应用数学和力学，第4卷第6期（1983年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

关于非线性过程最优控制的存在性问题*

彭实戈　陈祖浩

（山东大学，1982年10月22日收到）

摘　要

本文讨论了形为 $\dot{x}=f(t,x,u)$ 的系统的最优控制的存在性问题，$f(t,x,u)$ 是比较一般的非线性函数，控制类普遍到足以包含一般工程上常见的控制函数．还讨论了由属于一定函数类的控制函数序列去逼近最优控制的问题，举出了与文［1］结论相矛盾的反例，并导出这问题的正确结论．

一、引　　言

本文讨论了由常微分方程：

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u) \qquad t\in \mathbf{R}^1,\ x\in \mathbf{R}^n,\ u\in \mathbf{R}^m$$

所描述的系统在控制受限情况下最优控制的存在性定理，文献［1］、［2］给出了此问题的一些很好的结果，但这些结果都有一定的局限性．例如当允许控制函数类为可测函数时，$f(t,x,u)$ 关于 u 必须是线性的，而当 $f(t,x,u)$ 是一般的非线性函数时，允许控制函数类又要满足Lipschitz条件．这样，对于 $f(t,x,u)$ 关于 u 非线性，同时最优控制又是Bang-Bang控制的这样一类普通的最优控制问题，也不能由以上的结果来处理．本文讨论了 $f(t,x,u)$ 为比较一般的非线性函数，而控制类又普遍到足以包含一般工程上常见的控制函数的情况．

我们还讨论了由属于一定函数类的函数去逼近最优控制的问题．在这一问题上，文献［1］所得出的结论是错误的，本文举出了与此结论相矛盾的反例，并且证明了：选取适当的允许控制函数类，则可以得到这问题的正确结论．

二、问题的叙述及存在性定理

设受控系统由常微分方程：

$$\frac{dx}{dt}=f(t,x,u) \tag{2.1}$$

来描述，其中 $x\in \mathbf{R}^n$ 是状态变量，$u\in \mathbf{R}^m$ 是对系统的控制，$f(t,x,u)$ 及 $\frac{\partial f}{\partial x}(t,x,u)$ 都是 $I\times \mathbf{R}^n$

* 秦元勋推荐．

$\times\Omega$ 上的连续函数，其中 $I=[\tau_0,\tau_1]$ 是 t 轴上长度有限但不为零的闭区间，Ω 是 $\mathbf{R}^m$ 中的非空列紧集.

定义1. 取值于 Ω 的可测函数 $u(t)$，$t_0\leqslant t\leqslant t_1$ $(\tau_0\leqslant t_0\leqslant t_1\leqslant\tau_1)$，若其相应的状态变量 $x(t)$，$t_0\leqslant t\leqslant t_1$，满足：$x(t_0)=x_0$，$x(t_1)\in G(t_1)$，则称为允许控制. 上面的 $x_0\in\mathbf{R}^n$ 是一给定的初始点，$G(t)$，$\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1$，是 $\mathbf{R}^n$ 空间中运动着的目标集合，$\forall t\in[\tau_0,\tau_1]$，$G(t)$ 都是 $\mathbf{R}^n$ 空间中的非空列紧集，并且在集合的 Hausdorff 空间的意义下，$G(t)$ 关于 t 是连续的. 全体允许控制构成的函数类称为允许控制类，记为 $\varDelta$.

注. 两自列紧集合 X, Y 的 Hausdorff 距离 $d=d(X,Y)$, 是那种使 Y 包含于 X 的 d-邻域中, 同时 Y 又包含于 X 的 d-邻域中的实数 d 中最小的实数.

与允许控制 $u(t)$ 相应的 $x(t)$ 称为允许轨线，(u,x) 称为允许对. 对于 $u(t)\in\varDelta$ 及相应的允许轨线 $x(t)$，引入价值泛函：

$$C[u]\triangleq\int_{t_0}^{t} f^0(t,x(t),u(t))\,dt \tag{2.2}$$

其中 f^0：$I\times\mathbf{R}^n\times\Omega\to\mathbf{R}^1$ 是实连续函数.

定义2. 设 $\varDelta'$ 是 $\varDelta$ 中的一个子类，若存在 $u^*\in\varDelta'$，使

$$C[u^*]=\inf_{u\in\varDelta'} C[u] \tag{2.3}$$

则称 u^* 是 $\varDelta'$ 中的最优控制，相应的轨线 x^* 称为最优轨线，(u^*,x^*) 称为最优对.

利用定义：

$$\bar{u}(t)\triangleq\begin{cases}u(t_0), & \tau_0\leqslant t\leqslant t_0\\ u(t), & t_0\leqslant t\leqslant t_1\\ u(t_1), & t_1\leqslant t\leqslant\tau_1\end{cases} \tag{2.4}$$

可以将 $u(t)$ 的定义区间扩张到 $[\tau_0,\ \tau_1]$ 上，相应的轨线 $x(t)$（在一定条件下）也可以在控制 $\bar{u}(t)$ 下延展到区间 $[\tau_0,\tau_1]$ 上，下边在不会引起混淆的场合下，仍将 $\bar{u}(t)$ 以及相应的延展轨线记为 $u(t)$ 和 $x(t)$. 显然 $\forall u(t)\in\varDelta$ 有 $u(t)\in L_1[\tau_0,\tau_1]$ 和 $u(t)\in L_2[\tau_0,\tau_1]$，此处 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 和 $L_2[\tau_0,\tau_1]$ 的范数取为

$$\|u\|_1\triangleq\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u(t)|\,dt,\quad \|u\|_2\triangleq\left(\int_{\tau_0}^{\tau_1}|x(t)|^2\,dt\right)^{1/2} \tag{2.5}$$

此处 $\quad |u|\triangleq\sum_{j=1}^{m}|u^j|,\quad |x|\triangleq\sum_{i=1}^{n}|x^i|$

定理. 令 Z 是 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 内的列紧集合[*]，$\varDelta(Z)=\varDelta\cap Z$. 且设：

(i) $\varDelta(Z)$ 非空；

(ii) 存在正数 B，使对所有的允许对 (u,x)，$u\in\varDelta(Z)$，都有

$$|x(t)|\leqslant B,\quad \tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1 \tag{2.6}$$

则 $\varDelta(Z)$ 中存在最优控制.

证明. 由 $[\tau_0,\tau_1]$ 是有限长度的时间区间，Ω 列紧，以及 $\varDelta(Z)$ 中的允许轨线一致有界，可见 $m\triangleq\inf_{u\in\varDelta(Z)} C[u]<+\infty$. 当 $\varDelta(Z)$ 为有限集合时定理显然成立，故以下仅需证明当 $\varDelta(Z)$

[*] 本文，我们称一个集 Z 是列紧集，是指，对任一序列 $\{u^{(k)}\}\subset Z$，存在 $\{u^{(k)}\}$ 的一个子序列，仍记为 $\{u^{(k)}\}$，和 $u^*\in Z$ 使在 $L_1[\tau_0,\ \tau_1]$ 内 $u^{(k)}\to u^*$.

为无限集合的情况下定理成立即可。此时存在序列 $\{u^{(k)}(t)\}\subset\varDelta(Z)$，使

$$\lim_{k\to\infty} C[u^{(k)}]=m \tag{2.7}$$

今取 $\{u^{(k)}(t)\}$，$t_0^{(k)}\leqslant t\leqslant t_1^{(k)}$，的一子序列（仍记作 $\{u^{(k)}\}$），使

$$t_0^{(k)}\to t_0^*,\quad t_1^{(k)}\to t_1^*$$

其中 t_0^*，$t_1^*\in[\tau_0,\tau_1]$。由于 $u^{(k)}$，$t_0^{(k)}\leqslant t\leqslant t_1^{(k)}$，在$[\tau_0,\tau_1]$上的扩张属于 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中的列紧集合Z，从而存在 $\{u^{(k)}(t)\}$ 的一子列。仍记为 $\{u^{(k)}(t)\}$，及 $u^*(t)\in Z$，使

$$\lim_{k\to\infty}\|u^{(k)}(t)-u^*(t)\|_1=\lim_{k\to\infty}\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^{(k)}(t)-u^*(t)|dt=0$$

我们以下分五个步骤来证明：$u^*(t)$ $t_0^*\leqslant t\leqslant t_1^*$ 就是$\varDelta(Z)$中的最优控制。

（一）由于在 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 内 $u^{(k)}$收敛于 u^*，故$\{u^{(k)}\}$也在 $[\tau_0,\tau_1]$ 上按测度收敛于 u^*，（参见[3]，下册 p31），从而存在$\{u^{(k)}\}$的一个子列（以下仍记为 $\{u^{(k)}\}$）它在 $[\tau_0,\tau_1]$ 上几乎处处收敛于 u^*。（参见[3]，上册，p139）。又由于$u^{(k)}(t)\in\Omega$、$\forall t\in[\tau_0,\tau_1]$，$k=1,2,\cdots$，以及$\Omega$是 $\mathbf{R}^m$ 中的列紧集，从而知 $u^*(t)\in\Omega$，a.e.于$[\tau_0,\tau_1]$。不妨在$[\tau_0,\tau_1]$的一零测度集合上改变$u^*(t)$的值，使 $u^*(t)\in\Omega$，$\forall t\in[\tau_0,\tau_1]$。

（二）记 $x^*(t)$为满足

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dx}{dt}=f(t,x,u^*(t))\\&x^*(t_0^*)=x_0\end{aligned}\right\} \tag{2.8}$$

的解，且设与 $\{u^{(k)}(t)\}$，$t_0^{(k)}\leqslant t\leqslant t_1^{(k)}$ 相应的允许轨线为 $\{x^{(k)}(t)\}$，则可证明：$x^{(k)}(t)$ 在$[t_0^*,\ t_1^*]$ 上一致收敛于 $x^*(t)$。显然，$x^*(t)$，$x^{(k)}(t)$ 分别满足

$$x^*(t)=x_0+\int_{t_0^*}^{t}f(s,x^*(s),u^*(s))ds\qquad \tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1 \tag{2.9}$$

$$x^{(k)}(t)=x_0+\int_{t_0^{(k)}}^{t}f(s,x^{(k)}(s),u^{(k)}(s))ds\qquad \tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1 \tag{2.10}$$

从而，对 $t\in[t_0^*,\ t_1^*]$有

$$\begin{aligned}|x^{(k)}(t)-x^*(t)|&\leqslant\int_{t_0^*}^{t}|f(s,x^{(k)}(s),u^{(k)}(s))-f(s,x^*(s),u^*(s))|ds\\&+\left|\int_{t_0^*}^{t_0^{(k)}}|f(s,x^{(k)}(s),u^{(k)}(s))|ds\right|\leqslant\int_{t_0^*}^{t}|f(s,x^{(k)}(s),u^{(k)}(s))\\&-f(s,x^*(s),u^{(k)}(s))|ds+\int_{t_0^*}^{t}|f(s,x^*(s),u^{(k)}(s))-f(s,x^*(s),u^*(s))|ds\\&+\left|\int_{t_0^*}^{t_0^{(k)}}|f(s,x^{(k)}(s),u^{(k)}(s))|ds\right|\triangleq I_1^{(k)}+I_2^{(k)}+I_3^{(k)}\end{aligned} \tag{2.11}$$

此处$I_1^{(k)}$，$I_2^{(k)}$，$I_3^{(k)}$分别是上面式中的第一、二和第三项，我们有

$$\begin{aligned}I_1^{(k)}&=\int_{t_0^*}^{t}|f(s,x^{(k)}(s),u^{(k)}(s))-f(s,x^*(s),u^{(k)}(s))|ds\\&=\int_{t_0^*}^{t}\left|\frac{\partial f}{\partial x}(s,\bar{x}^{(k)}(s),u^{(k)}(s))\cdot(x^{(k)}(s)-x^*(s))\right|ds\end{aligned}$$

$$\leqslant K_1\int_{t_0^*}^{t} |x^{(k)}(s)-x^*(s)|ds \qquad t\in[t_0^*,t_1^*] \tag{2.12}$$

其中$\bar{x}^{(k)}(s)$为$x^{(k)}(s)$与$x^*(s)$的中值，显然$|\bar{x}^{(k)}(s)|\leqslant B$，

$$K_1\triangleq\sup\left\{\left|\frac{\partial f}{\partial x}(s,x,u)\right|\,\middle|\, s\in[\tau_0,\tau_1],\ |x|\leqslant B,\ u\in\Omega\right\}$$

由于$u^{(k)}(t)$在$[\tau_0,\tau_1]$上几乎处处收敛于$u^*(t)$，所以$f(s,x^*(s),u^{(k)}(s))$在$[\tau_0,\tau_1]$上也几乎处处收敛于$f(s,x^*(s),u^*(s))$，从而根据 Lebesgue 控制收敛定理，右边第二项积分$I_2^{(k)}$收敛于零．即$\forall\varepsilon>0$，存在正整数N_1，当$k>N_1$时

$$I_2^{(k)}=\int_{t_0^*}^{t}|f(s,x^*(s),u^{(k)}(s))-f(s,x^*(s),u^*(s)|ds<\frac{\varepsilon}{2} \qquad t\in[t_0^*,t_1^*] \tag{2.13}$$

又由于$|x^{(k)}(s)|\leqslant B$，$u^{(k)}(s)\in\Omega$，Ω列紧，且$f(s,x,u)$是$I\times\mathbf{R}^n\times\Omega$上的连续函数，且$t_0^{(k)}\to t_0^*$故$I_3^{(k)}\to0$．即$\forall\varepsilon>0$，存在$N_2$（正整数），当$k>N_2$时：

$$I_3^{(k)}=\left|\int_{t_0^*}^{t_0^{(k)}}|f(s,x^{(k)}(s),u^{(k)}(s))|ds\right|<\frac{\varepsilon}{2} \qquad t\in[t_0^*,t_1^*] \tag{2.14}$$

这样，令$N=\max\{N_1,N_2\}$，从(2.11)～(2.14)即见当$k>N$时

$$|x^{(k)}(t)-x^*(t)|\leqslant I_1^{(k)}+I_2^{(k)}+I_3^{(k)}\leqslant K_1\int_{t_0^*}^{t}|x^{(k)}(s)-x^*(s)|ds+\varepsilon \qquad t\in[t_0^*,\ t_1^*]$$

于是，根据Bellman不等式，即得对$k>N$有

$$|x^{(k)}(t)-x^*(t)|\leqslant\varepsilon\exp[K_1(t-t_0^*)]\leqslant\varepsilon\exp[K_1(\tau_1-\tau_0)] \qquad t\in[t_0^*,t_1^*]$$

从而$\{x^{(k)}(t)\}$在$[t_0^*,\ t_1^*]$上一致收敛于$x^*(t)$．

同样方法可证：$\{x^{(k)}(t)\}$在$[\tau_0,\tau_1]$上一致收敛于$x^*(t)$．

（三） 现证$x^*(t_1^*)\in G(t_1^*)$．在

$$|x^{(k)}(t_1^{(k)})-x^*(t_1^*)|\leqslant|x^{(k)}(t_1^{(k)})-x^*(t_1^{(k)})|+|x^*(t_1^{(k)})-x^*(t_1^*)|$$

中，由于$x^{(k)}(t)$在$[\tau_0,\tau_1]$上一致收敛于$x^*(t)$，故上式右端第一项收敛于零；又由于$x^*(t)$的连续性知第二项也收敛于零，从而

$$\lim_{k\to\infty}(t_1^{(k)},x^{(k)}(t_1^{(k)}))=(t_1^*,\ x^*(t_1^*))$$

另方面，又因对任意的$t\in[\tau_0,\tau_1]$，$G(t)$都是$\mathbf{R}^n$中的有界闭集，及$G(t)$关于t连续知，

$$G[\tau_0,\tau_1]\triangleq\{(t,x)\,|\,t\in[\tau_0,\tau_1],\ x\in G(t)\}$$

为$\mathbf{R}^1\times\mathbf{R}^n$中的闭集，从而由$(t_1^{(k)},\ x^{(k)}(t_1^{(k)}))\to(t_1^*,x^*(t_1^*))$知$(t_1^*,x^*(t_1^*))\in G[\tau_0,\tau_1]$，即

$$x^*(t_1^*)\in G(t_1^*)$$

（四） 从步骤(一)，(二)，(三)即推得$(u^*,\ x^*)$是允许对及$u^*\in\Delta(Z)$．

（五） 最后，易证u^*是在$\Delta(Z)$中的最优控制．事实上，由 Lebesgue 积分控制收敛定理即知

$$m\triangleq\inf_{u\in\Delta(Z)}C[u]=\lim_{k\to\infty}\int_{t_0^{(k)}}^{t_1^{(k)}}f(t,x^{(k)}(t),u^{(k)}(t))dt$$

$$=\int_{t_0^*}^{t_1^*}f(t,\ x^*(t),u^*(t))dt=C[u^*]$$

〈证毕〉

推论1． 令

$$Z_{LA}\triangleq\{u(t)\,\big|\,|u(t_2)-u(t_1)|\leqslant A|t_2-t_1|,\ \forall t_1,t_2\in[\tau_0,\tau_1],$$

$$\text{且 }u(t)\in\Omega,\ t\in[\tau_0,\tau_1]\} \tag{2.15}$$

此处A是给定的正数。若 $\varDelta[Z_{LA}]\triangleq\varDelta\cap Z_{LA}$ 非空，所有的对应于 $u\in\varDelta[Z_{LA}]$ 的允许轨线均匀有界，则在 $\varDelta[Z_{LA}]$ 中存在最优控制。

证明：只需证明 Z_{LA} 是 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中的列紧集即可。由于 Z_{LA} 中的函数在$[\tau_0,\tau_1]$上等度连续，一致有界，故根据 Azela 定理，Z_{LA} 中的任意一序列 $\{u^{(k)}\}$ 中存在子序列，仍记为$\{u^{(k)}\}$，它一致收敛于某函数u^*，故$\{u^{(k)}\}$显然也在 $L_1[\tau_0,\tau_1]$中收敛于u^*，$u^*\in L_1[\tau_0,\tau_1]$。现往证 $u^*(t)\in Z_{LA}$。由$\{u^{(k)}(t)\}$是 $[\tau_0,\tau_1]$ 上的一致收敛的连续函数列知 $u^*(t)$ 是 $[\tau_0,\tau_1]$ 上的连续函数，且 $u^*(t)\in\Omega$，$t\in[\tau_0,\tau_1]$。这时对$\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $k>N$ 时，

$$|u^{(k)}(t)-u^*(t)|<\frac{\varepsilon}{2}\qquad t\in[\tau_0,\tau_1]$$

从而 $\forall t_1,\ t_2\in[\tau_0,\tau_1]$，当 $k>N$ 时

$$|u^*(t_2)-u^*(t_1)|\leqslant|u^*(t_2)-u^{(k)}(t_2)|+|u^{(k)}(t_2)-u^{(k)}(t_1)|+|u^{(k)}(t_1)-u^*(t_1)|$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+A|t_2-t_1|=\varepsilon+A|t_2-t_1|$$

令 $\varepsilon\to0$ 即有

$$|u^*(t_2)-u^*(t_1)|\leqslant A|t_2-t_1|\qquad t_1,t_2\in[\tau_0,\tau_1]$$

从而 $u^*(t)\in Z_{LA}$。由此知 Z_{LA} 是 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中的列紧集。从而由定理知，则在 $\varDelta[Z_{LA}]$ 中必存在最优控制。〈证毕〉

注．推论 1 相当于文献 [1] 中的定理 2．

推论2． 记 $Z_{VA}\triangleq\{u(t)\,\Big|\,\bigvee\limits_{\tau_0}^{\tau_1}(u^i(t))\leqslant A,\ i=1,2,\cdots,m\}$ (2.16)

此处 $A>0$ 是给定的正数，$u(t)=(u^1(t),\ u^2(t),\cdots,\ u^m(t))\in\Omega$，$t\in[\tau_0,\ \tau_1]$，若 $\varDelta(Z_{VA})\triangleq\varDelta\cap Z_{VA}$ 非空，则 $\varDelta(Z_{VA})$ 中必存在最优控制．

证明：如我们曾在引理 1 中所做的那样，我们往证 Z_{VA} 是 $L_1[\tau_0,\ \tau_1]$ 中的列紧集。由于 Z_{VA} 中的函数在 $[\tau_0,\tau_1]$ 上一致有界，且是全变差函数，从而根据 Helly 选择定理（参见[3]上册，p.241），Z_{VA}中的任意一序列 $\{u^{(k)}\}$ 中必存在一子列（仍记为$\{u^{(k)}\}$），它在 $[\tau_0,\tau_1]$上收敛于一有界变差函数 $u^*(t)$，显然 $u^*(t)\in\Omega$，$t\in[\tau_0,\tau_1]$，并且根据 Lebesgue 积分控制收敛定理知．序列$\{u^k\}$在 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中也收敛于 u^*。以下证明$u^*\in Z_{VA}$。为叙述简便起见，设控制$u(t)$ 为一维的，即 $m=1$。令

$$\begin{cases} p^{(k)}(t)\triangleq\dfrac{1}{2}\Big[\bigvee\limits_{\tau_0}^{t}(u^{(k)}(\xi))+u^{(k)}(t)\Big] \\ n^{(k)}(t)\triangleq\dfrac{1}{2}\Big[\bigvee\limits_{\tau_0}^{t}(u^{(k)}(\xi))-u^{(k)}(t)\Big]\end{cases}\qquad(\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1;\ k=1,2,\cdots)\qquad(2.17)$$

则
$$u^{(k)}(t)=p^{(k)}(t)-n^{(k)}(t)\qquad(k=1,2\cdots)$$

且$p^{(k)}(t)$与 $n^{(k)}(t)$都是$[\tau_0,\tau_1]$上的单调不减函数．

$$\bigvee_{\tau_0}^{\tau_1}(p^{(k)}(t))\leqslant A,\quad\bigvee_{\tau_0}^{\tau_1}(n^{(k)}(t))\leqslant A\qquad(k=1,2,\cdots)\qquad(2.18)$$

且 $\{p^{(k)}(t)\}$ 和 $\{n^{(k)}(t)\}$ 一致有界，从而根据 Helley 选择定理，存在此两个序列的两个子

列，仍记为 $\{p^{(k)}(t)\}$ 和 $\{n^{(k)}(t)\}$，及有界变差函数 $p^*(t)$，$n^*(t)$，使

$$\lim_{k\to+\infty} p^{(k)}(t)=p^*(t),\quad \lim_{k\to+\infty} n^{(k)}(t)=n^*(t)\qquad t\in[\tau_0,\tau_1] \tag{2.19}$$

显然，$p^*(t),n^*(t)$ 都是 $[\tau_0,\tau_1]$ 上的单调不减函数。令 $\bar{u}^*(t)\triangleq p^*(t)-n^*(t)$ 则 $\{n^{(k)}(t)\}$ 在 $[\tau_0,\tau_1]$ 上处处收敛于 $\bar{u}^*(t)$，即

$$\bar{u}^*(t)=\lim_{k\to+\infty}(p^{(k)}(t)-n^{(k)}(t))=\lim_{k\to\infty}u^{(k)}(t)=u^*(t),\ t\in[\tau_0,\tau_1]$$

此时

$$\bigvee_{\tau_0}^{\tau_1}(u^*(t))\leqslant\bigvee_{\tau_0}^{\tau_1}(p^*(t))+\bigvee_{\tau_0}^{\tau_1}(n^*(t))=p^*(\tau_1)-p^*(\tau_0)+n^*(\tau_1)-n^*(\tau_0)=\lim_{k\to+\infty}(p^{(k)}(\tau_1)$$

$$-p^{(k)}(\tau_0)+n^{(k)}(\tau_1)-n^{(k)}(\tau_0))=\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}\Big[\Big(\bigvee_{\tau_0}^{\tau_1}(u^{(k)}(t))+u^{(k)}(\tau_1)-u^{(k)}(\tau_0)\Big)$$

$$+\Big(\bigvee_{\tau_0}^{\tau_1}(u^{(k)}(t))-u^{(k)}(\tau_1)+u^{(k)}(\tau_0)\Big)\Big]=\frac{1}{2}\lim_{k\to+\infty}2\bigvee_{\tau_0}^{\tau_1}(u^{(k)}(t))\leqslant A$$

从而 $u^*(t)\in Z_{VA}$，故 Z_{VA} 是 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中的列紧集。因此，从本节的定理得知 $\Delta(Z_{VA})$ 中存在最优控制。〈证毕〉

注1　当 $m=1$ 时，很明显从 Z_{VA} 和 Z_{LA} 的定义，显然可见，对 $\forall A_1>0$，$\exists A_2>0$ 使 $Z_{VA_2}\supset Z_{LA_1}$。事实上，取 $A_2=A_1(\tau_1-\tau_0)$ 得上证．对高维情形，类似的结论也是成立的．

注2　将 Z_{LA} 与 Z_{VA} 比较可见，Z_{LA} 的条件很强，特别地它不能包含任何类型的 Bang-Bang 控制函数类．

推论3． 对于一给定的正数 $A>0$，定义

$$Z_{RA}\triangleq\{u\,|\,u\in\Omega,\forall t\in[\tau_0,\tau_1],\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u(t+\tau)-u(t)|dt\leqslant A|\tau|,\ -\infty<\tau<+\infty\}$$

则若 $\Delta(Z_{RA})\triangleq\Delta\cap Z_{RA}$ 非空，在 $\Delta(Z_{RA})$ 中必存在最优控制，此处 $u(t+\tau)$ 的意义为：

$$u(t+\tau)=\begin{cases}u(t+\tau),\ 当t+\tau\in[\tau_0,\tau_1]时\\ u(\tau_1),\ 当\tau>0,\ t+\tau>\tau_1时\\ u(\tau_0),\ 当\tau<0,\ t+\tau<\tau_0时\end{cases} \tag{2.20}$$

证明． 只需证明 Z_{RA} 在 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中列紧即可．显然，$u\in Z_{RA}$，则 $u\in L_2[\tau_0,\tau_1]$ 并且，Z_{RA} 在 $L_2[\tau_0,\tau_1]$ 中是一致有界的，另一方面，当 $u\in Z_{RA}$ 时，

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u(t+\tau)-u(t)|^2dt\leqslant K\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u(t+\tau)-u(t)|dt\leqslant KA|\tau|$$

其中 $K=2\sup\limits_{u\in\Omega}|u|$。从而，$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，对 $\forall u\in Z_{RA}$ 和当 $|\tau|<\delta$，有

$$\|u(t+\tau)-u(t)\|_2<\varepsilon$$

根据 Riese 定理（参见[4]. p.71），对 Z_{RA} 中的任意序列 $\{u^{(k)}\}$，存在一子序列，仍记为 $\{u^{(k)}\}$ 及 $u^*\in L_2[\tau_0,\tau_1]$，$\{u^{(k)}\}$ 在 $L_2[\tau_0,\tau_1]$ 中收敛于 u^*．注意到

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^*(t)|dt\leqslant(\tau_1-\tau_0)^{\frac{1}{2}}\Big(\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^*(t)|^2dt\Big)^{\frac{1}{2}}$$

从而知 $u^*(t)\in L_1[\tau_0,\tau_1]$。又由

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^{(k)}(t)-u^*(t)|dt\leqslant(\tau_1-\tau_0)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^{(k)}(t)-u^*(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.21}$$

即知$u^{(k)}(t)$在$L_1[\tau_0,\tau_1]$中也收敛于$u^*(t)$。现往证$u^*(t)\in Z_{RA}$。

首先，由于$u^{(k)}(t)$在$L_1[\tau_0,\tau_1]$中收敛于$u^*(t)$。从而$\{u^{(k)}(t)\}$在$[\tau_0,\tau_1]$上也按测度收敛于$u^*(t)$（参见[3]，下册p.31），故存在$\{u^{(k)}(t)\}$的一子列，仍记为$\{u^{(k)}(t)\}$，它在$[\tau_0,\tau_1]$上几乎处处收敛于$u^*(t)$。又由于Ω是有界闭集，从而知$u^*(t)\in\Omega$ a.e.$[\tau_0,\tau_1]$；因Ω是一闭集，我们可在$[\tau_0,\tau_1]$的一零测度上改变$u^*(t)$的值，使其处处取值于Ω。

其次，我们有

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^*(t+\tau)-u^*(t)|dt\leqslant\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^{(k)}(t+\tau)-u^*(t+\tau)|dt$$
$$+\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^{(k)}(t+\tau)-u^{(k)}(t)|dt+\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^{(k)}(t)-u^*(t)|dt$$

从而，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$k>N$时，有

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^*(t+\tau)-u^*(t)|dt\leqslant\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}+A|\tau|$$

令$\varepsilon\to0$，即得

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^*(t+\tau)-u^*(t)|dt\leqslant A|\tau| \tag{2.22}$$

由此知$u^*\in Z_{RA}$。从而Z_{RA}是$L_1[\tau_0,\tau_1]$中的列紧集。故从本节定理即知，$\varDelta(Z_{RA})$中必存在最优控制。〈证毕〉

注1．对$\forall A_1>0$，可以找到一个$A_2>0$，使$Z_{RA_2}\supset Z_{VA_1}$．事实上，若$u\in Z_{VA_1}$，则令$p^i(t)\triangleq\frac{1}{2}\left[\bigvee_{\tau_0}^{t}(u^i(t))+u^i(t)\right]$，$n^i(t)\triangleq\frac{1}{2}\left[\bigvee_{\tau_0}^{t}(u^i(t))-u^i(t)\right]$，$i=1,\cdots,m$，这时$u^i(t)=p^i(t)-n^i(t)$，$\bigvee_{\tau_0}^{t}(u^i(t))=p^i(t)+n^i(t)$，并且$p^i(t)$，$n^i(t)$是单调不降函数．这样，当$\tau>0$时，

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^i(t+\tau)-u^i(t)|dt\leqslant\int_{\tau_0}^{\tau_1}|p^i(t+\tau)-p^i(t)|dt+\int_{\tau_0}^{\tau_1}|n^i(t+\tau)-n^i(t)|dt$$
$$=\int_{\tau_0}^{\tau_1}(p^i(t+\tau)-p^i(t))dt+\int_{\tau_0}^{\tau_1}(n^i(t+\tau)-n^i(t))dt$$
$$=\int_{\tau_0}^{\tau_1-\tau}(p^i(t+\tau)+n^i(t+\tau))dt-\int_{\tau_0}^{\tau_1}(p^i(t)+n^i(t))dt+(p^i(\tau_1)+n^i(\tau_1))\tau$$
$$=\int_{\tau_0+\tau}^{\tau_1}(p^i(t)+n^i(t))dt-\int_{\tau_0}^{\tau_1}(p^i(t)+n^i(t))dt+(p^i(\tau_1)+n^i(\tau_1))\tau$$
$$=(p^i(\tau_1)+n^i(\tau_1))\tau-\int_{\tau_0}^{\tau_0+\tau_1}(p^i(t)+n^i(t))dt\leqslant2(p^i(\tau_1)+n^i(\tau_1))\tau$$
$$=2\bigvee_{\tau_0}^{\tau_1}(u^i(t))\tau\leqslant2A_1\tau$$

这样，从$|u(t)|\triangleq\sum_{i=1}^{m}|u^i(t)|$，我们有

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u(t+\tau)-u(t)|dt=\sum_{i=1}^{m}\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^i(t+\tau)-u^i(\tau)|dt\leqslant 2m\cdot l_1\tau \tag{2.23}$$

我们对 $\tau<0$ 的情形可用同样的方法处理.

注2 集合 Z_{KA} 可以看做是满足平均 Lipschitz 条件的集合，并且 Z_{KA} 显然可以包含很多类型的 Bang-Bang 控制

推论4. 若 Z 是 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中的集合，满足以下条件:

〈1〉 $\varDelta\cap Z$ 非空，且所有的对应于 $u\in\varDelta\cap Z$ 的容许轨线都一致有界;

〈2〉 $u(t)\in\Omega$, $u\in Z$, $t\in[\tau_0,\tau_1]$;

〈3〉 $\lim\limits_{\tau\to 0}\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u(t+\tau)-u(t)|dt=0$. 对于 $u\in Z$ 一致地成立，即 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $|\tau|<\delta$ 和 $\forall u\in Z$ 时有

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u(t+\tau)-u(t)|dt<\varepsilon \tag{2.24}$$

〈4〉 Z 是 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中的闭集;

则在 $\varDelta\cap Z$ 中存在最优控制.

证明. 只需证明 Z 是 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中的列紧集即可. 由条件〈2〉、〈3〉知

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u(t+\tau)-u(t)|^2dt\leqslant K\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u(t+\tau)-u(t)|d\tau$$

其中 $K\triangleq 2\sup\limits_{u\in\Omega}|u|$. 这样，知 Z 是 $L_2[\tau_0,\tau_1]$ 中的相对列紧集[*]，从而对于 Z 中的任一序列 $\{u^{(k)}\}$，都存在一子序列，仍记为 $\{u^{(k)}\}$，它在 $L_2[\tau_0,\tau_1]$ 中收敛. 又由

$$\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^{(i)}(t)-u^{(j)}(t)|dt\leqslant(\tau_1-\tau_0)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\tau_0}^{\tau_1}|u^{(i)}(t)-u^{(j)}(t)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}$$

知 $\{u^{(k)}\}$ 在 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中也收敛，故 Z 是 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中的相对列紧集. 又因条件〈4〉，从而知 Z 是 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中的列紧集.

最后，从本节的定理即得知在 $\varDelta\cap Z$ 中存在最优控制.

推论5. 令

$Z_{cp}\triangleq\{u(t)\,|\,u(t)\in\Omega,\ t\in[\tau_0,\tau_1],\ u(t)$ 为逐段常值，且间断点个数不多为 $p\}$.

此处 p 是给定的整数，若 $\varDelta(Z_{cp})\triangleq\varDelta\cap Z_{cp}$ 非空和所有对应于 $u\in\varDelta\cap Z_{cp}$ 的容许轨线一致有界. 则 $\varDelta(Z_{cp})$ 中存在最优控制.

证明. 只需证明 Z_{cp} 为 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中的列紧集即可. 很明显，存在正数 A，使 $Z_{cp}\subset Z_{VA}$，由于 Z_{VA} 是 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中的列紧集，故对 Z_{cp} 中的任何一序列 $\{u^{(k)}\}$ 都存在它的一子序列，仍记为 $\{u^{(k)}\}$ 及 $u^*\in L_1[\tau_0,\tau_1]$，$\{u^{(k)}\}$ 在 $L_1[\tau_0,\tau_1]$ 中收敛于 u^*，现在往证 $u^*\in Z_{cp}$. 设 $u^{(k)}$ 的间断点为 $t_i^{(k)}$ $(i=1,2,\cdots,p)$，$\tau_0\leqslant t_1^{(k)}\leqslant t_2^{(k)}\leqslant\cdots\leqslant t_p^{(k)}\leqslant\tau_1$，记 $a^{(k)}\triangleq(t_1^{(k)},t_2^{(k)},\cdots,t_p^{(k)})$，$k=1,2,\cdots$. 显然 $\{a^{(k)}\}$ 是 $\mathbf{R}^p$ 空间中的 p 维 "方体" $[\tau_0,\tau_1]^p$ 中的一个点列，因此此点列必有子序列仍记为 $\{a^{(k)}\}$ 及点 $a^*=(t_1^*,t_2^*,\cdots,t_p^*)\in[\tau_0,\tau_1]^p$，使

---

[*]本文称一个集 Z 是空间 $L_i[\tau_0,\tau_1]$ 中的相对列紧集是指：对任一序列 $\{u^{(k)}\}\subset Z$，其中存在于空间 $L_i[\tau_0,\tau_1]$ 内收敛的子序列.

$$\lim_{k\to+\infty} a^{(k)}=a^* \quad 即 \quad \lim_{k\to+\infty} t_i^{(k)}=t_i^* \qquad (i=1,2,\cdots,p) \tag{2.25}$$

显然$t_1^*\leqslant t_2^*\leqslant\cdots\leqslant t_p^*$，及$u^*(t)$在$[\tau_0,t_1^*)$，$(t_1^*,t_2^*)$，$\cdots$，$(t_p^*,\tau_1]$上为常数因此可见$u^*(t)$是间断点数小于$p$的段段为常数的函数，从而可以在一零测度集上修改$u^*(t)$的值，使$u^*(t)$在上述子区间上分别为常数，且$u^*(t)\in\Omega$，$t\in[\tau_0,\tau_1]$。故$u^*(t)\in Z_{cp}$。从而$Z_{cp}$为列紧集。

最后，由本节定理我们即得Z_{cp}中存在最优控制。〈证毕〉

三、最优控制的可逼近性

在文献[1]中曾讨论过的一个问题是：我们能否使在$\varDelta$中的最优控制由在$\varDelta_p\subset\varDelta(p=1,2,\cdots)$中的最优控制来逼近？可在文献[1]的定理2的推论中见到此问题的一个结论，但这个结果是错误的，本节举出了此推论的一个反例，并且指出了：只要适当地选择允许控制类，就可得到正确结果。为方便起见我们摘录文献[1]中定理2的推论于下：

文献[1]定理2推论. 设对每一个 Lipschitz 常数$p=1,2,3\cdots$，有满足定理2假设（相当于本文推论1假设）的控制类$\varDelta Z_{Lp}$，且令$u_p^*(t)\,(t_0^{(p)}\leqslant t\leqslant t_1^{(p)})$为$\varDelta Z_{Lp}$中的最优控制，另外还假设：

1) 目标$G(t)$，$\tau_0\leqslant t\leqslant\tau_1$，是一固定的点$G$；

2) 对每一个$s>0$，存在$\varDelta$中的可测控制$u_s(t)\quad(t_0^{(s)}\leqslant t\leqslant t_1^{(s)})$，使得$C(u_s)\leqslant m+s$，其中$m=\inf\limits_{u\in\varDelta} C[u]$，及对于某一与$s$无关的$\varepsilon>0$有$t_1^{(s)}\leqslant\tau_1-\varepsilon$；

3) $\varDelta$中的每一个允许控制所产生的响应$x(t)$都一致的满足$|x(t)|<B<+\infty$；

4) 对每一个$s>0$，存在G的一邻域N，使N中的每一点，都可以通过一个给定的初始时刻为$t_0<\tau_1-\varepsilon$的C^1类控制转移到G上，其经历时间不大于ε，指标不大于s，

$$\lim_{p\to\infty} C[u_p^*]=m=\inf_{u\in\varDelta} C[u]$$

下面我们举出一个满足此推论的条件，但与此推论的结论相矛盾的反例。

例. 取

$$\dot{x}=u,\quad x(t_0)=0 \tag{3.1}$$

此处x和u是一维向量。$G(t)\equiv G=-1$，$[\tau_0,\tau_1]=[-1,3]$，$\Omega=\{-1,1\}$。

$$C[u]=\int_{t_0}^{t_1} W(t)u(t)\,dt \tag{3.2}$$

此处

$$W(t)=\begin{cases} t, & 当 -1\leqslant t\leqslant 1 时\\ 2-t, & 当 1\leqslant t\leqslant 2 时\\ 0, & 当 2\leqslant t\leqslant 3 时\end{cases} \tag{3.3}$$

显然$\varDelta$非空。事实上，$u(t)\equiv-1$，$t_0\leqslant t\leqslant t_0+1$，$-1\leqslant t_0\leqslant 2$，就是一个允许控制，并且也属于$\varDelta(Z_{Lp})$，$p=1,2,\cdots$，故$\varDelta(Z_{Lp})$也非空。以下我们将指出此例满足[1]定理2的推论中的假设1)～4)。

显然满足条件1)：因为$G(t)\equiv-1$就是R^1中的一固定点。满足条件2)：事实上$\varDelta$中的最优控制显然是

$$u^*(t)=\begin{cases}1, & -1\leqslant t\leqslant 0\\ -1, & 0\leqslant t\leqslant 2\end{cases} \tag{3.4}$$

从而此最优控制满足关于 $u_s(t)$ 的条件，(此处取 $\varepsilon=1$)。满足条件3)：事实上，对于Δ中的任何一个控制 $u(t)$，其相应的允许轨线 $x(t)$ 都满足 $|x(t)|\leqslant 3$。满足条件4)：事实上、对 $\forall s>0$，及 $t_0(-1=\tau_0\leqslant t_0\leqslant \tau_1-\varepsilon=2)$，可选$G$的一邻域 $N=\left\{-1+r,\ -\frac{s}{2}\leqslant r\leqslant \frac{s}{2}\right\}$ (设 $s<1$)，则当 $\bar{x}_0\in N$(或$\bar{x}_0=-1+r$)时，选取 $u(t)\equiv -\mathrm{sign}\, r$，$t_0\leqslant t\leqslant t_0+|r|=t_1$，则在此控制之下满足初始条件 $x(t_0)=1+r$的系统的解 $x(t)$ 在时刻 $t_1=t_0+|r|$ 上具有：$x(t_1)=x_0+u(t_1-t_0)=(-1+r)+(-\mathrm{sign}\, r)\cdot|r|=-1+r-r=-1=G$。显然 $u(t)$ 是 C^1 类控制，且此时的指标为：

$$C[u]=\int_{t_0}^{t_0+|r|} W(t)(-\mathrm{sign}\ r)dt \tag{3.5}$$

显然 $|C[u]|<|r|<\frac{s}{2}$。

总上所述可见，此例满足文献[1]的推论所给的所有条件，但容易证明，此例不满足推论所得的结论。事实上，$\Delta(Z_{Lp})$中的唯一的最优控制是 $u_p^*\equiv -1$，$0.5\leqslant t\leqslant 1.5$，$p=1,2,\cdots$，但在 Δ 中的最优控制为

$$u^*(t)=\begin{cases}1, & \text{当}-1\leqslant t\leqslant 0\text{时}\\ -1, & \text{当}\ 0\leqslant t\leqslant 2\text{时}\end{cases}$$

及$C[u_p^*]=-0.75$，$p=1,2,3,\cdots$，$C[u^*]=-1.5$，从而 $\lim\limits_{p\to\infty} C[u_p^*]\neq C[u^*]=\inf\limits_{u\in\Delta} C[u]$。这说明推论是错误的。

下面的推论 6 表明，只要选择适当的允许控制类，就可得出这问题的正确结果。

推论6. 设

1) 目标集合 $G(t)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 空间的一个固定点G。

2) Δ非空，且对某个$\varepsilon>0$，都对每一个$s>0$，存在$u_s(t)\in\Delta$，$t_0^{(s)}\leqslant t\leqslant t_1^{(s)}$，致使$t_1^{(s)}\leqslant \tau_1-\varepsilon$，且 $C[u_s]\leqslant \inf\limits_{u\in\Delta} C[u]+s$。

3) $\forall s>0$，及 $\bar{t}_0\leqslant \tau_1-\varepsilon$，存在 G 的邻域 N_s，使对 $\forall \bar{x}_0\in N_s$，都存在全变差有界的控制$\bar{u}(t)$，$\bar{t}_0\leqslant t\leqslant \bar{t}_1$，$\bar{t}_1-\bar{t}_0\leqslant\varepsilon$，且使相应的初始条件为 $x(t_0)=\bar{x}_0$的响应满足 $x(\bar{t}_1)=G$，且 $|C[\bar{u}(t)]|\leqslant s$。

4) 存在$B>0$，使所有的对应于Δ中的可测控制的允许轨线$x(t)$，都有$|x(t)|\leqslant B$，则

1° 存在正整数 M，使对$\forall p=M,M+1,\cdots$，都有 $\Delta(Z_{Vp})$ 非空。

2° 设 u_p^* 为$\Delta(Z_{Vp})$中的最优控制（由本文引理 2 知此最优控制存在)，则有 $\lim\limits_{p\to\infty} C[u_p^*]=\inf\limits_{u\in\Delta} C[u]$。

证明. 对每个 $s>0$，由假设知存在 $u_s(t)\in\Delta$，$t_0^{(s)}\leqslant t\leqslant t_1^{(s)}$，使满足条件2)。由于 $u_s(t)$ 是 $[t_0^{(s)},t_1^{(s)}]$ 上的有界可测函数，故存在逐段常值函数列 $\{u_s^{(l)}(t)\}$，它在 $[t_0^{(s)},t_1^{(s)}]$上有 $\lim\limits_{l\to\infty} u_s^{(l)}(t)=u_s(t)$。由叶戈洛夫 (Д. Ф. Егоров) 定理，对 $\forall k=1,2,\cdots$，存在可测集 $E_k\subset[t_0^{(s)},t_1^{(s)}]$，使 $\mathrm{mes}\, E_k\leqslant \frac{1}{2^k}$，且在 $[t_0^{(s)},t_1^{(s)}]\backslash E_k$有 $\lim\limits_{l\to\infty} u_s^{(l)}(t)=u_s(t)$，令

$F_k \triangleq \bigcup_{i=k}^{\infty} E_i$，则

$$\text{mes} F_k \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \text{mes } E_i \leqslant \sum_{i=k}^{\infty} \frac{1}{2^i} < \frac{1}{2^{k-1}}$$

且$\{u_s^{(l)}\}$在$[t_0^{(s)}, t_1^{(s)}]\backslash F_k$上一致收敛于$\{u_s(t)\}$。取$\{u_s^{(l)}(t)\}$的子列(不妨仍记为$\{u_s^{(l)}(t)\}$)。使在$[t_0^{(s)}, t_1^{(s)}]\backslash F_k$上$|u_s^{(l)}(t)-u_s(t)| \leqslant \frac{1}{2^l}$，$\forall l \geqslant k$。注意到$u_s^{(l)}(t)$ $(l=1,2\cdots)$是分段常值函数，即存在有限个满足$I_l^i \cap I_l^j = \varnothing (i \neq j)$的区间$I_l^i, i=1,2,\cdots k_l$，使$\bigcup_{i=1}^{k_l} I_l^i = [t_0^{(s)}, t_1^{(s)}]$，且$u_s^{(l)}$在$I_l^i$上为常值函数$c_l^i$，对$\forall i=1,2,\cdots,k_l, l=1,2,\cdots$。以下构造函数列$\{\bar{u}_s^{(l)}(t)\}$，满足：

在I_l^i上，$\bar{u}_s^{(l)}(t)=\bar{c}_l^i$，$i=1, 2,\cdots, k_l$，其中$\bar{c}_l^i$取值如下：

$$\bar{c}_l^i = \begin{cases} u_0, & \text{当 } I_l^i \subset F_l \text{ 时，(其中 } u_0 \text{ 是} \Omega \text{ 中的任定的一点)。} \\ u_s^{(l)}(t_l^i), & \text{当} I_l^i \text{不全在} F_l \text{之中时，(其中 } t_l^i \text{ 是满足 } t_l^i \in I_l^i, t_l^i \bar{\in} F_l \text{的任定的一点)。} \end{cases}$$

以下证明：对任一个k，$\{\bar{u}_s^{(l)}(t)\}$在$[t_0^{(s)}, t_1^{(s)}]\backslash F_k$一致收敛于$u_s(t)$。事实上，当$t \in [t_0^{(s)}, t_1^{(s)}]\backslash F_k$，且$l \geqslant k$时，存在一区间$I_l^i$，$i \in \{1,2,\cdots,k_l\}$，使$t \in I_l^i$。从而$I_l^i$不全在$F_k$之中，故存在以上选出的$t_l^i \in I_l^i$，使$\bar{u}_s^{(l)}(t)=\bar{c}_l^i=u_s^{(l)}(t_l^i)$，因此，

$$|\bar{u}_s^l(t)-u_s(t)| \leqslant |\bar{u}_s^{(l)}(t)-\bar{u}_s^{(l)}(t_l^i)|+|\bar{u}_s^{(l)}(t_l^i)-u_s(t_l^i)|$$

$$+|u_s(t_l^i)-u_s^{(l)}(t)|+|u_s^{(l)}(t)-u_s(t)| \leqslant 2 \times \frac{1}{2^l}$$

故此$\{\bar{u}_s^{(l)}\}$在$[t_0^{(s)}, t_1^{(s)}]\backslash F_k$上一致收敛于$u_s(t)$，且$\bar{u}_s^{(l)}(t)$是逐段常值函数，$\bar{u}_s^{(l)}(t) \in \Omega$，$t \in [t_0^{(s)}, t_1^{(s)}]$。设$x_s^{(l)}$满足，

$$\left.\begin{aligned} \dot{x}_s^{(l)} &= f(t, x_s^{(l)}, \bar{u}_s^{(l)}) \\ x_s^{(l)}(t_0^{(s)}) &= x_0 \end{aligned}\right\} \tag{3.6}$$

则利用与本文定理证明中的相同方法可证得：$\{x_s^{(l)}(t)\}$在$[t_0^{(s)}, t_1^{(s)}]$上一致收敛于相应于允许控制$u_s(t)$的允许规线$x_s(t)$，并且

$$\lim_{l\to\infty} \int_{t_0^{(s)}}^{t_1^{(s)}} f^0(t, x_s^{(l)}(t), \bar{u}_s^{(l)}(t))dt = C[u_s] \tag{3.7}$$

另一方面对于$s>0$及$t_1^{(s)}$按定理的假定存在G的邻域N_s，使$\forall \bar{x}_0 \in N_s$，都存在一全变差有界的控制$\bar{u}(t)$，$t_1^{(s)} \leqslant t \leqslant \bar{t}_1$，$\bar{t}_1 - t_1^{(s)} < \varepsilon$满足条件3)。现选取正整数$l$，使

a. $\bar{u}_s^{(l)}(t)$的相应轨线$x_s^{(l)}(t)$满足$x_s^{(l)}(t_1^{(s)}) \in N_s$

$$\text{b.} \quad \left|\int_{t_0^{(s)}}^{t_1^{(s)}} f^0(t, x_s^{(l)}(t), \bar{u}_s^{(l)}(t))dt - C[u_s]\right| < s \tag{3.8}$$

则可进而作一控制$\bar{u}(t)$，$t_1^{(s)} \leqslant t \leqslant \bar{t}_1$，使相应的响应满足$\bar{x}(t_1^{(s)})=x_s^{(l)}(t_1^{(s)})$，$\bar{x}(\bar{t}_1)=G$，

且 $|C[\bar{u}]|\leqslant s$. 显然控制

$$\hat{u}(t)\triangleq\begin{cases}\bar{u}_s^{(l)}(t), & t_0^{(s)}\leqslant t\leqslant t_1^{(s)}\\ \bar{u}(t), & t_1^{(s)}\leqslant t\leqslant\bar{t}_1\end{cases}$$

为Δ中的允许控制及为全变差有界函数，并且

$$C[\hat{u}]=\int_{t_0^{(s)}}^{\bar{t}_1} f^0(t,\hat{u}(t),\hat{x}(t))dt\leqslant C[u_s]+2s\leqslant\inf_{u\in\Delta}C[u]+3s$$

由此知，$\forall\varepsilon_1>0$，存在 p（正整数），使$\Delta(Z_{Vp})$非空，且 u_p^*（在 $\Delta(Z_{Vp})$ 中的最优控制）满足：

$$C[u_p^*]\leqslant\inf_{u\in\Delta}C[u]+\varepsilon_1 \tag{3.9}$$

又由于 $\{C[u_p^*]\}$ 是 p 的单调降数列，由此知

$$\lim_{p\to\infty}C[u_p^*]=\inf_{u\in\Delta}C[u]$$

〈证毕〉

参 考 文 献

[1] Lee, E. B. and L. Markus, Optimal control for nonlinear processes, *Arch Rational Mech. Anal.*, **8**, 1(1961), 36—38.

[2] Berkovitz, L. D., *Optimal Control Theory*, (1974).

[3] 夏道行等.《实变函数论与泛函分析》. 人民教育出版社.（1979）.

[4] 刘斯铁尔尼克，Л. E. 等，《泛函分析概要》中译本，杨从仁译，科学出版社

The Existence Problem of Optimal Control for Nonlinear Processes

Peng Shi-ge Chen Zu-hao

(*Shandong University, Jinan*)

Abstract

The existence problem of optimal control systems described by $\dot{x}=f(t,x,u)$ is discussed in this paper, where $f(t,x,u)$ is a more general function and the class of admissible control functions are general enough to contain those control functions which are frequently used in engineering. The problem for an optimal control approximated by a sequence of control functions being part of certain function classes is considered here, an example in contradiction with the conclusion of Ref.[1] about this problem is given, and a correct conclusion is presented.