应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

空间机构的向量分析——Ⅳ
空间机构动力学

余　燊

（华南工学院，1982年6月18日收到）

摘　要

本文用建立向量方程方法解决前述四种空间机构动力学的一般性问题．由于变换不同运动副的参考系，所以求解过程与位移矩阵完全无关．

一、应　用　公　式

一旦确定所给机构的位形和速度旋量，给出机构各杆件的惯性张量，则此机构的动力学问题就相对容易了．本文的问题是：对于所给的运动状态和给定的输出力旋量，求解输入的力旋量和两连接杆节点的反力旋量．

下面，我们仅讨论空间四杆机构．在原理上，运用相同的求解方法虽能求解五杆、六杆和七杆机构，但杆件数目越多，求解就越困难．尤其是七杆机构，目前仍是研究的课题．

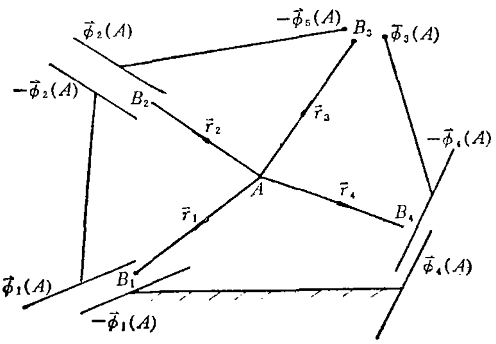

图　1

首先，用 $(\vec{\phi}_i, -\vec{\phi}_i)$ 表示第 i 个运动副上的反力旋量，这些反力旋量在运动副的假设的共点上构成零力旋量．图1中以 B_i 表示的"共点"为假设的点，各"共点"都视为两连接杆的重合点，但不一定是两杆件的接触点．因而，力旋量所作用的端点可看作为"共点"．然后把所有的"共点"都汇交于共基点 A，对各杆件应用动量平衡原理得

$$\vec{\phi}_1(A)-\vec{\phi}_2(A)=\vec{\mu}_1(A) \tag{1.1}$$

$$\vec{\phi}_2(A)-\vec{\phi}_3(A)=\vec{\mu}_2(A) \tag{1.2}$$

$$\vec{\phi}_3(A)-\vec{\phi}_4(A)=\vec{\mu}_3(A) \tag{1.3}$$

$$\vec{\phi}_4(A)-\vec{\phi}_1(A)=0 \tag{1.4}$$

式中 $\vec{\mu}_i$ 表示第 i 个刚体的动量旋量．在上述公式中，取杆4为固定杆．则方程组等价于矩阵方程式（(1.3) 式中以 $\vec{\phi}_1$ 代 $\vec{\phi}_4$）．由于在L．H．S．3×3 矩阵中，其行列式为零，因

此

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\phi}_1 \\ \vec{\phi}_2 \\ \vec{\phi}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\vec{\mu}}_1 \\ \dot{\vec{\mu}}_2 \\ \dot{\vec{\mu}}_3 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

方程没有唯一的解．因而要求解(1.1)～(1.4)式，需要有附加的关系式，这些附加关系式就是加在运动副上的力旋量的约束方程式．但约束方程是要随运动副的类型不同而改变．因而，只是在特殊的情况下，才能求解出作用力．下面，我们将分别研究R-G-G-R，R-G-C-H，P-P-G-C 和 H-R-G-R机构．

二、R-G-G-R 机 构

图 2 所示为机构简图．图中 $\vec{\alpha}$ 是沿回转副轴线的单位向量．$\vec{\beta}$是沿输出回转副轴线的单位向量．

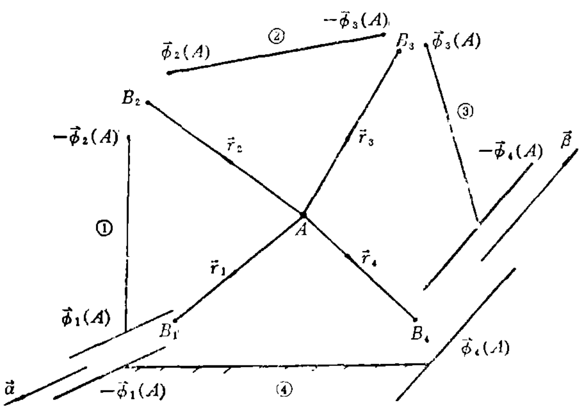

图 2

令 $\vec{r}_i = \overline{AB_i}$ (2.1)

及 $\vec{\phi}_i(A) \Leftrightarrow [\vec{R}_i,\ \vec{\Gamma}_i + \vec{r}_i \wedge \vec{R}_i]$ (2.2)

式中$[\vec{R}_i,\ \vec{\Gamma}_i]$是与$B$有关的力旋量．

又 $\vec{\mu}_i(A) \Leftrightarrow [\vec{L}_i,\ \vec{A}_i]$ (2.3)

式中第 i 个刚体的线动量 $\vec{L}_i$ 和转动动量 $\vec{A}_i$都与A有关．

由方程组(1.1)～(1.4)得

(A) 动态平衡方程

$$\vec{R}_1 - \vec{R}_2 = \vec{L}_1 \tag{2.4}$$

$$\vec{\Gamma}_1 + \vec{r}_1 \wedge \vec{R}_1 - \vec{\Gamma}_2 - \vec{r}_2 \wedge \vec{R}_2 = \vec{A}_1 \tag{2.5}$$

$$\vec{R}_2 - \vec{R}_3 = \vec{L}_2 \tag{2.6}$$

$$\vec{\Gamma}_2 + \vec{r}_2 \wedge \vec{R}_2 - \vec{\Gamma}_3 - \vec{r}_3 \wedge \vec{R}_3 = \vec{A}_2 \tag{2.7}$$

$$\vec{R}_3 - \vec{R}_4 = \vec{L}_3 \tag{2.8}$$

$$\vec{\Gamma}_3 + \vec{r}_3 \wedge \vec{R}_3 - \vec{\Gamma}_4 - \vec{r}_4 \wedge \vec{R}_4 = \vec{A}_3 \tag{2.9}$$

$$\vec{R}_4 - \vec{R}_1 = 0 \tag{2.10}$$

$$\vec{\Gamma}_4 + \vec{r}_4 \wedge \vec{R}_4 - \vec{\Gamma}_1 - \vec{r}_1 \wedge \vec{R}_1 = 0 \tag{2.11}$$

由于球面副G不受力偶作用，当给出输出力矩（负载）时，有

(B) 约束方程：

$$\vec{\Gamma}_2 = 0 \tag{2.12}$$

$$\vec{\Gamma}_3 = 0 \tag{2.13}$$

及

$$\vec{\Gamma}_4 \cdot \vec{\beta} = G \tag{2.14}$$

现在的问题在于从上面的方程中确定$[\vec{R}_i,\ \vec{\Gamma}_i]$．

(C) 结果

现由 (2.6) 得

$$\vec{R}_3 = \vec{R}_2 - \vec{L}_2$$

将(2.15)式代入(2.7)式，注意到(2.12)和(2.13)式得

$$-\vec{a}\wedge\vec{R}_2=\vec{A}_2-\vec{r}_3\wedge\vec{L}_2 \tag{2.16}$$

式中
$$-\vec{a}=\vec{r}_2-\vec{r}_3 \tag{2.17}$$

因而，$\vec{a}\wedge(2.16)$得

$$\vec{R}_2=\vec{P}+x\vec{a} \tag{2.18}$$

式中
$$\vec{P}=\frac{\vec{a}\wedge(\vec{A}_2-\vec{r}_2\wedge\vec{L}_2)}{a^2} \tag{2.19}$$

x是待求的未知标量.

由(2.15)，(2.8)式分别得

$$\vec{R}_3=\vec{P}+x\vec{a}-\vec{L}_2 \tag{2.20}$$

$$\vec{R}_4=\vec{P}+x\vec{a}-(\vec{L}_2+\vec{L}_3) \tag{2.21}$$

然后，将结果代入(2.9)式得出

$$\vec{b}\wedge(\vec{P}-\vec{L}_2)+x\vec{b}\wedge\vec{a}+\vec{r}_4\wedge\vec{L}_3-\vec{\Gamma}_4=\vec{A}_3 \tag{2.22}$$

式中利用了(2.13)式，而且

$$\vec{b}=\vec{r}_3-\vec{r}_4 \tag{2.23}$$

因此，$\vec{\beta}\cdot(2.22)$有

$$x=\frac{G+\vec{\beta}\cdot[\vec{A}_3-\vec{r}_4\wedge\vec{L}_3-\vec{b}\wedge(\vec{P}-\vec{L}_2)]}{\vec{\beta}\cdot\vec{b}\wedge\vec{a}} \tag{2.24}$$

式中利用了(2.14)式.

如果(2.24)式中$\vec{\beta}\cdot\vec{b}\wedge\vec{a}\neq 0$则$x$有解.

一旦求出x值，则可利用(2.18)，(2.20)和(2.10)式分别求出$\vec{R}_2$、$\vec{R}_3$，$\vec{R}_4$从而进一步求得$\vec{R}_1$。然后从(2.5)式及(2.11)式中求解$\vec{\Gamma}_1$和$\vec{\Gamma}_4$。所求的输入力矩为

$$F=\vec{\Gamma}_1\cdot\vec{\alpha} \tag{2.25}$$

三、R-G-C-H机 构

图3所示为R-G-C-H机构，图中$\vec{\alpha}_1$，$\vec{\alpha}_2$和$\vec{\beta}$分别为沿输入回转副(R)，输出螺旋副(H)和圆柱副(C)轴线方向的单位向量．则有

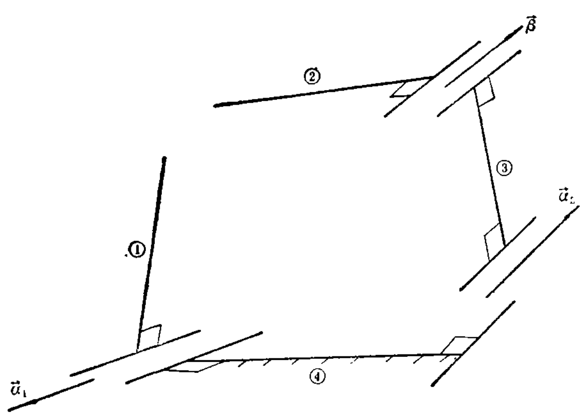

图 3

(A) 动态平衡方程

$$\vec{R}_1-\vec{R}_2=\vec{L}_1 \tag{3.1}$$

$$\vec{\Gamma}_1+\vec{r}_1\wedge\vec{R}_1-\vec{\Gamma}_2-\vec{r}_2\wedge\vec{R}_2=\vec{A}_1 \tag{3.2}$$

$$\vec{R}_2-\vec{R}_3=\vec{L}_2 \tag{3.3}$$

$$\vec{\Gamma}_2+\vec{r}_2\wedge\vec{R}_2-\vec{\Gamma}_3-\vec{r}_3\wedge\vec{R}_3=\vec{A}_2 \tag{3.4}$$

$$\vec{R}_3-\vec{R}_4=\vec{L}_3 \tag{3.5}$$

$$\vec{\Gamma}_3+\vec{r}_3\wedge\vec{R}_3-\vec{\Gamma}_4-\vec{r}_4\wedge\vec{R}_4=\vec{A}_3 \tag{3.6}$$

$$\vec{R}_4-\vec{R}_1=0 \tag{3.7}$$

$$\vec{\Gamma}_4+\vec{r}_4\wedge\vec{R}_4-\vec{\Gamma}_1-\vec{r}_1\wedge\vec{R}_1=0 \tag{3.8}$$

(B) 约束方程

$$\vec{\Gamma}_2=0 \tag{3.9}$$

$$\vec{R}_3\cdot\vec{\beta}=0 \tag{3.10}$$

$$\vec{\Gamma}_3\cdot\vec{\beta}=0 \tag{3.11}$$

$$\vec{\Gamma}_4\cdot\vec{\alpha}=G \tag{3.12}$$

式中G是给定的输出力矩．

(C) 结果

首先，将(3.3)式代入(3.4)式并考虑到 (3.9) 式得

$$\vec{r}_2\wedge\vec{L}_2+\vec{a}\wedge\vec{R}_3-\vec{\Gamma}_3=\vec{A}_2 \tag{3.13}$$

式中 $$\vec{a}=\vec{r}_2-\vec{r}_3 \tag{3.14}$$

鉴于(3.10)和(3.11)式，由$\vec{\beta}\wedge\vec{\beta}[\wedge(3.13)]$得

$$\vec{\beta}\wedge[\vec{\beta}\wedge(\vec{r}_2\wedge\vec{L}_2)]-(\vec{\beta}\cdot\vec{a})\vec{\beta}\wedge\vec{R}_3+\vec{\Gamma}_3=\vec{\beta}\wedge(\vec{\beta}\wedge\vec{A}_2) \tag{3.15}$$

而由((3.13)+(3.15))得

$$\vec{b}\wedge\vec{R}_3=\vec{Q} \tag{3.16}$$

式中 $$\vec{b}=\vec{a}\ (\vec{I}-\vec{\beta}\vec{\beta}) \tag{3.17}$$

及 $$\vec{Q}=(\vec{\beta}\vec{\beta})\cdot(\vec{A}_2-\vec{r}_2\wedge\vec{L}_2) \tag{3.18}$$

∴ 由 $\vec{b}\wedge(3.16)$ 得

$$\vec{R}_3=\frac{\vec{Q}\wedge\vec{b}}{b^2}+x\vec{b} \tag{3.19}$$

式中，x是待求的标量．

然后，将(3.5)式代入(3.6)式得

$$\vec{\Gamma}_3+\vec{r}_3\wedge\vec{R}_3-\vec{\Gamma}_4-\vec{r}_4\wedge(\vec{R}_3-\vec{L}_3)=\vec{A}_3 \tag{3.20}$$

因而，由((3.13)+(3.20))有

$$\vec{c}\wedge\vec{R}_3-\vec{\Gamma}_4=\vec{A}_3+\vec{A}_2-\vec{r}_2\wedge\vec{L}_2-\vec{r}_4\wedge\vec{L}_3 \tag{3.21}$$

式中 $$\vec{c}=\vec{r}_2-\vec{r}_4 \tag{3.22}$$

再将(3.19)式代入(3.21)式得

$$\frac{\vec{c}\wedge(\vec{Q}\wedge\vec{b})}{b^2}+x\vec{c}\wedge\vec{b}-\vec{\Gamma}_4=\vec{A}_2+\vec{A}_3-\vec{r}_2\wedge\vec{L}_2-\vec{r}_4\wedge\vec{L}_3 \tag{3.23}$$

考虑(3.12)式，$b^2(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{b}\wedge\vec{c})\neq 0$

则由$\vec{\alpha}\cdot(3.23)$，得

$$x=\frac{b^2[\vec{\alpha}_2(\vec{r}_2\wedge\vec{L}_2+\vec{r}_4\wedge\vec{L}_3-\vec{A}_2-\vec{A}_3)-G]+[\vec{\alpha}_2\cdot(\vec{b}\wedge\vec{Q})\wedge\vec{c}]}{b^2(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{b}\wedge\vec{c})} \tag{3.24}$$

则由(3.19)和(3.24)式可完全解出$\vec{R}_3$，其余参数可通过顺序代入而求得．

四、P-P-G-C机 构

图 4 所示为P-P-G-C机构．图中$\vec{\alpha}$，$\vec{\gamma}$和$\vec{\beta}$ 分别为沿输入移动副(P)，移动副 (P) 和输出圆柱副(C)轴线的单位向量．

(A) 动态平衡方程

$$\vec{R}_1-\vec{R}_2=\vec{L}_1 \tag{4.1}$$

$$\vec{\Gamma}_1+\vec{r}_1\wedge\vec{R}_1-\vec{\Gamma}_2-\vec{r}_2\wedge\vec{R}_2=\vec{A}_1 \tag{4.2}$$

$$\vec{R}_2-\vec{R}_3=\vec{L}_2 \tag{4.3}$$

$$\vec{\Gamma}_2+\vec{r}_2\wedge\vec{R}_2-\vec{\Gamma}_3-\vec{r}_3\wedge\vec{R}_3=\vec{A}_2 \tag{4.4}$$

$$\vec{R}_3-\vec{R}_4=\vec{L}_3 \tag{4.5}$$

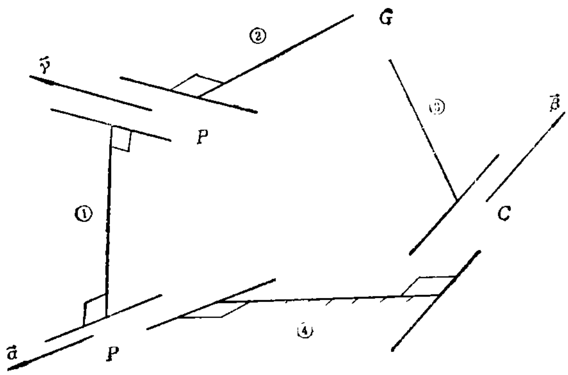

图 4

$$\vec{\Gamma}_3+\vec{r}_3\wedge\vec{R}_3-\vec{\Gamma}_4-\vec{r}_4\wedge\vec{R}_4=\vec{A}_3 \qquad (4.6)$$

$$\vec{R}_4-\vec{R}_1=0 \qquad (4.7)$$

$$\vec{\Gamma}_4+\vec{r}_4\wedge\vec{R}_4-\vec{\Gamma}_1-\vec{r}_1\wedge\vec{R}_1=0 \qquad (4.8)$$

(B) 约束方程

$$\vec{R}_2\cdot\vec{\gamma}=0 \qquad (4.9)$$

$$\vec{\Gamma}_3=0 \qquad (4.10)$$

$$\vec{R}_4\cdot\vec{\beta}=F \qquad (4.11)$$

$$\vec{\Gamma}_4\cdot\vec{\beta}=G \qquad (4.12)$$

式中 F 和 G 分别为给定的输出力和输出力矩

(C) 结果

现由(4.10)，(4.5)，(4.6)得

$$\vec{a}\wedge\vec{R}_4-\vec{\Gamma}_4=\vec{P} \qquad (4.13)$$

式中

$$\vec{a}=\vec{r}_3-\vec{r}_4 \qquad (4.14)$$

及

$$\vec{P}=\vec{A}_3-\vec{r}_3\wedge\vec{L}_3 \qquad (4.15)$$

再考虑(4.11)和(4.12)式，由 $\vec{\beta}\wedge[\vec{\beta}\wedge(4.13)]$ 得

$$F(\vec{\beta}\wedge\vec{a})-(\vec{\beta}\cdot\vec{a})\vec{\beta}\wedge\vec{R}_4-G\vec{\beta}+\vec{\Gamma}_4=(\vec{\beta}\cdot\vec{P})\vec{\beta}-\vec{P} \qquad (4.16)$$

由((4.13)+(4.16))得

$$F\vec{\beta}\wedge\vec{a}+[\vec{a}-(\vec{\beta}\cdot\vec{a})\vec{\beta}]\wedge\vec{R}_4-G\vec{\beta}=(\vec{\beta}\cdot\vec{P})\vec{\beta} \qquad (4.17)$$

$$\vec{b}\wedge\vec{R}_4=\vec{Q} \qquad (4.18)$$

式中

$$\vec{b}=\vec{\beta}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{\beta}) \qquad (4.19)$$

$$\vec{Q}=(G+\vec{\beta}\cdot\vec{P})\vec{\beta}+F\vec{a}\wedge\vec{\beta} \qquad (4.20)$$

∴　由 $\vec{b}\wedge(4.18)$ 得

$$\vec{R}_4=\frac{\vec{Q}\wedge\vec{b}}{b^2}+x\vec{b} \qquad (4.21)$$

式中 x 是待求的标量。

再由(4.13)，(4.21)得

$$\vec{\Gamma}_4=\frac{1}{b^2}[\vec{a}\wedge(\vec{Q}\wedge\vec{b})]+x\vec{a}\wedge\vec{b}-\vec{P} \qquad (4.22)$$

现由((4.1)+(4.7))得

$$\vec{R}_4-\vec{R}_2=\vec{L}_1+\vec{L}_4 \qquad (4.23)$$

∴　鉴于(4.9)式，由 $\vec{\gamma}\cdot(4.23)$ 得

$$\vec{R}_4\cdot\vec{\gamma}=\vec{\gamma}\cdot(\vec{L}_1+\vec{L}_4) \qquad (4.24)$$

因而，如果 $b^2(\vec{\gamma}\cdot\vec{b})\neq 0$ 则由((4.24)，$\vec{\gamma}\cdot(4.21)$)有

$$x=\frac{b^2\vec{\gamma}\cdot(\vec{L}_1+\vec{L}_4)+\vec{\gamma}\cdot(\vec{b}\wedge\vec{Q})}{b^2(\vec{\gamma}\cdot\vec{b})} \qquad (4.25)$$

则 $\vec{R}_4$ 和 $\vec{\Gamma}_4$ 完全可由(4.21)，(4.22)和(4.4)式求得，然后在(4.1)～(4.8)式中通过直接代入从而求得其它的 $\vec{R}$ 和 $\vec{\Gamma}$。

五、H-R-G-R 机 构

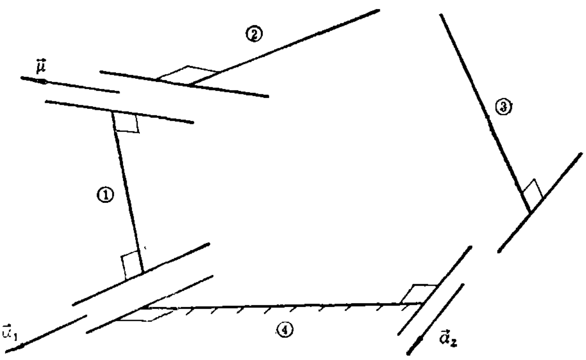

图 5

(A) 动力平衡方程

$$\vec{R}_1-\vec{R}_2=\vec{L}_1 \tag{5.1}$$

$$\vec{\Gamma}_1+\vec{r}_1\wedge\vec{R}_1-\vec{\Gamma}_2-\vec{r}_2\wedge\vec{R}_2=\vec{A}_1 \tag{5.2}$$

$$\vec{R}_2-\vec{R}_3=\vec{L}_2 \tag{5.3}$$

$$\vec{\Gamma}_2+\vec{r}_2\wedge\vec{R}_2-\vec{\Gamma}_3-\vec{r}_3\wedge\vec{R}_3=\vec{A}_2 \tag{5.4}$$

$$\vec{R}_3-\vec{R}_4=\vec{L}_3 \tag{5.5}$$

$$\vec{\Gamma}_3+\vec{r}_3\wedge\vec{R}_3-\vec{\Gamma}_4-\vec{r}_4\wedge\vec{R}_4=\vec{A}_3 \tag{5.6}$$

$$\vec{R}_4-\vec{R}_1=0 \tag{5.7}$$

$$\vec{\Gamma}_4+\vec{r}_4\wedge\vec{R}_4-\vec{\Gamma}_1-\vec{r}_1\wedge\vec{R}_1=0 \tag{5.8}$$

由于球面副 G 不受力偶作用而回转副不受轴向力矩作用，所以有

(B) 约束方程

$$\vec{\Gamma}_3=0 \tag{5.9}$$

$$\vec{\Gamma}_4\cdot\vec{a}_2=G \tag{5.10}$$

$$\vec{\Gamma}_2\cdot\vec{\mu}=0 \tag{5.11}$$

(5.10)所给出的输出力矩假设为 G.

(C) 结果

由(5.3)式代入(5.4)式后再代入(5.9)式得

$$\vec{\Gamma}_2+\vec{a}\wedge\vec{R}_3+\vec{r}_2\wedge\vec{L}_2=\vec{A}_2 \tag{5.12}$$

式中 $\vec{a}=\vec{r}_2-\vec{r}_3$

因而由 $\vec{\mu}\wedge[\vec{\mu}\wedge(5.12)]$ 有

$$-\vec{\Gamma}_2+\vec{\mu}\wedge[\vec{\mu}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{R})]=\vec{\mu}\wedge[\vec{\mu}\wedge(\vec{A}_2-\vec{r}_2\wedge\vec{L}_2)] \tag{5.13}$$

式中利用了(5.11)式.

∴ 由((5.12)+(5.13))得

$$\vec{a}\wedge\vec{R}_3+\vec{r}_2\wedge\vec{L}_2+\vec{\mu}\wedge[\vec{\mu}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{R}_3)]=\vec{A}_2+\vec{\mu}\wedge[\vec{\mu}\wedge(\vec{A}_2+\vec{r}_2\wedge\vec{L}_2)] \tag{5.14}$$

$$\vec{b}\wedge\vec{R}_3+(\vec{\mu}\cdot\vec{R}_3)\vec{\mu}\wedge\vec{a}=\vec{x} \tag{5.15}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&\vec{x}=\vec{A}_2+\vec{\mu}\wedge[\vec{\mu}\wedge(\vec{A}_2-\vec{r}_2\wedge\vec{L}_2)]-\vec{r}_2\wedge\vec{L}_2\\&\vec{b}=\vec{a}-(\vec{\mu}\cdot\vec{a})\vec{\mu}=\vec{\mu}\wedge(\vec{a}\wedge\vec{\mu})\end{aligned}\right\} \tag{5.16}$$

由 $\vec{b}\cdot$(5.15)，解出 $(\vec{\mu}\cdot\vec{R}_3)$:

$$(\vec{\mu}\cdot\vec{R}_3)=\frac{\vec{b}\cdot\vec{x}}{\vec{\mu}\cdot\vec{a}\wedge\vec{b}} \tag{5.17}$$

且(5.15)式成为:

$$\vec{b}\wedge\vec{R}_3=\vec{y} \tag{5.18}$$

式中

$$\vec{y}=\vec{x}-\left(\frac{\vec{b}\cdot\vec{x}}{\vec{\mu}\cdot\vec{a}\wedge\vec{b}}\right)\vec{a} \tag{5.19}$$

类似地，由(5.5)式代入(5.6)式得

$$\vec{c}\wedge\vec{R}_4-\vec{\Gamma}_4=\vec{A}_3+\vec{r}_4\wedge\vec{L}_3 \tag{5.20}$$

式中
$$\vec{c}=\vec{r}_3-\vec{r}_4 \tag{5.21}$$

因而，由$\vec{\alpha}_2\wedge[\vec{\alpha}_2\wedge(5.20)]$得

$$\vec{\alpha}_2\wedge[\vec{\alpha}_2\wedge(\vec{c}\wedge\vec{R}_3)]-G\vec{\alpha}_2+\vec{\Gamma}_4=\vec{\alpha}_2\wedge[\vec{\alpha}_2\wedge(\vec{A}_3+\vec{r}_4\wedge\vec{L}_3)] \tag{5.22}$$

式中利用了(5.10)式.

∴ [(5.20)+(5.22)]得

$$\vec{l}\wedge\vec{R}_3+(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{R}_3)\vec{\alpha}_2\wedge\vec{c}=\vec{v} \tag{5.23}$$

式中
$$\left.\begin{aligned}\vec{v}&=\vec{\alpha}_2\wedge[\vec{\alpha}_2\wedge(\vec{A}_3+\vec{r}_4\wedge\vec{L}_3)]+G\vec{\alpha}_2+\vec{A}_3+\vec{r}_4\wedge\vec{L}_3\\ \vec{l}&=\vec{\alpha}_2\wedge(\vec{c}\wedge\vec{\alpha}_2)\end{aligned}\right\} \tag{5.24}$$

因而，由$\vec{l}\cdot(5.23)$得

$$(\vec{\alpha}_2\cdot\vec{R}_3)=\frac{\vec{l}\vec{v}}{\vec{\alpha}_2\cdot\vec{c}\wedge\vec{l}} \tag{5.25}$$

且(5.23)式成为

$$\vec{l}\wedge\vec{R}_3=\vec{z} \tag{5.26}$$

式中
$$\vec{z}=\vec{v}-\left(\frac{\vec{l}\cdot\vec{v}}{\vec{\alpha}_2\cdot\vec{c}\wedge\vec{l}}\right)\vec{\alpha}_2\wedge\vec{c} \tag{5.27}$$

由(5.18)和(5.26)我们就可解出$\vec{R}_3$.

由$\vec{b}\wedge(5.18)$得

$$(\vec{b}\cdot\vec{R}_3)\vec{b}-b^2\vec{R}_3=\vec{b}\wedge\vec{y} \tag{5.28}$$

由 $\vec{l}\wedge(5.26)$ 得

$$(\vec{l}\cdot\vec{R}_3)\vec{l}-l^2\vec{R}_3=\vec{l}\wedge\vec{z} \tag{5.29}$$

因而，若能解出$(\vec{l}\cdot\vec{R}_3)$或$(\vec{b}\cdot\vec{R}_3)$，则$\vec{R}_3$就可解出.

现由[$\vec{l}\cdot(5.28)$，$\vec{b}\cdot(5.29)$]得

$$(\vec{b}\cdot\vec{R}_3)(\vec{l}\cdot\vec{b})-b^2(\vec{l}\cdot\vec{R}_3)=\vec{l}\wedge\vec{b}\cdot\vec{y} \tag{5.30}$$

$$(\vec{l}\cdot\vec{R}_3)(\vec{l}\cdot\vec{b})-l^2(\vec{b}\cdot\vec{R}_3)=\vec{b}\wedge\vec{l}\cdot\vec{z} \tag{5.31}$$

则$(\vec{b}\cdot\vec{R}_3)$，$(\vec{l}\cdot\vec{R}_3)$可由(5.30)和(5.31)式解出. 即

$$\vec{b}\cdot\vec{R}_3=\frac{\vec{l}\wedge\vec{b}\cdot[b^2\vec{z}-(\vec{b}\cdot\vec{l})\vec{y}]}{(\vec{b}\wedge\vec{l})^2} \tag{5.32}$$

将(5.32)式代入(5.28)，可求出$\vec{R}_3$. 一俟$\vec{R}_3$求出之后，其余待求的未知数可用代入法从方程组(5.1)～(5.8)中求出.

六、结　论

从上面例子中我们可以看到，求解过程的复杂程度完全取决于约束方程. 我们已对逐步增加复杂性的问题进行了讨论. 可以推测，沿机构封闭环确定的约束方程的数目越少，问题就越复杂. 求解的关键是以动态平衡方程式中（利用一些约束方程）求出一个或多个形式为$\vec{a}\wedge\vec{R}=\vec{Q}$的向量方程式. 式中$\vec{R}$是未知数，而$\vec{R}$值可借助另外的约束方程求得.

现在，我们更清楚地看到，利用向量法分析空间机构，除清楚、简便之外，还意味着在不改变任何符号的情况下，直接应用古典力学中最常用的运动学和动力学公式. 反之，对于其它的数学方法，在动力学问题被解决之前，需要对古典力学公式作一番新的阐述.

参 考 文 献

[1] Yang, A. T., Inertia force analysis of spatial mechanisms, *J. Eng. for Ind., Trans ASME*, Series B, **93**, 1, Feb. (1971), 27—33.

[2] Bagci, C., Dynamic force and torque analysis of mechanisms using dual vectors and 3×3 screw matrix, *J. Eng. for Ind., Trans ASME*, **94**, May(1972), 738—745.

Vector Analysis of Spatial Mechanisms——(Ⅳ) Dynamics of Spatial Mechanisms

Yu Xin

(South China Institute of Technology, Guangzhou)

Abstract

The standard dynamical problems of the previous four spatial mechanisms are here solved by the method of vector equations. The procedure is completely independent of the transfer matrices due to the changes of reference frame from one connecting pair to the next.