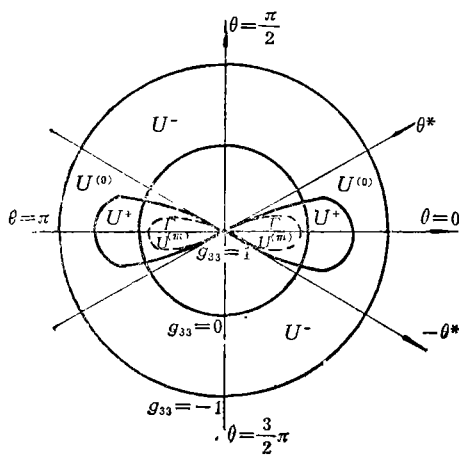


图 5

扰运动或者渐近趋于 r_+^* , 或者渐近趋于 r_0^- .

据此定理可知, 此时 r_+^* 与 r_0^- 均相当于一稳定结点.

2. $a > c > b > 0$

此时 U 在 $g_{33} = +1$ 邻域内为变号函数, 其零值曲线 $U^{(0)}$ 由(1.2)确定. 令

$$\cos^2 \theta = \frac{c-b}{a-b} \tag{2.6}$$

由于假定 $a > c > b > 0$, 故 $0 < \frac{c-b}{a-b} < 1$, 因而满足上式之解 θ^* 是存在的. 事实上它共有4个值, 即 $\pm \theta^*$ 与 $\pi \pm \theta^*$. 由(1.2)不难算出

$$\left. \begin{aligned} -1 < g_{33}^{(0)} < 1 & \quad \text{当 } -\theta^* < \theta < \theta^*, \pi - \theta^* < \theta < \pi + \theta^* \\ g_{33}^{(0)} = 1 & \quad \text{当 } \theta = \pm \theta^*, \theta = \pi \pm \theta^* \\ g_{33}^{(0)} > 1 & \quad \text{当 } \theta^* < \theta < \pi - \theta^*, \pi + \theta^* < \theta < 2\pi - \theta^* \end{aligned} \right\} \tag{2.7}$$

由于 g_{33} 不可能大于1, 故 U 的零值曲线 $U^{(0)}$ 只有在二角域 $-\theta^* \leq \theta \leq \theta^*$ 与 $\pi - \theta^* \leq \theta \leq \pi + \theta^*$ 内有实分支. 此二分支对 $\theta = 0$ 与 $\theta = \pi$ 轴对称, 并在 $\theta = 0, \pi$ 时 $g_{33}^{(0)}$ 达到极值, 其值为

$$g_{33}^{(0)} = 2 \left(\frac{c}{a}\right) - 1 \tag{2.8}$$

$U^{(0)}$ 曲线在图5中绘出. 在图5中, U^+ 代表 $U > 0$ 之区域, U^- 代表 $U < 0$ 之区域.

同样, 由 U 之极值曲线方程(4.6)^[1]可得

$$\left. \begin{aligned} 0 < g_{33}^{(m)} < 1 & \quad \text{当 } -\theta^* < \theta < \theta^*, \pi - \theta^* < \theta < \pi + \theta^* \\ g_{33}^{(m)} = 1 & \quad \text{当 } \theta = \pm \theta^*, \theta = \pi \pm \theta^* \\ g_{33}^{(m)} > 1 & \quad \text{当 } \theta^* < \theta < \pi - \theta^*, \pi + \theta^* < \theta < 2\pi - \theta^* \end{aligned} \right\} \tag{2.9}$$

据此可知, 极值曲线 $U^{(m)}$ 也只有二角域 $-\theta^* \leq \theta \leq \theta^*$ 与 $\pi - \theta^* \leq \theta \leq \pi + \theta^*$ 内有实分支. 它也对 $\theta = 0, \theta = \pi$ 轴对称, 并在 $\theta = 0, \pi$ 时达到极值, 其值为

$$g_{33}^{(m)} = \frac{c}{a} \tag{2.10}$$

由于在角域 $-\theta^* \leq \theta \leq \theta^*$ 与 $\pi - \theta^* \leq \theta \leq \pi + \theta^*$ 内有

$$0 \leq \frac{c}{(a-b)\cos^2\theta + b} \leq 1 \tag{2.11}$$

由此可得

$$\frac{c}{(a-b)\cos^2\theta + b} \geq 2 \frac{c}{(a-b)\cos^2\theta + b} - 1 \tag{2.12}$$

亦即

$$g_{33}^{(m)} \geq g_{33}^{(0)} \tag{2.13}$$

故极值曲线 $U^{(m)}$ 必位于域 U^+ 之内，正如图 5 所示那样。

由 (4.5) 容易算出

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial g_{33}} &< 0 && \text{在 } \Gamma \text{ 域内} \\ &= 0 && \text{在 } U^{(m)} \text{ 上} \\ &> 0 && \text{在 } \Gamma \text{ 域外} \end{aligned} \right\} \tag{2.14}$$

因此，如在二角域 $-\theta^* < \theta < \theta^*$ 与 $\theta^* < \theta < \pi - \theta^*$ 内任一 θ 方向，例如沿 $\theta = 0, \pi$ 与 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ 将球面 K 切开，则得 U 之变化情况如图 6 与图 7 所示。

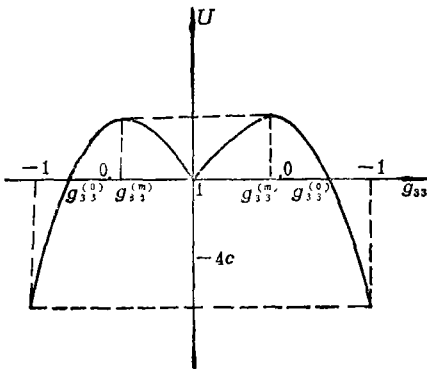


图 6

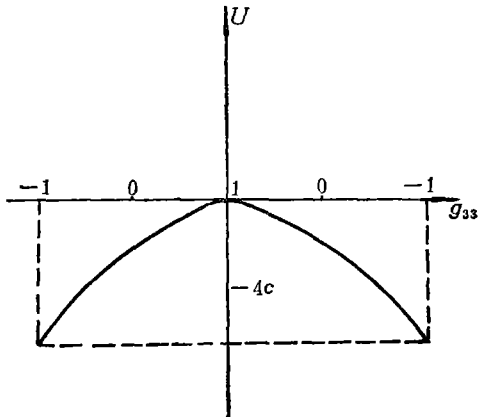


图 7

据此，并利用与证明定理 1 同样的方法，可得

定理 2 如 $a > c > b > 0$ ，则：

(1) 如初始扰动能量 $V_0 \leq 0$ ，则当 $t \rightarrow \infty$ 时充液腔体的受扰运动将渐近趋于 r_0^- ；

(2) 如初始扰动能量 $V_0 > 0$ ，则当 $t \rightarrow \infty$ 时充液腔体的受扰运动或者进入 Γ 域内并在此域内渐近趋于 r_0^+ ，或者离开 Γ 域而渐近趋于 r_0^- 。

据此定理可知，此时 r_0^+ 相当于鞍点， r_0^- 相当于稳定结点。

3. $c > a > b > 0$

此时，图 5 中的 U^+ 域消失， U 除在 $g_{33} = +1$ 处等于零外，其余均为负值。又在整个球面上均有 $\frac{\partial U}{\partial g_{33}} > 0$ ，故沿任何 θ 方向切开球面， U 之变化情况均类似于图 7。据此得

定理 3 如 $c > a > b > 0$, 则当 $t \rightarrow \infty$ 时, 充液腔体的受扰运动均将离开 r_1^+ 而渐近趋于 r_0^- . 由此定理可知, 此时 r_1^+ 相当于不稳定结点, r_0^- 相当于稳定结点.

综上所述, 可得表 1:

表 1

条	件	r_1^+	r_0^-
	$a > b > c > 0$	稳定结点	稳定结点
	$a > c > b > 0$	鞍点	稳定结点
	$c > a > b > 0$	不稳定结点	稳定结点

三、Euler-Poinsot情况

此时液体与腔体重心 O' 与固定点 O 重合, 从而 $h=0$, 在此情况下其动力学方程为

$$\left. \begin{aligned} A \frac{dp}{dt} &= (B-C)qr \\ B \frac{dq}{dt} &= (C-A)rp \\ C \frac{dr}{dt} &= (A-B)pq \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

它共有 6 个定常解集合

$$\left. \begin{aligned} p=q=0, r=r_0, & \begin{cases} g_{33}=+1 \\ g_{33}=-1 \end{cases} \\ r=p=0, q=q_0, & \begin{cases} g_{33}=0, \theta=0 \\ g_{33}=0, \theta=\pi \end{cases} \\ q=r=0, p=p_0, & \begin{cases} g_{33}=0, \theta=\frac{\pi}{2} \\ g_{33}=0, \theta=\frac{3\pi}{2} \end{cases} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

我们分别称为 $r_1^+, r_0^-; q_1^+, q_0^-; p_1^+, p_0^-$.

注意, 由 (1.9) 知, 当 $h=0$ 时也有 $c=0$, 从而 (4.3)^[1], (4.5)^[1], (1.2), (4.6)^[1] 此时化为

$$U = (1 - g_{33}^2) [(a-b)\cos^2\theta + b] \quad (3.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial g_{33}} = -2g_{33} [(a-b)\cos^2\theta + b] \quad (3.4)$$

$$g_{33}^{(0)} = \pm 1 \quad (3.5)$$

$$g_{33}^{(m)} = 0 \quad (3.6)$$

在以下的讨论中, 我们假定

$$C > B > A \quad (3.7)$$

在此情况下, 我们有

对于 r_0^-

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{r_0^2}{2}(C-A) > 0, \\ b &= \frac{r_0^2}{2}(C-B) > 0, \\ \text{即 } a &> b > 0 \end{aligned} \right\} \text{且 } a > b \quad (3.8)$$

对于 q_0

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{q_0^2}{2}(B-C) < 0 \\ b &= \frac{q_0^2}{2}(B-A) > 0 \\ \text{即 } b &> 0 > a \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

对于 p_0

$$\left. \begin{aligned} a &= \frac{p_0^2}{2}(A-B) < 0 \\ b &= \frac{p_0^2}{2}(A-C) < 0 \\ \text{即 } 0 &> a > b \end{aligned} \right\} \text{且 } a > b \quad (3.10)$$

关于 p_0, q_0, r_0 在球面 K 上的位置, 见图 8.

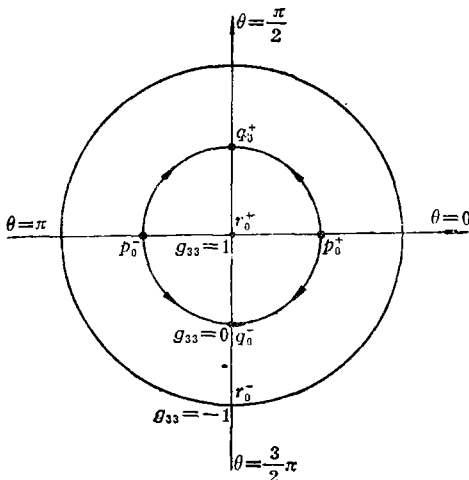


图 8

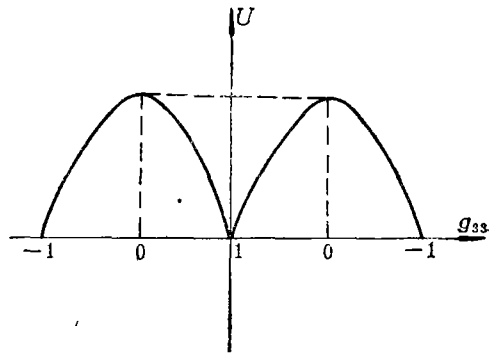


图 9

下面我们研究定常解集合 r_0 的性质, 与此同时, 定常解集合 q_0 与 p_0 的性质也一齐被得出. 上面已指出, 对于定常解集合 r_0 , 我们有 $a > b > 0$. 据此, 不难由 (3.3), (3.4) 算出:

$$U = \begin{cases} 0 & \text{当 } g_{33} = 1 \\ (U_{\max})_{\max} = a & \text{当 } g_{33} = 0, \theta = 0, \pi \\ (U_{\max})_{\min} = b & \text{当 } g_{33} = 0, \theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \\ 0 & \text{当 } g_{33} = -1 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial g_{33}} \begin{cases} < 0 & \text{当 } 0 < g_{33} \leq 1 \\ = 0 & \text{当 } g_{33} = 0 \\ > 0 & \text{当 } -1 \leq g_{33} < 0 \end{cases} \quad (3.12)$$

据此, 如沿任一 θ 方向将球面切开, 则得 U 的变化情况如图9.

据此, 并注意对 p_0^+, p_0^- 有 $U=a$ 与对 q_0^+, q_0^- 有 $U=b$, 于是得

定理 4 如 $a > b > 0$, 则:

(1) 初始扰动能量 $V_0 \leq b$ 时, 当 $(g_{33}^{(0)}, \theta^{(0)})$ 位于上半球面, 充液腔体的受扰运动当 $t \rightarrow \infty$ 时将渐近趋于 r_0^+ , 当 $(g_{33}^{(0)}, \theta^{(0)})$ 位于下半球面, 充液腔体的受扰运动将渐近趋于 r_0^- ;

(2) 初始扰动能量 $b < V_0 \leq a$, 充液腔体的受扰运动或者渐近趋于 r_0^+ , 或者渐近趋于 r_0^- , 或者沿赤道 $g_{33} = 0$ 离开 p_0^+, p_0^- 而渐近趋于 q_0^+ 或 q_0^- ;

(3) 初始扰动能量 $V_0 > a$, 充液腔体的受扰运动或者渐近趋于 r_0^+ , 或者渐近趋于 r_0^- , 或者落于赤道 $g_{33} = 0$ 上并沿赤道离开 p_0^+, p_0^- 而渐近趋于 q_0^+, q_0^- .

据此定理可知, 此时 r_0^+, r_0^- 相当于稳定结点, q_0^+, q_0^- 相当于鞍点, p_0^+, p_0^- 相当于不稳定结点.

据此, 并由(3.8), (3.9), (3.10)可得表2:

表 2

条 件	对 应 定 常 解	类 型
$a > b > 0$	r_0^+, r_0^-	稳定结点
$b > 0 > a$	q_0^+, q_0^-	鞍 点
$0 > a > b$	p_0^+, p_0^-	不稳定结点

本文得到秦元勋老师的鼓励与关怀, 谨致谢意!

参 考 文 献

[1] 李骝, 旋转充液腔体的有限扰动稳定问题, 应用数学和力学, 4.5(1983).
 [2] Leimanis, E. and N. Minorsky, *Dynamics and Nonlinear Mechanics*, John Wiley and Sons, Inc. (1958).

**On the Global Stability of Rotational Motion and the Qualitative
Analysis of the Behaviour of Disturbed Motion of a Rigid
Body Having a Liquid-Filled Cavity**

Li Li

(Tianjin University, Tianjin)

Abstract

This paper is a continuation of [1]. In this paper we investigate the distribution of steady motion of the liquid-filled cavity body, decide the stability of each steady motion and find out the corresponding region of stability and instability. Besides, the behaviour of disturbed motion is analysed qualitatively.