

# U型波纹管的非线性特性摄动法计算\*

钱伟长 吴明德

(清华大学, 1982年11月10日收到)

## 摘 要

本文利用圆环壳的一般解<sup>[1]</sup>, 引用小参数摄动理论, 求得U型波纹管的线性精确解和非线性解.

U型波纹管在工程上是一种应用广泛的弹性元件(图1), 因此, 有关这个课题的理论研究和实验分析, 是人们长期注意的问题之一.

研究这类波纹管时, 人们一般把它简化为圆环壳和圆环板的一种组合件. Hamada 及 Takezono 对U型波纹管的环壳部分采用摄动解法. 经过一系列研究, 得出了一些简化设计公式, 并制成了应用图表<sup>[6], [6]</sup>. 但是, 他们的摄动法结果只适用于 $\alpha \leq 0.3$  和  $\mu < 5$  的范围, 而且也受到摄动参数展开取项的限制<sup>[7]</sup>; 他们只考虑了线性变形, 所得的结果没有反映U型波纹管非线性的特点.

Л. Е. Андреева<sup>[8]</sup> 曾用差分法把轴对称壳的非线性微分方程化为差分方程, 再用牛顿法求出U型波纹管的数值解. 这个解法不仅相当麻烦, 而且其结果似有较大的误差.

本文考虑到波纹管的非线性特点主要由环板决定, 特别是目前工程常用的波纹管, 环壳很小, 环板很大, 环板的变形大大超过了环壳的变形, 因此, 本文对环板部分采用了大挠度非线性方程, 而与之相接的环壳, 其基本方程仍采用线性的. 这样简化, 就可以利用作者已导出的圆环壳的精确解<sup>[1]</sup>, 并引用小参数摄动法, 求出U型波纹管各级摄动的内力及变形. 第一级摄动解, 实际上就是U型波纹管的线性精确解析解.

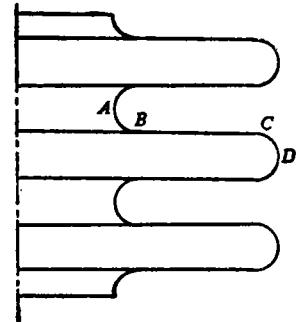


图 1

## 一、符号及基本方程

取U型波纹管的一段计算长度 $ABCD$ (图2). 为了求解方便, 假设壳在 $B$ 点的 $z$ 向位移为零, 这个假设并不失去问题的一般性质.

$a_1, a_2$ ——圆环壳子午平面内曲率半径;

\* 参加这项工作的还有郑思樑、谢志成、王瑞五.

$R_1, R_2$ ——圆环壳子午平面内圆心到旋转轴的距离;

$h_1, h_2, h$ ——分别表示两部分环壳及环板的厚度;

$E, \nu$ ——弹性模量和波桑系数;

$P_e, q$ ——表示波纹管的外集中力和均布力,

它们的正向如图 2 所示;

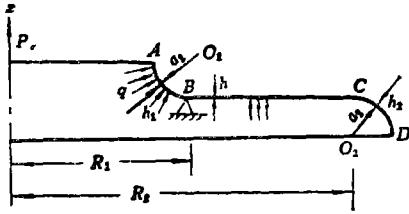


图 2

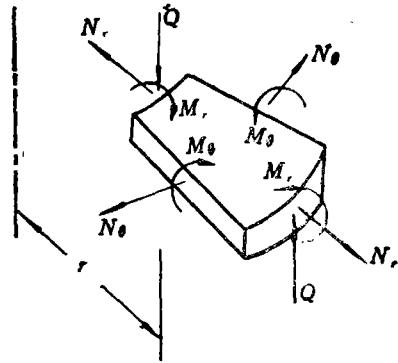


图 3

$$\mu_1 = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{a_1^2}{R_1 h_1}; \quad \mu_2 = \sqrt{3(1-\nu^2)} \frac{a_2^2}{R_2 h_2};$$

$$\alpha_1 = a_1/R_1; \quad \alpha_2 = a_2/R_2;$$

$\mu_1, \mu_2, \alpha_1, \alpha_2$ ——环壳的几何参数。

U型波纹管分成环板和圆环壳两部分:

### 1. 环板的基本方程

环板单元的受力如(图3)所示, 其大挠度卡门方程为:

$$\left. \begin{aligned} D \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r \frac{dw}{dr} - \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r N_r \frac{dw}{dr} &= -q \\ r \frac{d}{dr} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} r^2 N_r + \frac{Eh}{2} \left( \frac{dw}{dr} \right)^2 &= 0 \\ N_\theta &= -\frac{d}{dr} (r N_r) \end{aligned} \right\} \quad (1.1)$$

其中  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$  为板的抗弯刚度;  $w(r)$  为板的挠度。

### 2. 圆环壳的基本方程

环壳的内力和位移如图 4 所示。在 Love-Kirchhoff 弹性薄壳假定下, В. В. Новожилов 导出的轴对称圆环壳复变方程为:

$$(1 + \alpha \sin \varphi) \frac{d^2 V}{d\varphi^2} - \alpha \cos \varphi \frac{dV}{d\varphi} + 2\mu i \sin \varphi V = 2\mu P_0 \cos \varphi \quad (1.2)$$

其中,

$$V = \frac{-4\mu^2 D}{\alpha a^2} (1 + \alpha \sin \varphi) \chi + i \left[ \frac{2\mu}{\alpha} \frac{(1 + \alpha \sin \varphi)^2}{\sin \varphi} Q - 2\mu \frac{Q_0}{\alpha} \text{ctg } \varphi \right]$$

$$P_0 = -\frac{1}{2} \alpha q a i + \frac{Q_0}{\alpha} 2\mu$$

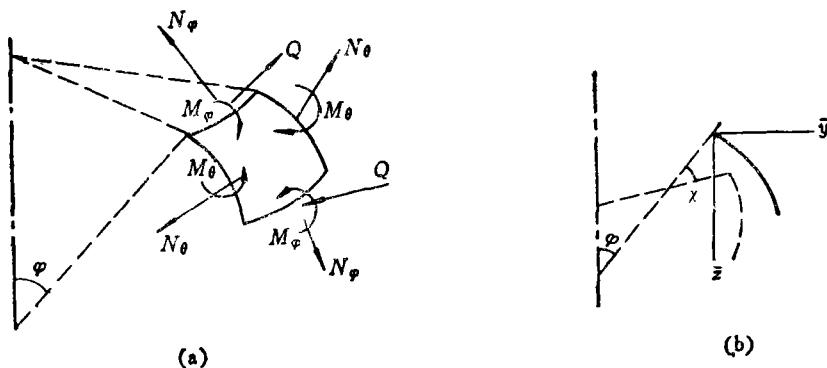


图 4

$Q_0$  为  $\varphi=0$  处的剪力;  $\chi$  和  $Q$  分别为壳的轴向转角变形和剪力。

## 二、环板摄动法解

环板单元的正向受力如 (图 3) 所示。设  $u(r)$  表示板的径向位移, 引入无量纲量:

坐标变量:

$$\xi = r/R_1$$

板的薄膜力:

$$S_r = N_r \frac{R_1^2}{D}, \quad S_\theta = N_\theta \frac{R_1^2}{D}$$

板的剪力和弯矩:

$$V_r = Q \frac{R_1^3}{Dh}, \quad m_r = M_r \frac{R_1^3}{Dh}, \quad m_\theta = M_\theta \frac{R_1^3}{Dh}$$

位移:

$$y = v'w/h, \quad U = v'u/h$$

外力:

$$p = \frac{v'}{Dh} qR_1^3$$

其中  $v' = \sqrt{6(1-\nu^2)}$ , 于是, 圆薄板的大挠度方程<sup>(3)</sup>:

$$\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{dy}{d\xi} - \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi S_r \frac{dy}{d\xi} = -p \quad (2.1)$$

$$\xi \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi^2 S_r + \left( \frac{dy}{d\xi} \right)^2 = 0 \quad (2.2)$$

$$S_\theta = \frac{d}{d\xi} \xi S_r \quad (2.3)$$

再加上位移与内力关系,

$$U/\xi = E^*(S_\theta - \nu S_r) \quad (2.4)$$

$$m_r = -\frac{1}{v'} \left( \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{\nu}{\xi} \frac{dy}{d\xi} \right) \quad (2.5)$$

$$m_\theta = -\frac{1}{v'} \left( \nu \frac{d^2 y}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{dy}{d\xi} \right) \quad (2.6)$$

$$V_r = \frac{1}{v'} \frac{1}{\xi} \left( \frac{d}{d\xi} \xi \frac{d^2 y}{d\xi^2} - \frac{1}{\xi} \frac{dy}{d\xi} \right) \quad (2.7)$$

能确定环板全部内力和变形。式中  $E^* = \frac{1}{2\nu'} \frac{h}{R_1}$ 。

用摄动法求解时，我们引用环板外边  $C$  点的挠度  $W_m \left( = \nu' \frac{w\sigma}{h} \right)$  为摄动参数，并把所有的物理量都展开为  $W_m$  的幂级数。例如，

$$\left. \begin{aligned} y(\xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} y_i(\xi) W_m^i \\ \theta(\xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} \theta_i(\xi) W_m^i \\ S_r(\xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} S_{r,i}(\xi) W_m^i \\ p(\xi) &= \sum_{i=1}^{\infty} p_i(\xi) W_m^i \end{aligned} \right\} \quad (2.8)$$

将(2.8)代入(2.1)及(2.2)，收集  $W_m$  同幂次项，即得各级摄动方程：

$$W_m^1: \left. \begin{aligned} D_A(\xi \theta_1) &= -p_1 \\ D_C(\xi^2 S_{r1}) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

$$W_m^2: \left. \begin{aligned} D_A(\xi \theta_2) - D_B(\xi S_{r1} \theta_1) &= -p_2 \\ D_C(\xi^2 S_{r2}) + \theta_1^2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

$$W_m^3: \left. \begin{aligned} D_A(\xi \theta_3) - D_B(\xi S_{r1} \theta_2 + \xi S_{r2} \theta_1) &= -p_3 \\ D_C(\xi^2 S_{r3}) + 2\theta_1 \theta_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

⋮

$$\left. \begin{aligned} D_A &= \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \xi \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \\ D_B &= \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \\ D_C &= \xi \frac{d}{d\xi} \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

各级摄动方程的解可写为

$$\left. \begin{aligned} \theta_i &= \frac{1}{2} A_1^{(i)} \xi \left( \ln \xi - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{2} A_2^{(i)} \xi + A_3^{(i)} / \xi + \theta_i^*(\xi) \\ S_{r,i} &= A_4^{(i)} + A_5^{(i)} / \xi^2 + S_{r,i}^*(\xi) \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

式中  $A_j^{(i)}$  表示  $(i)$  级摄动方程的积分常数，它们要靠环板的边界条件和连接条件来确定； $\theta_i^*(\xi)$ ， $S_{r,i}^*(\xi)$  表示  $(i)$  级摄动方程的特解。把(2.13)代入(2.3)~(2.7)，将求得全部内力和变形。

## 三、环壳的线性解

在文[2]和[4]中,已经给出了圆环壳在轴向力和均布力作用下的全部内力和变形.为了使环壳和环板各种物理量的量纲统一,也要把壳的内力和变形按环板的规定化为无量纲量.由于在环板中已把载荷 $p$ 展开为参数 $W_m$ 的幂级数,在环壳中也应把总的轴向力 $P_0$ 化为无量纲量后展开为 $W_m$ 的幂级数,即

$$\left. \begin{aligned} P &= P_0 \frac{R_1^2}{Dh} \\ P &= \sum_{i=1}^{\infty} P_i W_m^i \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

所以,下面利用环壳理论求得的只是相应于各级摄动的载荷系数 $p_i$ 和 $P_i$ 作用下环壳的线性内力和变形.

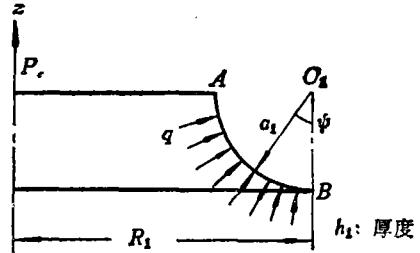


图 5

取 $AB$ 段环壳(图5),根据环壳理论<sup>[2],[4]</sup>,得各级内力:

$$\left. \begin{aligned} N_{\varphi_1}^{(i)} &= \frac{2 \cos \psi}{(1 - \alpha_1 \sin \psi)^2} \left[ Q_{01}^{(i)} K_1 - T_1^{(i)} J_1 + B_R^{(i)} \Omega_1 + B_I^{(i)} \Omega_2 \right] \\ &\quad + \frac{\alpha_1 - \sin \psi}{(1 - \alpha_1 \sin \psi)^2} Q_{01}^{(i)} - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu'} \frac{\alpha_1 h}{R_1^2} p_i \frac{2 - \alpha_1 \sin \psi}{1 - \alpha_1 \sin \psi} \\ N_{\theta_1}^{(i)} &= -\frac{2}{\alpha_1 (1 - \alpha_1 \sin \psi)} \left[ Q_{01}^{(i)} \frac{dK_1}{d\psi} - T_1^{(i)} \frac{dJ_1}{d\psi} + B_R^{(i)} \frac{d\Omega_1}{d\psi} + B_I^{(i)} \frac{d\Omega_2}{d\psi} \right] \\ &\quad - \frac{2 \cos \psi}{(1 - \alpha_1 \sin \psi)^2} \left[ Q_{01}^{(i)} K_1 - T_1^{(i)} J_1 + B_R^{(i)} \Omega_1 + B_I^{(i)} \Omega_2 \right] \\ &\quad - \frac{\alpha_1 - \sin \psi}{(1 - \alpha_1 \sin \psi)^2} Q_{01}^{(i)} - \frac{1}{2} \frac{1}{\nu'} \frac{\alpha_1 h}{R_1^2} p_i \\ M_{\varphi_1}^{(i)} &= \frac{\alpha_1}{\mu_1 h} \frac{1}{1 - \alpha_1 \sin \psi} \left[ Q_{01}^{(i)} \frac{dJ_1}{d\psi} + T_1^{(i)} \frac{dK_1}{d\psi} + B_I^{(i)} \frac{d\Omega_1}{d\psi} \right. \\ &\quad \left. - B_R^{(i)} \frac{d\Omega_2}{d\psi} \right] + \frac{\alpha_1 \alpha_1}{\mu_1 h} \frac{(1 - \nu) \cos \psi}{(1 - \alpha_1 \sin \psi)^2} \left[ Q_{01}^{(i)} J_1 + T_1^{(i)} K_1 \right. \\ &\quad \left. + B_I^{(i)} \Omega_1 - B_R^{(i)} \Omega_2 \right] \\ M_{\theta_1}^{(i)} &= \frac{\nu \alpha_1}{\mu_1 h} \frac{1}{1 - \alpha_1 \sin \psi} \left[ Q_{01}^{(i)} \frac{dJ_1}{d\psi} + T_1^{(i)} \frac{dK_1}{d\psi} + B_I^{(i)} \frac{d\Omega_1}{d\psi} \right. \\ &\quad \left. - B_R^{(i)} \frac{d\Omega_2}{d\psi} \right] - \frac{\alpha_1 \alpha_1}{\mu_1 h} \frac{(1 - \nu) \cos \psi}{(1 - \alpha_1 \sin \psi)^2} \left[ Q_{01}^{(i)} J_1 + T_1^{(i)} K_1 \right. \\ &\quad \left. + B_I^{(i)} \Omega_1 - B_R^{(i)} \Omega_2 \right] \\ Q_1^{(i)} &= -\frac{R_1}{h} \frac{2 \sin \psi}{(1 - \alpha_1 \sin \psi)^2} \left[ Q_{01}^{(i)} K_1 - T_1^{(i)} J_1 + B_R^{(i)} \Omega_1 + B_I^{(i)} \Omega_2 \right] \\ &\quad - \frac{R_1}{h} \frac{\cos \psi}{(1 - \alpha_1 \sin \psi)^2} Q_{01}^{(i)} \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

环壳的转角  $\chi$ 、水平位移  $\bar{y}$  以及垂直相对位移  $\bar{z}$  分别为:

$$\left. \begin{aligned} \chi_1^{(i)} &= -\frac{2\mu_1}{\nu'} \left( \frac{h^2}{R_1 h_1} \right) \frac{1}{\alpha_1^2 (1 - \alpha_1 \sin \psi)} \left( Q_{01}^{(i)} J_1 + T_1^{(i)} K_1 + B_1^{(i)} \Omega_1 \right. \\ &\quad \left. - B_1^{(i)} \Omega_2 \right) \\ \bar{y}_1^{(i)} &= -\frac{1}{\nu'} \left( \frac{h^2}{R_1 h_1} \right) \left[ \frac{1}{\alpha_1} \left( Q_{01}^{(i)} \frac{dK_1}{d\psi} - T_1^{(i)} \frac{dJ_1}{d\psi} + B_1^{(i)} \frac{d\Omega_1}{d\psi} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_1^{(i)} \frac{d\Omega_2}{d\psi} \right) + \frac{(1+\nu) \cos \psi}{1 - \alpha_1 \sin \psi} \left( Q_{01}^{(i)} K_1 - T_1^{(i)} J_1 + B_1^{(i)} \Omega_1 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + B_1^{(i)} \Omega_2 \right) + \frac{1}{2} \frac{(1+\nu)(\alpha_1 - \sin \psi)}{1 - \alpha_1 \sin \psi} Q_{01}^{(i)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4\nu'} \frac{h}{R_1} \frac{\alpha_1}{R_1} p_i (1 - 2\nu) \left( 1 - \frac{1-\nu}{1-2\nu} \alpha_1 \sin \psi \right) \right] \\ \bar{z}_1^{(i)} &= \frac{2}{\nu'} \left( \frac{h^2}{R_1 h_1} \right) \frac{\mu_1}{\alpha_1} \int_0^\psi \frac{\cos \psi}{1 - \alpha_1 \sin \psi} \left( Q_{01}^{(i)} J_1 + T_1^{(i)} K_1 \right. \\ &\quad \left. + B_1^{(i)} \Omega_1 - B_1^{(i)} \Omega_2 \right) d\psi \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

式中转角  $\chi_1$  相当于壳的实际转角乘以  $\nu' R_1/h$ , 其余各无量纲的内力和位移的定义均与环板处的相同。(3.3)式中的  $B_1^{(i)}$ ,  $B_1^{(i)}$  各级振动的待定积分常数, 它们将由圆环壳与环板的连接条件来确定。式中

$$\left. \begin{aligned} Q_{01}^{(i)} &= -\frac{h}{2R_1} \left( \frac{P_i}{\pi} + \frac{p_i}{\nu'} \right) \\ T_1^{(i)} &= -\frac{\alpha_1^2}{4\mu_1 \nu'} \cdot \frac{\alpha_1 h}{R_1^2} p_i \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

$$\left. \begin{aligned} J_1(\psi) &= \sum_{n=1}^{\infty} J_n \sin \left( \psi + \frac{\pi}{2} \right) \\ K_1(\psi) &= \sum_{n=1}^{\infty} K_n \sin \left( \psi + \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

它们所组成的复数

$$A_n = J_n + iK_n \quad (3.6)$$

由下面连分式确定:

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{\frac{1}{\mu_1} - i \left( 1 + i \frac{2 \cdot 3}{2} \frac{\alpha_1}{\mu_1} \right) \frac{A_2}{A_1}} \\ \frac{A_n}{A_{n-1}} &= \frac{i \left[ 1 + i \frac{(n-1)(n-2)}{2} \frac{\alpha_1}{\mu_1} \right]}{\frac{n^2}{\mu_1} - i \left[ 1 + i \frac{(n+1)(n+2)}{2} \frac{\alpha_1}{\mu_1} \right]} \frac{A_{n+1}}{A_n} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

( $n=1, 2, 3, \dots$ )

(3.3)式中  $\Omega_1$ ,  $\Omega_2$  定义为:

$$\left. \begin{aligned} \Omega_1(\psi) &= \left[ G_1 \cos \gamma_1 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) + F_2 \sin \gamma_1 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) \right] \operatorname{sh} \beta_1 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) \\ &\quad + \left[ -G_2 \sin \gamma_1 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) - F_1 \cos \gamma_1 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) \right] \operatorname{ch} \beta_1 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) \\ \Omega_2(\psi) &= \left[ G_1 \sin \gamma_1 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) - F_2 \cos \gamma_1 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) \right] \operatorname{ch} \beta_1 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) \\ &\quad + \left[ G_2 \cos \gamma_1 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) - F_1 \sin \gamma_1 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) \right] \operatorname{sh} \beta_1 \left( \frac{\pi}{2} - \psi \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

(3.8)式中的函数  $F_1$ ,  $F_2$ ,  $G_1$ ,  $G_2$  分别为:

$$\left. \begin{aligned} F_1(\psi) &= - \sum_{n=1,3,5}^{\infty} p_n \cos n\psi - \sum_{n=2,4,6}^{\infty} q'_n \sin n\psi \\ F_2(\psi) &= - \sum_{n=1,3,5}^{\infty} q_n \cos n\psi + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} p'_n \sin n\psi \\ G_1(\psi) &= 1 + \sum_{n=2,4,6}^{\infty} p_n \cos n\psi + \sum_{n=1,3,5}^{\infty} q'_n \sin n\psi \\ G_2(\psi) &= \sum_{n=2,4,6}^{\infty} q_n \cos n\psi - \sum_{n=1,3,5}^{\infty} p'_n \sin n\psi \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

上式的  $p_n$ ,  $p'_n$ ,  $q_n$ ,  $q'_n$  由下列两个复数确定:

$$\begin{aligned} a_n + ib_n, & \quad a_{-n} + ib_{-n} \\ p_n = \frac{1}{2}(a_n + a_{-n}), & \quad p'_n = \frac{1}{2}(a_n - a_{-n}) \\ q_n = \frac{1}{2}(b_n + b_{-n}), & \quad q'_n = \frac{1}{2}(b_n - b_{-n}) \end{aligned}$$

而这两个复数又由下列连分式确定:

$$\frac{c_n}{c_0} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n), \quad \frac{c_{-n}}{c_0} = \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n})$$

$$\frac{c_n}{c_{n-1}} = \frac{- \left\{ \mu_1 - \frac{\alpha_1}{2} i [\lambda_1 + i(n-1)] [\lambda_1 + i(n-2)] \right\}}{(\lambda_1 + in)^2 - \left\{ \mu_1 - \frac{\alpha_1}{2} i [\lambda_1 + i(n+1)] [\lambda_1 + i(n+2)] \right\}} \frac{c_{n+1}}{c_n} \quad (n > 0) \quad (3.10)$$

$$\frac{c_n}{c_{n+1}} = \frac{\left\{ \mu_1 - \frac{\alpha_1}{2} i [\lambda_1 + i(n+1)] [\lambda_1 + i(n+2)] \right\}}{(\lambda_1 + in)^2 + \left\{ \mu_1 - \frac{\alpha_1}{2} i [\lambda_1 + i(n-1)] [\lambda_1 + i(n-2)] \right\}} \frac{c_{n-1}}{c_n} \quad (n < 0) \quad (3.11)$$

式中  $\lambda_1$  是一个复数,

$$\lambda_1 = \beta_1 + i\gamma_1$$

它的实部  $\beta_1$  和虚部  $\gamma_1$  可根据环壳的  $\alpha_1$  及  $\mu_1$  值, 按[1]文中的计算结果, 用双插值法求得.

对第二部分壳 CD (图 6), 将 AB 段公式中的常数  $B_1^{(1)}$ ,  $B_1^{(2)}$  改为  $C_1^{(1)}$ ,  $C_1^{(2)}$ , 将(3.2)

及(3.3)式中的  $Q_{01}^{(i)}$  及  $T_1^{(i)}$  改为

$$\left. \begin{aligned} Q_{02}^{(i)} &= \frac{1}{2} \frac{h}{R_2} \left( \frac{P_i}{\pi} + \frac{p_i}{\nu'} \frac{R_2^2}{R_1^2} \right) \\ T_2^{(i)} &= \frac{1}{4} \frac{\alpha_i^2}{\mu_2 \nu'} \frac{a_2 h}{R_1^2} p_i \end{aligned} \right\} \quad (3.12)$$

并将(3.8)式改为

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Omega}_1(\varphi) &= - \left[ G_1 \cos \gamma_2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) + F_2 \sin \gamma_2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] \text{sh} \beta_2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \\ &\quad + \left[ G_2 \sin \gamma_2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) + F_1 \cos \gamma_2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] \text{ch} \beta_2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \\ \bar{\Omega}_2(\varphi) &= \left[ -G_1 \sin \gamma_2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) + F_2 \cos \gamma_2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] \text{ch} \beta_2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \\ &\quad + \left[ -G_2 \cos \gamma_2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) + F_1 \sin \gamma_2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \right] \text{sh} \beta_2 \left( \frac{\pi}{2} - \varphi \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.13)$$

再将(3.2)~(3.5)式中所有下标“1”改为“2”，将(3.2)、(3.3)、(3.5)、(3.9)中的  $\psi$  用  $\varphi - \pi$  代入，即得出第二部分壳全部各级摄动的内力和位移。

应该指出，(3.2)、(3.3)式所表示的内力和位移，并不是环壳的实际内力和位移，而只是相当于各级外力系数  $p_i$  和  $P_i$  作用下壳的内力和位移系数。为了求得实际的内力和位移，还要利用类似(2.8)式的幂级数展开式。例如，求环壳的弯矩  $M_\varphi$  和转角  $\chi$  时，要用

$$\left. \begin{aligned} M_\varphi &= \sum_{i=1}^{\infty} M_\varphi^{(i)} W_m^i \\ \chi &= \sum_{i=1}^{\infty} \chi^{(i)} W_m^i \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

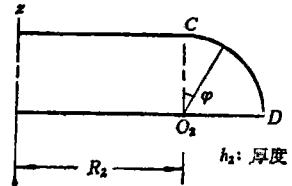


图 6

#### 四、连接条件和边界条件

在环板的各级解中，包含 6 个待定常数  $A_i^{(i)}$  和未定的载荷系数  $p_i$  或  $P_i$ ；在环壳解中，各级摄动解包含 4 个待定常数  $B_1^{(i)}$ ， $B_2^{(i)}$ ， $C_1^{(i)}$ ， $C_2^{(i)}$ ，它们都要由环壳与环板的连接条件和边界条件来确定。

在 B 点， $\xi=1$ ，环板与环壳连接，即

$$\left. \begin{aligned} V_{i0} &= -Q_{i0}^{(i)} \\ S_{r_{i0}} &= N_{\varphi_1}^{(i)}(0) \\ m_{r_{i0}} &= -M_{\varphi_1}^{(i)}(0) \\ \theta_{i0} &= \chi_1^{(i)}(0) \\ U_{i0} &= \bar{y}_1^{(i)}(0) \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

环板在  $\xi = \alpha_r$  (C点) 与第二部分环壳连接, 故

$$\left. \begin{aligned} S_{rin} &= N_{\varphi_2}^{(4)}(0) \\ m_{rin} &= M_{\varphi_2}^{(4)}(0) \\ \theta_{in} &= \chi_2^{(4)}(0) \\ U_{in} &= \bar{y}_2^{(4)}(0) \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

除上述连接条件外, 环板在边界  $\xi = 1$  处还有边界条件  $y = 0$ , 即  $y_i(1) = 0$ . 在  $\xi = \alpha_r$  处, 环板的挠度应等于  $W_m$ , 即

$$\xi = \alpha_r, \quad y = W_m = y_1 W_m + y_2 W_m^2 + y_3 W_m^3 + \dots$$

故有

$$y_1 = 1, \quad y_2 = 0, \quad y_3 = 0, \quad \dots \quad (4.3)$$

用以确定未知的载荷系数  $p_i$  或  $P_i$ .

### 五、计算例题\*

按上述理论, 分别计算图 7 所示 U 型波纹管在集中力  $P_c$  和均布力  $q$  作用下的内力和变形, 波纹管的已知参数:  $a_1 = a_2 = 2.5\text{cm}$ ,  $R_1 = 20.5\text{cm}$ ,  $R_2 = 26.5\text{cm}$ ,  $h_1 = h_2 = h = 0.2\text{cm}$ ,  $E = 2.1 \times 10^6 \text{kg/cm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ . 图 8, 9 的各曲线表示该波纹管的线性内力. 为了验证它的正确性, 我们用有限元法<sup>(6)</sup>, 求出该波纹管的数值解, 并将其结果画在图 8, 9 上. 表 1 列出波纹管的线性轴向变形, 即 AD 两点的相对轴向位移, 并给出有限元法计算结果.

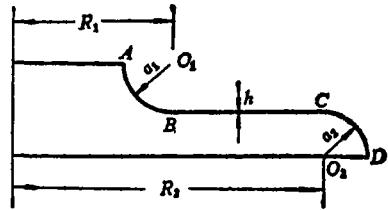


图 7

表 1 U型波纹管的线性位移

	集 中 力	均 布 力
本文理论解	1.275	1.276
有限元法解	1.303	1.305
误 差	2%	2%

按本文摄动法求得的外力与波纹管轴向位移的非线性关系为:

集中力

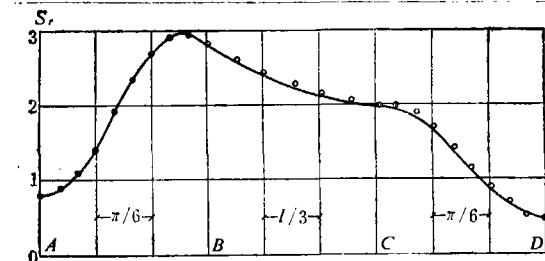
$$\frac{P}{992.41} = \left(\frac{W_c}{h}\right) + 6.711 \times 10^{-2} \left(\frac{W_c}{h}\right)^2 + 1.521 \times 10^{-2} \left(\frac{W_c}{h}\right)^3 \quad (5.1)$$

均布力

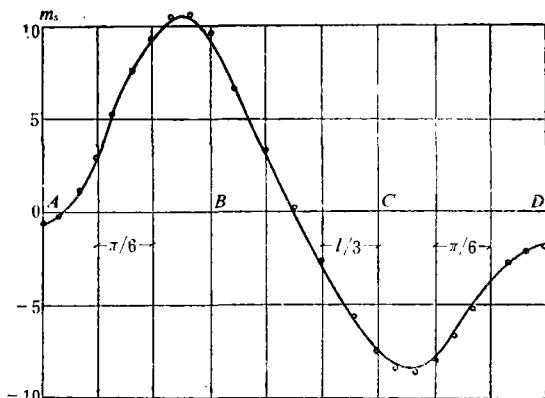
$$\frac{p}{559.01} = \left(\frac{W_c}{h}\right) + 8.289 \left(\frac{W_c}{h}\right)^2 + 1.752 \left(\frac{W_c}{h}\right)^3 \quad (5.2)$$

其中  $W_c$  为环板 C 点的挠度,  $h$  为板的厚度,  $P$  及  $p$  均为外载荷的无量纲量. 若将 C 点的挠度换算为 AD 两点的相对轴向位移  $\bar{z}$ , 则有

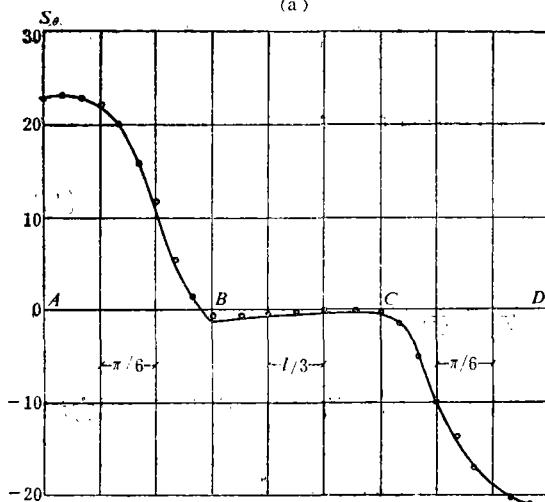
\* 计算结果均用本文规定的无量纲量表示.



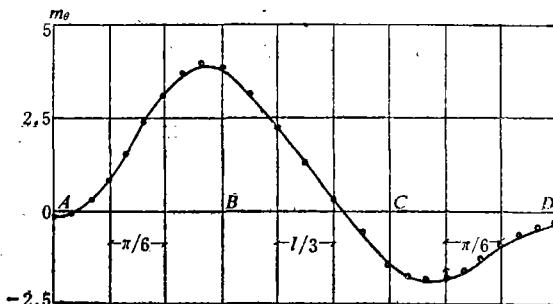
(a)



(c)

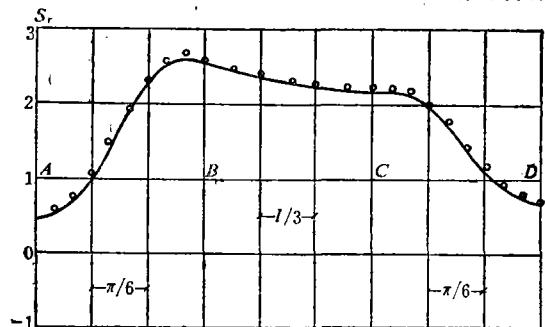


(b)

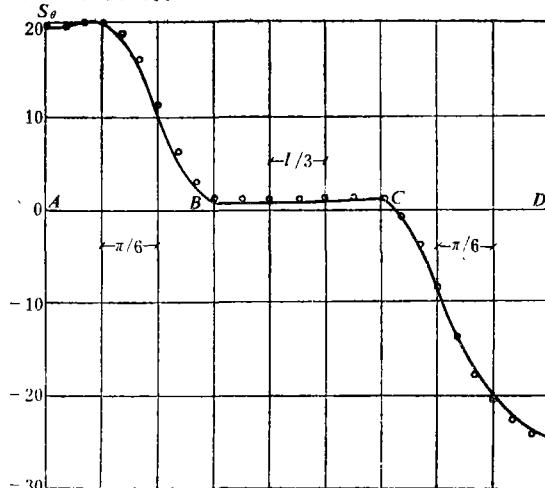


(d)

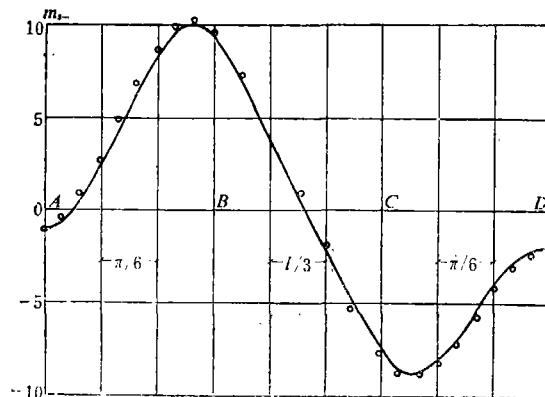
图 8 集中力作用下U型壳的内力



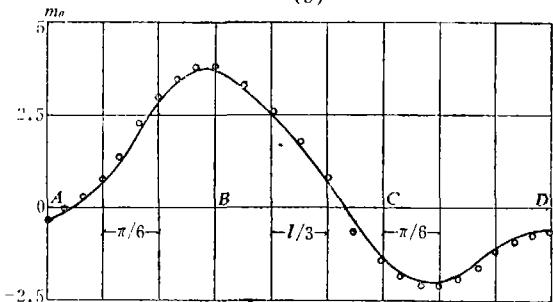
(a)



(b)



(c)



(d)

图 9 均布力作用下U型壳的内力

$$\frac{P}{778.11} = \left(\frac{\bar{z}}{h}\right) + 6.117 \times 10^{-2} \left(\frac{\bar{z}}{h}\right)^2 + 9.872 \times 10^{-3} \left(\frac{\bar{z}}{h}\right)^3 \quad (5.3)$$

$$\frac{p}{438.10} = \left(\frac{\bar{z}}{h}\right) + 7.293 \times 10^{-2} \left(\frac{\bar{z}}{h}\right)^2 + 1.1336 \times 10^{-2} \left(\frac{\bar{z}}{h}\right)^3 \quad (5.4)$$

图 10 表示出外力与位移的关系曲线。

为了进行对比,本文计算了 Андреева 著作 [8] 中一个 U 型波纹管模型的结果 ( $R_1=13.5\text{mm}$ ,  $R_2=18.25\text{mm}$ ,  $a=0.75\text{mm}$ ,  $h=0.12\text{mm}$ ,  $E=1\sim 1.35 \times 10^4\text{kg/mm}^2$ ,  $\nu=0.33$ ,  $q=0.004\text{kg/mm}^2$ ), 并用有限元法进行校核, 图 11 表示出按本文方法和有限元法求得的线性内力结果。这两种方法求得的 AD 点的相对线性位移:

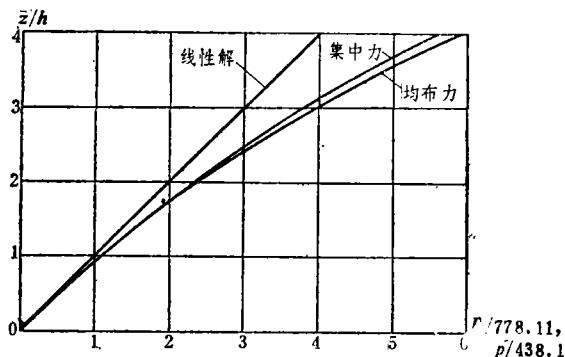


图 10 载荷与位移关系曲线

$$\frac{\bar{z}_{\max}}{h} = 3.12 \quad (\text{本文解析解})$$

$$\frac{\bar{z}_{\max}}{h} = 3.11 \quad (\text{有限元法解})$$

按本文方法求得的内压  $p$  与位移的非线性关系为

$$\frac{p}{376.588} = \frac{\bar{z}}{h} + 2.6676 \times 10^{-2} \left(\frac{\bar{z}}{h}\right)^2 + 1.1879 \times 10^{-2} \left(\frac{\bar{z}}{h}\right)^3$$

图 12 表示出此方程的曲线\*; 图中也给出 Андреева 的理论计算结果和实验结果。由于 Андреева 对此模型没有进行内力计算, 故在图 11 中没有画出 Андреева 的计算结果。

图 13 给出我们计算的 Андреева 另一个模型的内力 ( $R_1=0.352\text{cm}$ ,  $R_2=0.418\text{cm}$ ,  $a=0.032\text{cm}$ ,  $h=0.0064\text{cm}$ ,  $E=2.1 \times 10^6\text{kg/cm}^2$ ,  $\nu=0.3$ ,  $q=1\text{kg/cm}^2$ ), 同时也把 Андреева 的计算结果画在图上。

## 六、结 论

由图 8, 9 看出, 本文的线性解与有限元法求得的结果符合得很好, 这说明本文的方法是正确的。由于在薄壳的精度范围内没有略去方程中的任何量, 因此, 只要在薄壳的条件下, 本文的解将到处适用, 没有象 Hamada 及 Takezono 所要求的对波纹管的限制。

由公式 (5.3)、(5.4) 可见, 对图 7 所示的波纹管, 当壳的相对位移  $\bar{z}$  等于厚度  $h$  时, 非线性项约占线性项的 6~7%; 若位移为厚度的两倍时, 非线性项则占 15~18%。当然, 不同参数的 U 型波纹管, 其非线性性质是不相同的。对 Андреева 模型, 本文求出的非线性对线性的偏离与 Андреева 计算的结果相符; 但对该模型的材料 БрБ2, 若选用弹性模数  $E=1.35 \times 10^4\text{kg/mm}^2$ , 则她计算的线性位移与本文所得的结果相差甚远。由于本文所得的该模型的线性内力和位移与用有限元法求得的结果完全一致, 故疑 Андреева 的结果有误; 也可能因为选用的弹性模量与实际材料不符。由图 12 可以看出, 若选用  $E=1 \times 10^4$

\*图 12 表示 8 个波的波纹管的位移与内压关系曲线。

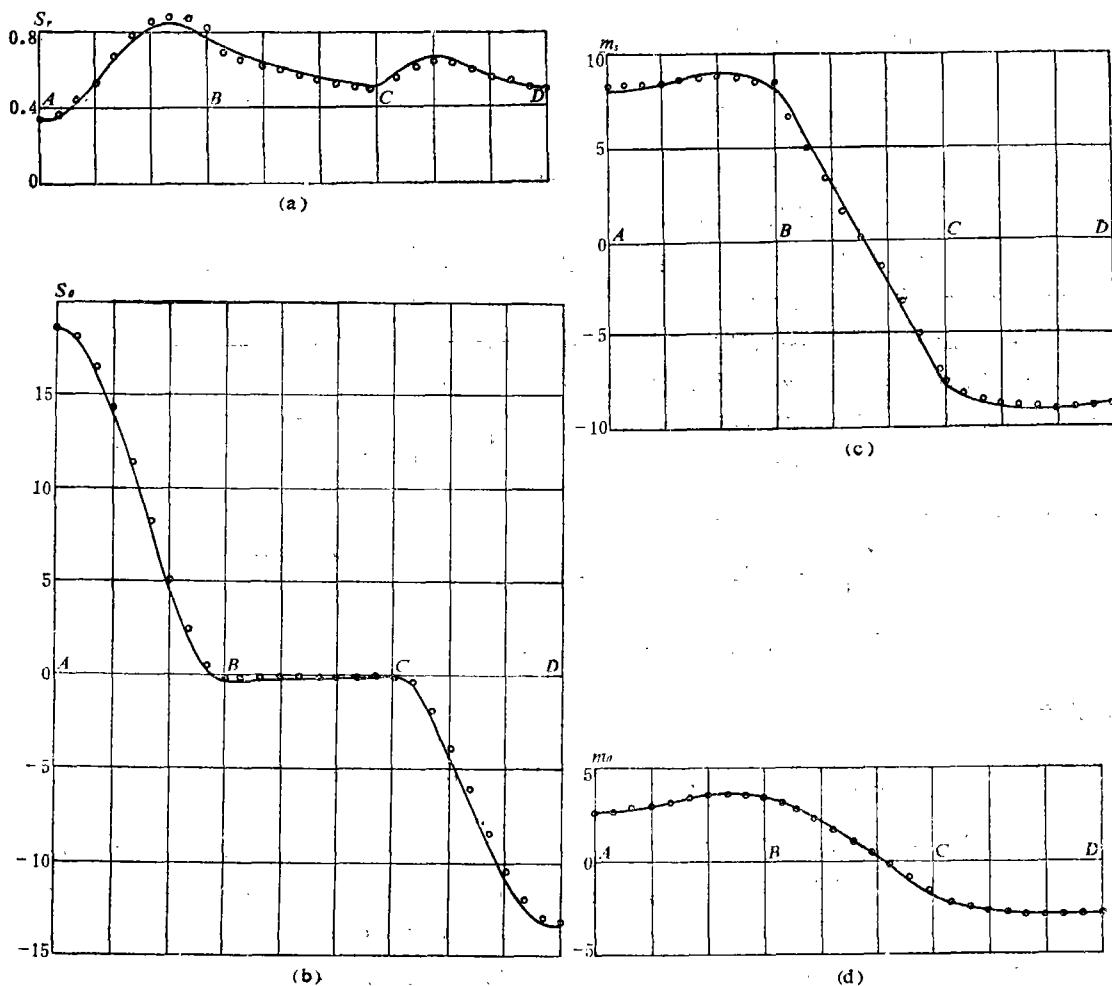


图11 Андреева 模型的内力

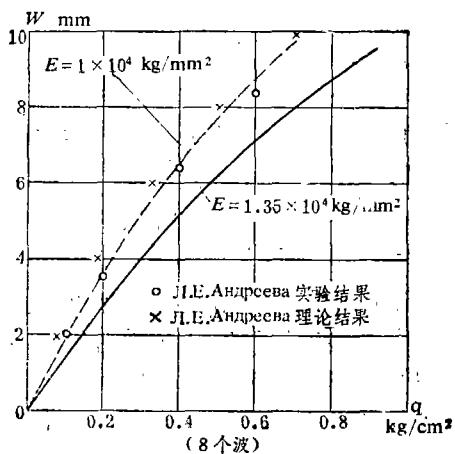


图12 Андреева 模型的位移和内压关系

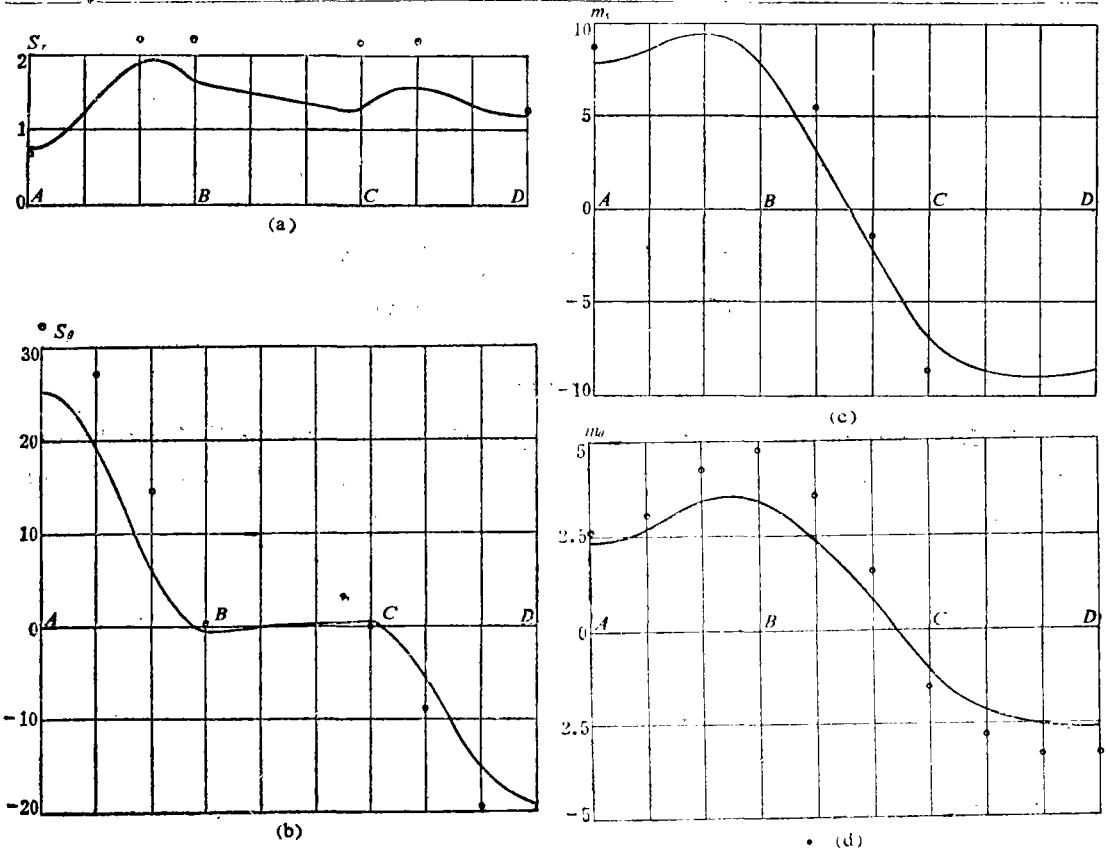


图13 Андреева 模型的内力计算

$\text{kg/mm}^2$ , 则本文计算结果相当符合 Андреева 的实验结果。

对另一个模型, Андреева 求出了它的内力分布, 用本文方法校核她的结果, 发现她的理论计算结果都偏大, 有些地方偏大得相当多。

按摄动法求得U型波纹管的非线性解与非线性板理论的实用范围是一致的。这种方法与非线性有限元法计算相比, 具有计算迅速, 省工省时的特点。

### 参 考 文 献

- [1] 钱伟长、郑思探, 轴对称圆环壳的一般解, 应用数学和力学, 1, 3(1980).
- [2] 钱伟长、郑思探, 半圆弧波纹管的计算——环壳一般解的应用, 应用数学和力学, 2, 1(1981).
- [3] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌、叶开沅, 弹性圆薄板大挠度问题, 中国科学院 (1954).
- [4] 陈山林, S型波纹管的轴对称应力和位移, 清华大学研究生毕业论文(1980).
- [5] Hamada, M. and S. Takezono, Strength of U-shaped bellows, *Bull. JSME*, 18, 32 (1965).
- [6] Hamada, M. and S. Takezono, Strength of U-shaped bellows, *Bull. JSME*, 19, 35 (1966).
- [7] Ôta, T. and M. Hamada, On the strength of toroidal shell, *Bull. JSME*, 16, 24 (1963).
- [8] Андреева, Л. Е., Сильфоны, Расчет и Проектирование, Машиностроение(1975).
- [9] 谢志成、郑思探、付承诵, 有曲率突变轴对称壳(波纹管)的有限元解, 应用数学和力学, 2, 1 (1981).

# The Nonlinear Characteristics of U-Shaped Bellows —Calculations by the Method of Perturbation

Chien Wei-zang    Wu Ming-de

(*Qinghua University, Beijing*)

## Abstract

In this paper, the linear exact solution and nonlinear solution for U-shaped bellows have been obtained by using the general solution of circular ring shell<sup>(1)</sup> and the method of perturbation.