应用数学和力学，第4卷第5期（1983年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

非线性连续统力学应变率和应力率的近期探讨*

郭 仲 衡

（北京大学数学系，1982年12月收到）

摘 要

本文对连续统力学的两个基本概念——应变率和应力率——进行了若干考虑，并提出一些结果．首先对应变和应力概念作了一个扼要的系统回顾．第二节用绝对符号法给出一个至今尚属未知的右伸长张量时间变化率的显表达式．尔后，本工作提议区分定义客观性应力率的两种途径．按照第二种途径分析了若干特例之后，作者提出一个称为广义 Jaumann 导数的作为客观性应力率．它包含了大部分现有的应力率定义，以及 Hill 的结果．

应变和应力时间变化率在非弹性论中起重要作用。它们出现在复杂材料的本构方程和本构不等式。

一、应 变 度 量

应变和应力的定义有很多，甚至是无数的[1,2]。Seth[1]的应变度量族

$$\mathsf{E}^{(n)} := \frac{1}{2n}(\Lambda^{2n}-\mathsf{I}) = \frac{1}{2n}(\mathsf{C}^{n}-\mathsf{I}) \tag{1.1}$$

是相当系统和一般的。下列几个传统的应变张量仅是族(1.1)的特殊情形：

i) Green 应变 $$\mathsf{E}^{(1)} = \frac{1}{2}(\Lambda^{2}-\mathsf{I}) \tag{1.2}$$

ii) Almansi 应变 $$\mathsf{E}^{(-1)} = \frac{1}{2}(\mathsf{I}-\Lambda^{-2}) \tag{1.3}$$

iii) 名义（或工程）应变 $$\mathsf{E}^{(1/2)} = \Lambda-\mathsf{I} \tag{1.4}$$

iv) 对数（或真实）应变 $$\mathsf{E}^{(0)} = \ln\Lambda \tag{1.5}$$

定义$\mathsf{E}^{(0)}$时用到下述公式

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}(\lambda^{x}-1) = \ln\lambda \tag{1.6}$$

这里

* 这报告在无锡"全国非线性力学会议"（1982年10月）宣读．

$$\Lambda := C^{1/2} \qquad C := F^*F \qquad F := x \otimes \nabla_X \tag{1.7}$$

分别是右伸长张量，右 Cauchy-Green 应变张量和变形梯度．Nabla 算子“∇_X”是对位置 X 而定义的．X是物体点在参考构型占据的位置．一般物体点就称为物体点X．它在当前构型占据位置 x．星号“＊”表示转置．Λ或C是基本的．知其一，任何应变度量 $E^{(n)}$ 即可用定义(1.1)计算出．

应变度量的物质导数已公认地被接受为这个应变的时间变化率的唯一定义．应用熟知的变形梯度物质导数公式[3]

$$\dot{F} = GF \tag{1.8}$$

容易计算 C 的时间变化率：

$$\dot{C} = \dot{\overline{F^*F}} = 2F^*DF \tag{1.9}$$

其中

$$G := v \otimes \nabla_x \tag{1.10}$$

是速度梯度，Nabla 算子“∇_x”是对物体点 X 当前位置 x 而定义的，而伸长率张量

$$D := \frac{1}{2}(G + G^*) \tag{1.11}$$

则是速度梯度的对称部分．于是，对每个整数n，计算$E^{(n)}$的时间变化率是容易的：

$$\dot{E}^{(n)} = \frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} C^{k-1}\dot{C}C^{n-k} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} C^{k-1}F^*DFC^{n-k} \tag{1.12}$$

然而，对分数的n，例如$n=\frac{1}{2}$，$1\frac{1}{2}$，…，我们得先求出

$$\dot{\Lambda} = \sqrt{\dot{\overline{F^*F}}} \tag{1.13}$$

才能应用(1.1)的第一式．Λ 的无理性使这个问题变得复杂．Hill 用他的主轴表示法给出了$\dot{\Lambda}$的表达式([2]的(1.44))，但在这种情形从主轴表示无法回到一般的表示．不久以前，[4]给出了$\dot{\Lambda}$的一般显表达式．下一节我们给出这个表达式，但和[4]的表达式略有差异．[4]也给出了左伸长张量和转动张量的一般显表达式．

二、应 变 率

我们将需要

引理 设 S 和 A 分别是给定的对称正定和反对称张量．则张量方程

$$XS + SX = A \tag{2.1}$$

的唯一解X是反对称张量，由下式给出

$$X = \frac{1}{\mathrm{I}\,\mathrm{II} - \mathrm{III}}[(\mathrm{I}^2 - \mathrm{II})A - (S^2A + AS^2)] \tag{2.2}$$

其中 Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ 是 S 的主不变量，这个引理的证明读者可参阅[4]．

现在让我们求变形梯度极分解

$$F = R\Lambda \tag{2.3}$$

的转动张量R的物质导数，并依次得

$$\dot{\mathbf{R}}=\overline{\mathbf{F}\Lambda^{-1}}^{\cdot}=\dot{\mathbf{F}}\Lambda^{-1}+\mathbf{F}\dot{\Lambda}^{-1}=\mathbf{GR}-\mathbf{R}\dot{\Lambda}\Lambda^{-1} \tag{2.4}$$

$$\mathbf{R}^*\dot{\mathbf{R}}\Lambda=\mathbf{R}^*\mathbf{GF}-\dot{\Lambda} \tag{2.5}$$

其中用到了公式(1.8)和$\dot{\Lambda}^{-1}=-\Lambda^{-1}\dot{\Lambda}\Lambda^{-1}$. 将(2.5)及其转置合并就得

$$(\mathbf{R}^*\dot{\mathbf{R}})\Lambda+\Lambda(\mathbf{R}^*\dot{\mathbf{R}})=\mathbf{R}^*\mathbf{GF}-\mathbf{F}^*\mathbf{G}^*\mathbf{R} \tag{2.6}$$

其中考虑到$\mathbf{R}^*\dot{\mathbf{R}}$的反对称性质. 把上式的$\Lambda$, $\mathbf{R}^*\mathbf{GF}-\mathbf{F}^*\mathbf{G}^*\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{R}^*\dot{\mathbf{R}}$ 看作是(2.1) 的 $\mathbf{S}$, $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{X}$, 则(2.6)就成为具有反对称未知量 $\mathbf{R}^*\dot{\mathbf{R}}$ 的(2.1)型的张量方程. 藉助于(2.1)的解(2.2), 反对称张量 $\mathbf{R}^*\dot{\mathbf{R}}$就能唯一地由(2.6)确定.

$$\mathbf{R}^*\dot{\mathbf{R}}=\frac{1}{\mathrm{I}\,\mathrm{II}-\mathrm{III}}[(\mathrm{I}^2-\mathrm{II})\mathbf{A}-(\Lambda^2\mathbf{A}+\mathbf{A}\Lambda^2)] \tag{2.7}$$

从(2.5), 我们就得$\dot{\Lambda}$的显表达式

$$\dot{\Lambda}=\left\{\mathbf{R}^*\mathbf{GR}-\frac{1}{\mathrm{I}\,\mathrm{II}-\mathrm{III}}[(\mathrm{I}^2-\mathrm{II})\mathbf{A}-(\Lambda^2\mathbf{A}+\mathbf{A}\Lambda^2)]\right\}\Lambda \tag{2.8}$$

其中

$$\mathbf{A}:=\mathbf{R}^*\mathbf{GF}-\mathbf{F}^*\mathbf{G}^*\mathbf{R} \tag{2.9}$$

而Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ则是Λ的主不变量.

三、应 力 度 量

最常用的应力度量可列举如下:

i) Cauchy (或真实) 应力　　σ　　(3.1)

ii) Kirchhoff (或加权) 应力　　$\tau:=\mathscr{J}\sigma$　　(3.2)

iii) 第一Piola-Kirchhoff 应力　　$\mathbf{S}:=\tau\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^*$　　(3.3)

iv) 第二Piola-Kirchhoff 应力　　$\mathbf{T}^{(1)}:=\overset{-1}{\mathbf{F}}\tau\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^*$　　(3.4)

其中$\mathscr{J}>0$是变换 Jacobi 行列式. Cauchy 应力 σ 和 Kirchhoff 应力 τ 是Euler 型张量, $\mathbf{S}$是两点张量, 而 $\mathbf{T}^{(1)}$则是 Lagrange 型一点张量. 只有σ (和 τ) 具有直接的物理意义: 作用于当前位置 $\mathbf{x}$ 截面的单位法向量$\mathbf{n}$, σ给出每单位当前构型面积的接触力 (应力向量$\mathbf{t}$)

$$\mathbf{t}=\sigma\mathbf{n} \tag{3.5}$$

当在不变外载荷下物体点$\mathbf{X}$不变形地受到一个附加转动$\hat{\mathbf{R}}$, 当前构型的单位法向量$\mathbf{n}$, 应力向量 $\mathbf{t}$ 和转动张量$\mathbf{R}$变为$\hat{\mathbf{n}}=\hat{\mathbf{R}}\mathbf{n}$, $\hat{\mathbf{t}}=\hat{\mathbf{R}}\mathbf{t}$和$\hat{\mathbf{R}}\mathbf{R}$, 但参考构型的单位法向量$\mathbf{N}$和 Λ 不变. 不难得到上面引进的各应力在这附加转动下的新构型里的表达式:

$$\hat{\sigma}=\hat{\mathbf{R}}\sigma\hat{\mathbf{R}}^*\qquad\hat{\tau}=\hat{\mathbf{R}}\tau\hat{\mathbf{R}}^*\qquad\hat{\mathbf{S}}=\hat{\mathbf{R}}\mathbf{S}\qquad\hat{\mathbf{T}}^{(1)}=\mathbf{T}^{(1)} \tag{3.6}$$

只有第二 Piola-Kirchhoff 应力不受附加刚性运动的影响. 根据 Hill 的术语, 具有这种性质的应力张量称为客观性的. 这样, σ, τ 和 $\mathbf{S}$ 都不是客观性的应力度量.

可以进一步定义更多的客观性应力度量. 为此, Hill[2] 给出了一个系统的构造性方法. 要点在于将分析力学中的广义坐标和广义力的概念推广至连续统力学[2,5]; 将Seth 族中的任一应变度量$\mathbf{E}^{(n)}$看作为广义坐标; 然后从 (单位参考构型体积的) 应力功率表达式

$$\dot{w}=\mathbf{T}^{(n)}:\dot{\mathbf{E}}^{(n)}=\tau:\mathbf{D}=\mathscr{J}\sigma:\mathbf{D} \tag{3.7}$$

唯一地求出 (经过对称化) 对应的应力度量. 我们称 ($\mathbf{T}^{(n)}$, $\mathbf{E}^{(n)}$) 是 (功) 共 轭 对. 这样求得的共轭应力度量$\mathbf{T}^{(n)}$自然是客观性的.

从下式的最后一关系式

$$\dot{w}=\tau:\mathbf{D}=\tau:\mathbf{G}=\tau:(\dot{\mathbf{F}}\overset{-1}{\mathbf{F}})=(\tau\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^{*}):\dot{\mathbf{F}}=\mathbf{S}:\dot{\mathbf{F}} \tag{3.8}$$

似乎是某些作者把（S，F）也看作为共轭对的理由．但这并不是确切意义下的共轭，因变形梯度 F 不是一个应变度量，故不能看作为广义坐标．

下面我们通过几个例子示范如何找出共轭于一个给定应变度量的应力．将

$$\dot{\mathbf{E}}^{(1)}=\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}=\mathbf{F}^{*}\mathbf{D}\mathbf{F} \quad 或 \quad \mathbf{D}=\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^{*}\dot{\mathbf{E}}^{(1)}\overset{-1}{\mathbf{F}} \tag{3.9}$$

（是对(1.2)进行物质微商并应用(1.9)的结果）代入(3.7)，我们得

$$\mathbf{T}^{(1)}:\dot{\mathbf{E}}^{(1)}=\tau:(\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^{*}\dot{\mathbf{E}}^{(1)}\overset{-1}{\mathbf{F}})=(\overset{-1}{\mathbf{F}}\tau\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^{*}):\dot{\mathbf{E}}^{(1)} \tag{3.10}$$

上式对称张量$\dot{\mathbf{E}}^{(1)}$的任意性给出共轭于 Green 应变$\mathbf{E}^{(1)}$的第二 Piola-Kirchhoff 应力张量的表达式(3.4)．

另一方面，将

$$\dot{\mathbf{E}}^{(-1)}=-\frac{1}{2}\dot{\mathbf{C}}^{-1}=-\frac{1}{2}(\dot{\overset{-1}{\mathbf{F}}}\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^{*}+\overset{-1}{\mathbf{F}}\dot{\overset{-1}{\mathbf{F}}}{}^{*})=\overset{-1}{\mathbf{F}}\mathbf{D}\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^{*} \tag{3.11}$$

或

$$\mathbf{D}=\mathbf{F}\dot{\mathbf{E}}^{(-1)}\mathbf{F}^{*} \tag{3.12}$$

代入(3.7)，又得

$$\mathbf{T}^{(-1)}:\dot{\mathbf{E}}^{(-1)}=\tau:(\mathbf{F}\dot{\mathbf{E}}^{(-1)}\mathbf{F}^{*})=(\mathbf{F}^{*}\tau\mathbf{F}):\dot{\mathbf{E}}^{(-1)} \tag{3.13}$$

从而得一个共轭于 Almansi 应变的新张量

$$\mathbf{T}^{(-1)}=\mathbf{F}^{*}\tau\mathbf{F} \tag{3.14}$$

我们注意到，$\mathbf{T}^{(-1)}$和所谓对流应力（[6]67页）只相差一个系数$\mathscr{P}$．

由于$\dot{\mathbf{E}}^{(1/2)}=\dot{\Lambda}$不能简单地由$\mathbf{D}$表达，共轭于名义应变$\mathbf{E}^{(1/2)}$的应力 $\mathbf{T}^{(1/2)}$是通过略有区别的途径导出的．利用$\mathbf{T}^{(1)}$的对称性，我们有

$$\dot{w}=\mathbf{T}^{(1)}:\dot{\mathbf{E}}^{(1)}=\mathbf{T}^{(1)}:\frac{1}{2}(\dot{\Lambda}\Lambda+\Lambda\dot{\Lambda})=\mathbf{T}^{(1)}:(\Lambda\dot{\Lambda})=(\Lambda\mathbf{T}^{(1)}):\dot{\Lambda}=\mathbf{T}^{B}:\dot{\mathbf{E}}^{(1/2)} \tag{3.15}$$

非对称“一点”张量

$$\mathbf{T}^{B}:=\Lambda\mathbf{T}^{(1)} \tag{3.16}$$

称为修正 Biot 应力．根据定义，$\mathbf{T}^{B}$ 的对称化给出共轭于$\mathbf{E}^{(1/2)}$的Jaumann 应力$\mathbf{T}^{(1/2)}$

$$\mathbf{T}^{(1/2)}=\frac{1}{2}(\Lambda\mathbf{T}^{(1)}+\mathbf{T}^{(1)}\Lambda) \tag{3.17}$$

用一般表示法求得其他的共轭应力是困难的．Hill 的方法是用主分量求任意共轭应力的一般方法．感兴趣的读者可在[2]找到这种方法．

和对数应变$\mathbf{E}^{(0)}=\ln\Lambda$ 共轭的应力 $\mathbf{T}^{(0)}$ 不具有有限的形式．但我们仍可给出 $\mathbf{T}^{(0)}$ 和任意 $\mathbf{T}^{(n)}$间的一个渐近关系式．为此，我们将(1.1)展开为级数

$$\mathbf{E}^{(n)}=(\Lambda-\mathbf{I})+\frac{2n-1}{2}(\Lambda-\mathbf{I})^{2}+\cdots \tag{3.18}$$

这级数对所有接近于 1 的主值的Λ收敛．对于$n=0$，上式变为

$$\mathbf{E}^{(0)}=(\Lambda-\mathbf{I})-\frac{1}{2}(\Lambda-\mathbf{I})^{2}+\cdots \tag{3.19}$$

将(3.18)写成

$$\Lambda-\mathrm{I}=\mathrm{E}^{(n)}-\frac{2n-1}{2}(\Lambda-\mathrm{I})^2\cdots \tag{3.20}$$

并用来逐次代替(3.19)中的 $\Lambda-\mathrm{I}$，得一收敛级数

$$\mathrm{E}^{(0)}=\mathrm{E}^{(n)}-n\mathrm{E}^{(n)2}+O(\mathrm{E}^{(n)3}) \tag{3.21}$$

在(3.7)应用这式，我们得

$$\begin{aligned}\mathrm{T}^{(n)}:\dot{\mathrm{E}}^{(n)}&=\mathrm{T}^{(0)}:\dot{\mathrm{E}}^{(0)}=\mathrm{T}^{(0)}:[\dot{\mathrm{E}}^{(n)}-n(\dot{\mathrm{E}}^{(n)}\mathrm{E}^{(n)}+\mathrm{E}^{(n)}\dot{\mathrm{E}}^{(n)})+O(\dot{\mathrm{E}}^{(n)2})]\\&=[\mathrm{T}^{(0)}-n(\mathrm{T}^{(0)}\mathrm{E}^{(n)}+\mathrm{E}^{(n)}\mathrm{T}^{(0)})+O(\mathrm{E}^{(n)2})]:\dot{\mathrm{E}}^{(n)}\end{aligned} \tag{3.22}$$

从而有上面提及的 $\mathrm{T}^{(0)}$ 和 $\mathrm{T}^{(n)}$ 的关系式

$$\mathrm{T}^{(n)}=\mathrm{T}^{(0)}-n(\mathrm{T}^{(0)}\mathrm{E}^{(n)}+\mathrm{E}^{(n)}\mathrm{T}^{(0)})+O(\mathrm{E}^{(n)2}) \tag{3.23}$$

四、客观性应力率

关于应力率的情况大不同于应变率的情况．历史上曾提出过众多的应力率定义[7]．某些显然是错误的，其他的则是在下述意义下等价的[6,8]．它们相差的项可被纳入于本构方程，且在刚性运动中消失．Hill 称这种当在外载不变物体点进行刚性运动时消失为零的应力率为客观性应力率．

大体上，我们可以区分两种定义客观性应力率的途径．

其一是直接将一种恰当定义的时间导数运算应用于 Cauchy 应力 σ 或 Kirchhoff 应力 τ．由于 σ 和 τ 不是客观性应力度量，我们必需如此定义这种时间导数．它用某种方式抵销应力本身的非客观性．按照这种精神，[7]从这样一个观察者的角度来定义应力率，他不仅和物体点一起平移，而且进行相同的转动．这样，我们就毫不含糊地得到了，例如应用于 Kirchhoff 应力 τ 的，Jaumann 导数：

$$\frac{\mathscr{D}\tau}{\mathscr{D}t}:=\dot{\tau}+\tau\mathrm{W}-\mathrm{W}\tau \tag{4.1}$$

其中速度梯度的反称部分 $\mathrm{W}=\frac{1}{2}(\mathrm{G}-\mathrm{G}^*)$ 称为物质旋率．引入 W 的伴随轴向量 $\mathrm{w}=\frac{1}{2}\epsilon:\mathrm{W}$，我们容易看到，当作用在任意物质线元 $d\mathrm{x}$ 时，W 的转动性质

$$\mathrm{W}d\mathrm{x}=\mathrm{w}\times d\mathrm{x} \tag{4.2}$$

这里 ϵ 是置换张量（三阶）．如果用三个正交单位向量 n_α^D 代表伸长率张量 D 的主向，我们就得 W 的一个解释：它以角速度 $|\mathrm{w}|$ 绕轴 w 转动正交基 $\{\mathrm{n}_\alpha^D\}$．长期以来，W 一直被认为是物体点角速度的当然代表者．那么就容易理解，Jaumann 导数的定义观察者以物质旋率 W 而转动，并且唯一地导致常规定义(4.1)．在实践上，应用于 σ 或 τ 的 Jaumann 导数是最常应用的应力率了．

自从1967 年，Green 和 McInnis[9] 在提出他们的广义低弹性论时用相对旋率 $\Omega=\dot{\mathrm{R}}\mathrm{R}^*$ 代替常规的 W 以后，情况变得含糊起来了．如果两组称为 Lagrange 和 Euler 基的单位正交基 $\{\mathrm{N}_\alpha\}$ 和 $\{\mathrm{n}_\alpha\}$ 分别代表空间的和物质的应变主方向，则 Ω 相对于一组和 $\{\mathrm{N}_\alpha\}$ 一起转动而当前和 $\{\mathrm{n}_\alpha\}$ 重合的单位正交基转动 $\{\mathrm{n}_\alpha\}$．这样，Green 和 McInnis 就引进了一个修正 Jaumann 导数，例如当作用在 τ 时，

$$\frac{\mathscr{D}^{(m)}\tau}{\mathscr{D}t}=\dot{\tau}+\tau\Omega-\Omega\tau \tag{4.3}$$

最近，Dienes (1979，[10]) 主张物质的转动时间变化率应该是Ω。他通过一个零级低弹性材料直线剪切的例子声称，使用Ω可得"准确"结果，而通常的 Jaumann 导数只在小应变 (0.4 以内) 才给出准确结果。修正 Jaumann 导数可解释作为是从这样一个观察者来定义的，他依附于物质点而以相对旋率Ω转动。

从(2.4)取$\mathbf{G}$的反称部分，容易得到$\mathbf{W}$和Ω的关系式

$$\mathbf{W}=\Omega+\frac{1}{2}\mathbf{R}(\dot{\Lambda}\Lambda^{-1}-\Lambda^{-1}\dot{\Lambda})\mathbf{R}^* \tag{4.4}$$

可见，除了若干特殊情形，物质旋率$\mathbf{W}$一般不等于相对旋率Ω。到底那一个旋率更代表物质的角速度，是一个尚待进一步探讨的问题。

用第二途径定义客观性应力率时，我们考虑到下述情况：每个共轭 (自然也是客观性的) 应力$\mathbf{T}^{(n)}$是一个 Lagrange 张量，同时是非客观性 Euler 型应力张量τ的某种线性变换。第二种定义τ (或σ) 的客观性应力率的途径是：(i) 将一个共轭应力$\mathbf{T}^{(n)}$进行物质微商，得到一个 Lagrange 型的客观性应力率$\dot{\mathbf{T}}^{(n)}$；(ii) 用相同的变换法则将$\dot{\mathbf{T}}^{(n)}$反变换回 Euler 基，得某种意义下的τ的客观性应力率$\frac{\mathscr{D}^{(n)}\tau}{\mathscr{D}t}$。首先我们通过若干特例说明这个过程。

将定义第二 Piola-Kirchhoff 应力$\mathbf{T}^{(1)}$的 (3.4) 式进行物质微商，得

$$\dot{\mathbf{T}}^{(1)}=\overline{\overset{-1}{\mathbf{F}}\tau\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^*}^{\boldsymbol{\cdot}}=\overset{-1}{\mathbf{F}}(\dot{\tau}-\tau\mathbf{G}^*-\mathbf{G}\tau)\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^* \tag{4.5}$$

反变换又给出

$$\frac{\mathscr{D}^{(1)}\tau}{\mathscr{D}t}:=\mathbf{F}\dot{\mathbf{T}}^{(1)}\mathbf{F}^*=\dot{\tau}+\tau\mathbf{W}-\mathbf{W}\tau-(\tau\mathbf{D}+\mathbf{D}\tau) \tag{4.6}$$

类似地，对于应力$\mathbf{T}^{(-1)}$我们依次得到

$$\dot{\mathbf{T}}^{(-1)}=\overline{\mathbf{F}^*\tau\mathbf{F}}^{\boldsymbol{\cdot}}=\mathbf{F}^*(\dot{\tau}+\tau\mathbf{G}+\mathbf{G}^*\tau)\mathbf{F} \tag{4.7}$$

$$\frac{\mathscr{D}^{(-1)}\tau}{\mathscr{D}t}:=\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^*\dot{\mathbf{T}}^{(-1)}\overset{-1}{\mathbf{F}}=\dot{\tau}+\tau\mathbf{W}-\mathbf{W}\tau+(\tau\mathbf{D}+\mathbf{D}\tau) \tag{4.8}$$

对于作为$\mathbf{T}^B$的对称部分：

$$\mathbf{T}^{(1/2)}=\frac{1}{2}(\mathbf{T}^B+\mathbf{T}^{B*})=\frac{1}{2}(\Lambda\mathbf{T}^{(1)}+\mathbf{T}^{(1)}\Lambda)=\frac{1}{2}(\mathbf{R}^*\tau\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^*+\overset{-1}{\mathbf{F}}\tau\mathbf{R}) \tag{4.9}$$

的 Jaumann 应力(3.17)，情况略为复杂些。首先计算$\mathbf{T}^B$的物质导数

$$\dot{\mathbf{T}}^B=\mathbf{R}^*(\dot{\tau}-\tau\mathbf{G}^*-\Omega\tau)\overset{-1}{\mathbf{F}}{}^* \tag{4.10}$$

反变换回 Euler 基，我们有

$$\mathbf{R}\dot{\mathbf{T}}^B\mathbf{F}^*=\dot{\tau}-\tau\mathbf{G}^*-\Omega\tau \tag{4.11}$$

取(4.11)的对称部分，最后得

$$\frac{\mathscr{D}^{(1/2)}\tau}{\mathscr{D}t}:=\frac{1}{2}(\mathbf{R}\dot{\mathbf{T}}^B\mathbf{F}^*+\mathbf{F}\dot{\mathbf{T}}^{B*}\mathbf{R}^*)$$

$$=\dot{\tau}+\frac{1}{2}\tau(\mathbf{W}+\Omega)-\frac{1}{2}(\mathbf{W}+\Omega)\tau-\frac{1}{2}(\tau\mathbf{D}+\mathbf{D}\tau) \tag{4.12}$$

容易验证，应力张量

$$\mathbf{T}^R:=\mathbf{R}^*\tau\mathbf{R} \tag{4.13}$$

是客观性的，但并不共轭于任何应变，因在

$$\dot{w}=\tau:D=(R^*\tau R):(R^*DR) \tag{4.14}$$

中的张量 R^*DR 不是任何应变度量的时间变化率. 应用 T^R 我们也可以定义一个客观性应力率

$$\dot{T}^R=\overline{R^*\tau R}^{\boldsymbol{\cdot}}=R^*(\dot{\tau}+\tau\Omega-\Omega\tau)R \tag{4.15}$$

$$\frac{\mathscr{D}^{(R)}\tau}{\mathscr{D}t}:=R\dot{T}^R R^*=\dot{\tau}+\tau\Omega-\Omega\tau \tag{4.16}$$

这正是 Green 和 McInnis 在[9]引进的修正 Jaumann 导数.

总括这几种特殊情况 (4.6, 8, 12, 16), 通过第二种定义途径, 我们作为猜想建议下述广义Jaumann 导数:

$$\frac{\mathscr{D}^{(n)}\tau}{\mathscr{D}t}:=\dot{\tau}+\tau L-L\tau-m(\tau D+D\tau) \tag{4.17}$$

其中

$$L:=\mu W+(1-\mu)\Omega \qquad (0\leqslant\mu\leqslant 1) \tag{4.18}$$

$$\mu=\mu(n) \tag{4.19}$$

$$m=m(n) \tag{4.20}$$

对于上述各特殊共轭应力，有

$$\mu(n)=|n| \qquad m(n)=n \tag{4.21}$$

对于 T^R, 则 $\mu=m=0$. 是否函数形式 (4.21) 也可用于其余共轭应力导出的应力率, 又是一个尚待进一步探讨的问题.

当参考构型和当前构型重合时, 我们有 $E^{(n)}_{(0)}=0$, $\dot{E}^{(n)}_{(0)}=D$, $F_{(0)}=R_{(0)}=I$,

$$\dot{T}^{(n)}_{(0)}=\left.\frac{\mathscr{D}^{(n)}\tau}{\mathscr{D}t}\right|_{(0)} \tag{4.22}$$

并且各应力值相等, 特别地 $T^{(0)}_{(0)}=\tau$. 下标"(0)"就是用来表示这种情况的. 这时, (3.23) 的物质导数准确地等于

$$\dot{T}^{(n)}_{(0)}=\dot{T}^{(0)}_{(0)}-n(\tau D+D\tau) \tag{4.23}$$

上式在参考构型对每一共轭应力$T^{(n)}$有效.

对这种情况, (4.6)简化为

$$\dot{T}^{(1)}_{(0)}=\left.\frac{\mathscr{D}^{(1)}\tau}{\mathscr{D}t}\right|_{(0)}=\frac{\mathscr{D}\tau}{\mathscr{D}t}-(\tau D+D\tau) \tag{4.24}$$

把这式和 $n=1$ 时的(4.23)式比较, 我们有

$$\dot{T}^{(0)}_{(0)}=\frac{\mathscr{D}\tau}{\mathscr{D}t} \tag{4.25}$$

将(4.25)代回(4.23), 我们最终得

$$\dot{T}^{(n)}_{(0)}=\frac{\mathscr{D}\tau}{\mathscr{D}t}-n(\tau D+D\tau) \tag{4.26}$$

它当参考构型和当前构型重合时成立. Hill 首先给出了 (4.26) 式, 它是本文建议的广义Jaumann导数的一种蜕化情形.

参 考 文 献

[1] Seth, B. R., Generalized strain measure with applications to physical, Second-Order Effects in Elasticity, *Plasticity and Fluid Dynamics*, edited by M. Reiner and D. Abir, New York, Macmillan (1964), 162-171.

[2] Hill, R., Aspects of invariance in solid mechanics, *Adv. in Appl. Mech.*, 18(1978), 1-75.

[3] 郭仲衡,《非线性弹性理论》北京, 科学出版社 (1980).

[4] Guo Zhong-heng, Rates of stretch tensors, (将发表于 *Journal of Elasticity*).

[5] Macveau, D. B., Die Elementararbeit in einem Kontinuum und die Zuordnung von Spannung-und Verzerrungstensoren, *Z. A. M. P.*, 19(1968), 157-185.

[6] Truesdell, C., W. Noll, The Non-Linear Field Theories of Mechanics, *Handbuch der physik*, Vol. Ⅲ/3, Berlin-Heidelberg-New York; Springer, (1965).

[7] Guo Zhong-heng, Time derivative of tensor fields in non-linear continuum mechanics, *Arch. Mech. Stos.*, 15, 1(1963), 131-163.

[8] Eringen, A. C., *Continuum Physics* Vol. Ⅰ, New York; Acad. press. (1975).

[9] Green, A. E., B. C. McInnis, Generalized hypo-elasticity, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, A 67(1967), Part Ⅱ, 220-230

[10] Dienes, J. K., On the analysis of rotation and stress rate in deforming bodies, *Acta Mech.*, 32(1979), 217-232.

Recent Investigations on Strain and Stress-Rates in Nonlinear Continuum Mechanics

Guo Zhong-heng

(Department of Mathematics, Peking University, Beijing)

Abstract

Presenting some recent considerations and results, the present paper deals with two basic concepts of the continuum mechanics; strain- and stress-rates. Upon a brief systematic survey of concepts of strain and stress, a so far unknown explicit expression for the rate of the right stretch tensor is offered in absolute notation. This paper then suggests to distinguish two ways of defining objective stress-rates. Following the second procedure, after analyzing several particular cases, the author proposes a generalized Jaumann flux, which contains the majority of the existing definitions for stress-rate and the Hill's result as well.