应用数学和力学，第4卷第5期（1983年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

空间机构的向量分析——Ⅲ
空间机构运动学

余 燊

（华南工学院，1982年6月18日收到）

摘 要

用简单的向量代数方法对第Ⅰ部份和第Ⅱ部份所讨论的空间机构进行瞬时运动学分析。

一、前 言

空间机构运动学包括：给出输入杆的速度旋量$[\vec{\Omega}_A,\ \vec{v}(A)]$确定机构中其它杆件相应的速度旋量。本文对符号作出如下规定：$\vec{\Omega}_A$表示刚体相对于任一基点A的角速度，$\vec{v}(A)$表示A点的速度。在解题时将会出现这样的矢量方程式：

$$\vec{\Omega}\wedge\vec{a}+x\vec{b}=\vec{c} \tag{1.1}$$

式中$\vec{\Omega}$和x是未知量，而式子的解法将证明是简便的。

下面，本文将依次对P-P-G-C，R-G-C-R，R-G-G-R以及H-R-G-R机构进行分析，当然对这些机构的分析有赖于前述第Ⅰ和第Ⅱ部份中已经建立了的位形方程。

二、P-P-G-C 机构的运动学分析

P-P-G-C机构如图1所示，图中“P”表示移动副，杆①是输入杆件，杆②是连杆，杆③是输出杆件，而杆⓪和杆④是固定杆件。单位矢量$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$和$\vec{\lambda}$加在各个杆件上并如图所示。

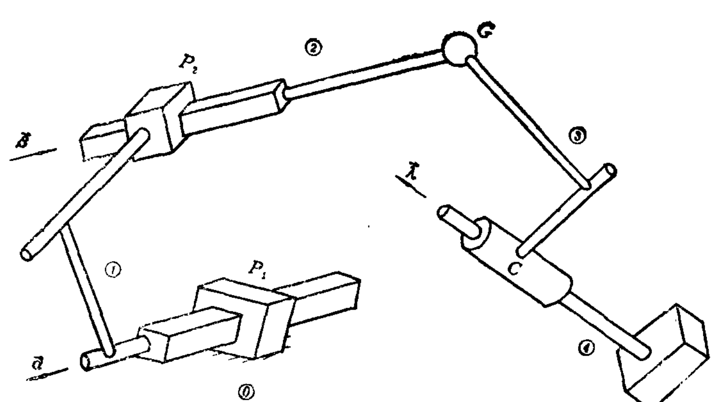

图 1

给出输入速度$\vec{v}(P_1)=v_1\vec{\alpha}$和机构的位形方程。求连杆和输出

杆的速度旋量．按惯用的表示法有

$$\vec{v}(G)=\dot{s}\vec{\beta}+v_1\vec{\alpha}_1 \tag{2.1}$$

式中 $s=P_2G$，且有：

$$\vec{v}(G)=\Omega_{34}\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG}+v_{34}\vec{\lambda} \tag{2.2}$$

式中 $\Omega_{34}\vec{\lambda}=\vec{\Omega}_{34}$ 是杆③相对于杆④的角速度，而 $v_{34}\vec{\lambda}=\vec{v}_{34}$ 是输出杆件的平移速度．所以一定有：

$$v_1\vec{\alpha}=\Omega_{34}\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG}+v_{34}\vec{\lambda}-\dot{s}\vec{\beta} \tag{2.3}$$

式中 Ω_{34}，v_{34}，$\dot{s}$ 都是未知量．（2.3）式的解是

$$\Omega_{34}=\frac{\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}\cdot\vec{\lambda}}{(\vec{\beta}\wedge\vec{\lambda})\cdot(\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG})}v_1 \tag{2.4}$$

$$v_{34}=\frac{(\vec{\beta}\wedge\vec{\alpha})\cdot(\vec{\alpha}\wedge\overrightarrow{CG})}{(\vec{\beta}\wedge\vec{\lambda})\cdot(\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG})}v_1 \tag{2.5}$$

$$\dot{s}=\frac{(\vec{\lambda}\wedge\vec{\alpha})\cdot(\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG})}{(\vec{\beta}\wedge\vec{\lambda})\cdot(\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG})}v_1 \tag{2.6}$$

显然相应的加速度可以通过对表达式（2.4）、（2.5）和（2.6）直接求导得到．但事实上对（2.3）式进行求导将更为简便，于是对（2.3）式求导得：

$$\dot{v}_1\vec{\alpha}=\dot{\Omega}_{34}\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG}+\Omega_{34}^2\vec{\lambda}\wedge(\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG})+\dot{v}_{34}\vec{\lambda}-\ddot{s}\vec{\beta} \tag{2.7}$$

（2.7）式的解是：

$$\dot{\Omega}_{34}=u\{\dot{v}_1(\vec{\alpha}\wedge\vec{\beta}\cdot\vec{\lambda})+\Omega_{34}^2(\vec{\lambda}\wedge\vec{\beta})\cdot[\vec{\lambda}\wedge(\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG})]\} \tag{2.8}$$

$$\dot{v}_{34}=u\{\dot{v}_1(\vec{\beta}\wedge\vec{\alpha})\cdot(\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG})+\Omega_{34}^2[\vec{\beta}\wedge(\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG}][\vec{\lambda}\wedge(\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG})]\} \tag{2.9}$$

$$\ddot{s}=u\{\dot{v}_1(\vec{\lambda}\wedge\vec{\alpha})\cdot(\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG})+\Omega_{34}^2[\vec{\lambda}\wedge(\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG})]^2\} \tag{2.10}$$

式中 $u=[(\vec{\beta}\wedge\vec{\lambda})\cdot(\vec{\lambda}\wedge\overrightarrow{CG})]^{-1}$

注意的是，（2.7）式是根据下面的关系而得出的

由于 $\left(\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right)_1=0$，$\vec{\Omega}_{10}=0$

所以 $\left(\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right)_0=\left(\frac{d\vec{\beta}}{dt}\right)_1+\Omega_{10}\wedge\vec{\beta}=0$

三、R-G-C-R 机 构

R-G-C-R 机构如图 2 所示，杆①是输入杆件，杆②是连杆，杆③是输出杆件，杆⓪和杆④是固定杆，单位向量$\vec{\alpha}$，$\vec{\beta}$，$\vec{\gamma}$加在各杆轴线上并如图所示．

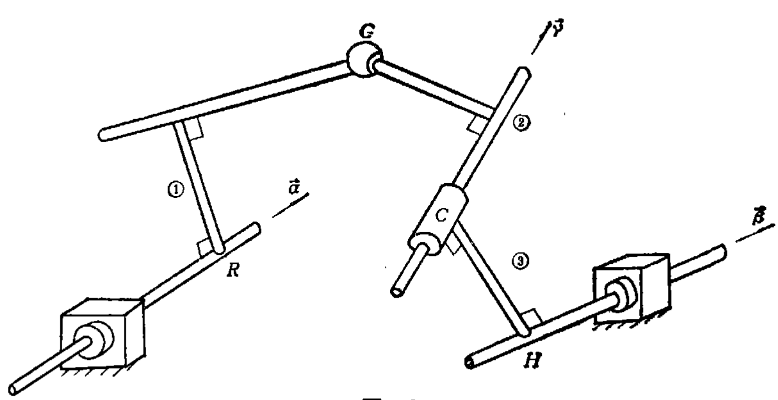

图 2

给出机构的位形方程和输入角速度 Ω_{10}，求其它运动杆件的速度

旋量 v_{ij}。按给出的数据，有

$$\vec{v}_{10}(G)=[\Omega_{10}\vec{\alpha},\ \Omega_{10}\vec{\alpha}\wedge\overrightarrow{RG}] \tag{3.1}$$

$$\vec{v}_{23}(G)=[\Omega_{23}\vec{\gamma},\ \dot{s}\vec{\gamma}+\Omega_{23}\vec{\gamma}\wedge\overrightarrow{XG}] \tag{3.2}$$

$$\vec{v}_{34}(G)=[\Omega_{34}\vec{\beta},\ \Omega_{34}\vec{\beta}\wedge\overrightarrow{HG}] \tag{3.3}$$

式中 $s=CX$，$\overrightarrow{HG}=\overrightarrow{HC}+\overrightarrow{CX}+\overrightarrow{XG}$。

由（3.1）式得

$$\vec{v}(G)=\Omega_{10}\vec{\alpha}\wedge\overrightarrow{RG} \tag{3.4}$$

由[(3.2)，(3.3)]得

$$\vec{v}(G)=\dot{s}\vec{\gamma}+\Omega_{23}\vec{\gamma}\wedge\overrightarrow{XG}+\Omega_{34}\vec{\beta}\wedge\overrightarrow{HG} \tag{3.5}$$

因而

$$\Omega_{10}\vec{\alpha}\wedge\overrightarrow{RG}=\dot{s}\vec{\gamma}+\Omega_{23}\vec{\gamma}\wedge\overrightarrow{XG}+\Omega_{34}\vec{\beta}\wedge\overrightarrow{HG} \tag{3.6}$$

从（3.6）式中可以确定未知量（$\dot{s}$，Ω_{23}，Ω_{34}），然后再由（3.2）式和（3.3）式求出速度旋量 $\vec{v}_{23}$ 和 $\vec{v}_{34}$，显然解是

$$\Omega_{34}=u[\vec{\gamma}\wedge(\vec{\gamma}\wedge\vec{\mu})\cdot\vec{\alpha}\wedge\vec{\lambda}]\Omega_{10} \tag{3.7}$$

$$\dot{s}=u[(\vec{\gamma}\wedge\vec{\mu})\wedge(\vec{\beta}\wedge\vec{\nu})\cdot\vec{\alpha}\wedge\vec{\lambda}]\Omega_{10} \tag{3.8}$$

$$\Omega_{23}=u[\vec{\beta}\wedge\vec{\nu})\wedge\vec{\gamma}\cdot\vec{\alpha}\wedge\vec{\lambda}]^{-1} \tag{3.9}$$

式中

$$u=[\vec{\gamma}\wedge(\vec{\gamma}\wedge\vec{\mu})\cdot(\vec{\beta}\wedge\vec{\nu})]^{-1}$$

$$\vec{\mu}=\overrightarrow{XG},\ \vec{\lambda}=\overrightarrow{RG},\ \vec{\nu}=\overrightarrow{HG}$$

为了求得相应的加速度，将（3.6）对 t 微分得

$$\begin{aligned}\dot{\Omega}_{10}\vec{\alpha}\wedge\vec{\lambda}+\Omega_{10}^{2}\vec{\alpha}\wedge(\vec{\alpha}\wedge\vec{\lambda})=&\dot{\Omega}_{23}\vec{\gamma}\wedge\vec{\mu}+\Omega_{23}(\vec{\Omega}_{34}\wedge\vec{\gamma})\wedge\vec{\mu}+\Omega_{23}\vec{\gamma}\wedge(\vec{\Omega}_{24}\wedge\vec{\mu})+\dot{\Omega}_{34}\vec{\beta}\wedge\vec{\nu}\\&+\vec{\Omega}_{34}\wedge(\vec{\Omega}_{34}\wedge\overrightarrow{HX}+\vec{\Omega}_{24}\wedge\vec{\mu})+\ddot{s}\vec{\gamma}+\dot{s}\vec{\Omega}_{34}\wedge\vec{\gamma}\end{aligned} \tag{3.10}$$

式中 $\vec{\Omega}_{24}=\vec{\Omega}_{23}+\vec{\Omega}_{34}$。

因此可求出未知量（$\ddot{s}$，$\dot{\Omega}_{34}$，$\dot{\Omega}_{23}$）。计算结果较繁，故不在这里列出。

四、R-G-G-R 机构

对图 3 所示的 R-G-G-R 机构，令

$\overrightarrow{B_1B_2}=\vec{\lambda}$，$\overrightarrow{B_2B_3}=\vec{\mu}$，$\overrightarrow{B_3B_4}=\vec{\nu}$，$\overrightarrow{B_1B_4}=\vec{\gamma}$。

$\vec{\alpha}$ 和 $\vec{\beta}$ 分别是沿输入轴和输出轴的单位向量。则有环方程

$$\vec{\lambda}+\vec{\mu}+\vec{\nu}=\vec{\gamma} \tag{4.1}$$

（4.1）式对时间微分有

$$\vec{\Omega}_1\wedge\vec{\lambda}+\vec{\Omega}_2\wedge\vec{\mu}+\Omega_3\vec{\beta}\wedge\vec{\nu}=0 \tag{4.2}$$

式中 $\vec{\Omega}_i$ 是第 i 杆的角速度。在（4.2）式中，$\vec{\Omega}_2$ 和 Ω_3 是未知量。

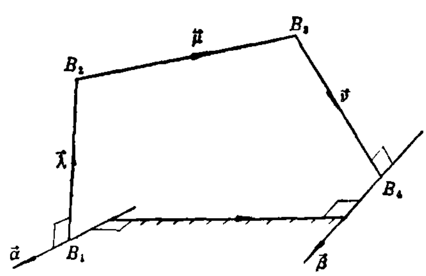

图 3

由 $\vec{\mu}\cdot(4.2)$得

$$\Omega_3=-\frac{(\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu}\cdot\vec{\alpha})}{(\vec{\mu}\wedge\vec{\nu}\cdot\vec{\beta})}\Omega_1 \tag{4.3}$$

因此（4.2）式可写成

$$\vec{\Omega}_2\wedge\vec{\mu}=\vec{A} \tag{4.4}$$

式中　$\vec{A}=\Omega_1\left[\vec{\lambda}\wedge\vec{\alpha}+\left(-\dfrac{\vec{\lambda}\wedge\vec{\mu}\cdot\vec{\alpha}}{\vec{\mu}\wedge\vec{\nu}\cdot\vec{\beta}}\right)\vec{\nu}\wedge\vec{\beta}\right]$　(4.5)

$\vec{\mu}\wedge$(4.4) 得

$$\vec{\Omega}_2=\vec{\mu}\wedge\vec{A}+(\vec{\mu}\cdot\vec{\Omega}_2)\vec{\mu} \tag{4.6}$$

由于 $(\vec{\mu}\cdot\vec{\Omega}_2)$ 的数量是表示浮动杆绕 $\vec{\mu}$ 的自转，因此当绕 $\vec{\mu}$ 作任意自转时 $\vec{\Omega}_2$ 是确定的。B_2 的速度恰好是

$$\vec{v}_{B2}=\vec{\Omega}_1\wedge\vec{\lambda} \tag{4.7}$$

因此浮动杆 2 的速度旋量就是由 (4.6) 和 (4.7) 式所给出的 $[\vec{\Omega}_2,\ \vec{v}_{B2}]$。

为得到加速度，将 (4.2) 式对时间微分有

$$\dot{\vec{\Omega}}_2\wedge\vec{\mu}+\dot{\Omega}_3\vec{\beta}\wedge\vec{\nu}=-[\vec{\Omega}_1\wedge(\vec{\Omega}_1\wedge\vec{\lambda})+\vec{\Omega}_2\wedge(\vec{\Omega}_2\wedge\vec{\mu})+\Omega_3^2\vec{\beta}\wedge(\vec{\beta}\wedge\vec{\nu})] \tag{4.8}$$

式中与 (4.2) 式有相同形式的未知量，故其解法如前。

五、H-R-G-R 机 构

参照图 4（假定 H 点螺距 p 不变）有

$$\vec{v}(A)=\vec{\Omega}_1\wedge\overrightarrow{HR}+p_1\vec{\Omega}_1 \tag{5.1}$$

式中 Ω_1 是输入杆的角速度，所以 $\vec{v}(A)$ 完全可以确定。

又　$$\vec{v}(G)=\vec{v}(A)+\vec{\Omega}_2\wedge\overrightarrow{AG} \tag{5.2}$$

且　$$\vec{v}(G)=\vec{\Omega}_3\wedge\overrightarrow{BG} \tag{5.3}$$

式中 $\vec{\Omega}_2$ 和 $\vec{\Omega}_3$ 分别是连杆和从动杆的角速度，所以有：

$$\overrightarrow{BG}\wedge\vec{\Omega}_3=\vec{v}(A)+\vec{\Omega}_2\wedge\overrightarrow{AG} \tag{5.4}$$

而　$$\vec{\Omega}_3=\Omega_3\vec{\alpha}_2 \tag{5.5}$$

$$\vec{\Omega}_2=\vec{\Omega}_{21}+\vec{\Omega}_1=\Omega_{21}\vec{\mu}+\vec{\Omega}_1 \tag{5.6}$$

式中 $\vec{\Omega}_{21}$ 是连杆相对于输入杆的角速度。

因此 (5.4) 式可写成

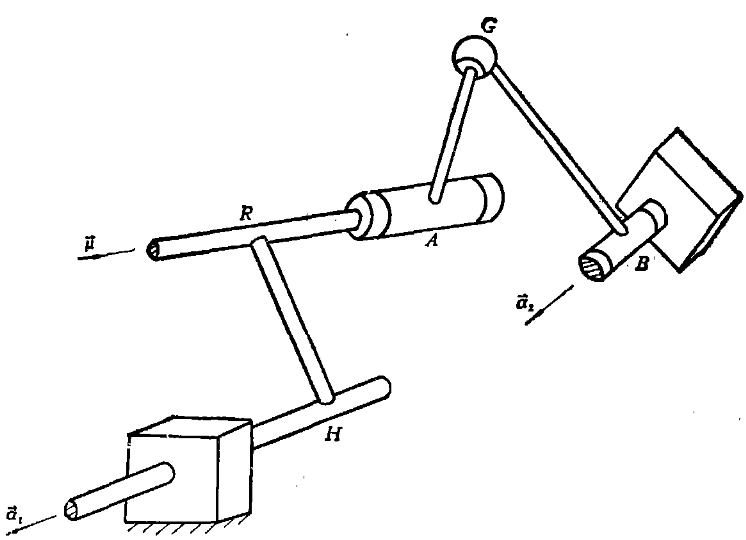

图 4

$$\Omega_3\vec{a}_2\wedge\overrightarrow{BG}=\vec{v}(A)+\Omega_{21}\vec{\mu}\wedge\overrightarrow{AG}+\vec{\Omega}_1\wedge\overrightarrow{AG} \tag{5.7}$$

由$\vec{\mu}\cdot$(5.7)得

$$\Omega_3=\frac{\vec{\mu}\cdot\vec{v}(A)+\vec{\Omega}_1\cdot\overrightarrow{AG}\wedge\vec{\mu}}{\vec{\mu}\cdot\vec{a}_2\wedge\overrightarrow{BG}} \tag{5.8}$$

另由 $\vec{a}_2\cdot$(5.7)得

$$\Omega_{21}=-\frac{\overrightarrow{AG}\wedge\vec{a}_2\cdot\vec{\Omega}_1}{\vec{\mu}\wedge\overrightarrow{AG}\cdot\vec{a}_2} \tag{5.9}$$

分别代入 (5.5) 式和 (5.6) 式后可得到 $\vec{\Omega}_2$ 和 $\vec{\Omega}_3$，其后 $\vec{v}(G)$ 可由 (5.3) 式来确定。

加速度可由 (5.7) 式对时间微分来确定。

$$\begin{aligned}&\dot{\Omega}_3\vec{a}_2\wedge\overrightarrow{BG}+\Omega_3^2\vec{a}_2\wedge(\vec{a}_2\wedge\overrightarrow{BG})\\&=\dot{\vec{v}}(A)+\dot{\vec{\Omega}}_2\wedge\overrightarrow{AG}+\vec{\Omega}_2\wedge(\vec{\Omega}_2\wedge\overrightarrow{AG})\end{aligned} \tag{5.10}$$

由于 $\overrightarrow{AG}=a\vec{a}$，由 $\vec{a}\cdot$(5.10) 得

$$\dot{\Omega}_3=\frac{[\dot{\vec{v}}(A)+\vec{\Omega}_2\wedge(\vec{\Omega}_2\wedge\overrightarrow{AG})-\Omega_3^2\vec{a}_2\wedge(\vec{a}_2\wedge\overrightarrow{BG})\cdot\vec{a}]}{\vec{a}\wedge\vec{a}_2\cdot\overrightarrow{BG}} \tag{5.11}$$

因为AG是通过回转副与RA连接，以及 $\overrightarrow{AG}\cdot\vec{\mu}=0$，所以它的角加速度在$\overrightarrow{AG}$方向必定等于输入杆在同一方向上的角速度，即

$$\dot{\vec{\Omega}}_2\cdot\vec{a}=\dot{\vec{\Omega}}_1\cdot\vec{a} \tag{5.12}$$

通过移项，由(5.10)式得

$$\dot{\vec{\Omega}}_2\wedge\overrightarrow{AG}=\vec{X} \tag{5.13}$$

式中

$$\vec{X}=\dot{\Omega}_3\vec{a}_2\wedge\overrightarrow{BG}+\Omega_3^2\vec{a}_2\wedge(\vec{a}_2\wedge\overrightarrow{BG})-\dot{\vec{v}}(A)-\vec{\Omega}_2\wedge(\vec{\Omega}_2\wedge\overrightarrow{AG}) \tag{5.14}$$

考虑到(5.11)式，所以(5.14)式可以解出。

因而由 $\vec{a}\wedge$(5.13)得

$$a\dot{\vec{\Omega}}_2-(\dot{\vec{\Omega}}_2\cdot\vec{a})\cdot\overrightarrow{AG}=\vec{a}\wedge\vec{X} \tag{5.15}$$

$$\therefore\quad \dot{\vec{\Omega}}_2=\frac{\vec{a}\wedge\vec{X}}{a}+(\dot{\vec{\Omega}}_1\cdot\vec{a})\vec{a} \tag{5.16}$$

上式中已经应用了(5.12)式，由(5.3)式很容易求出G点的加速度。

$$\dot{\vec{v}}(G)=\dot{\vec{\Omega}}_3\wedge\overrightarrow{BG}+\vec{\Omega}_3\wedge(\vec{\Omega}_3\wedge\overrightarrow{BG}) \tag{5.17}$$

六、结　　论

使用向量方法，古典的牛顿力学公式能直接应用于各种以向量组成的几何图形来表示的空间机构的运动分析，其余仅是简便的向量代数问题。若使用别的专用方法，虽然也可以建立机构的位形方程，但运动分析部份将变得很麻烦，且其解不能以几何图形般的形象来给出。Suh 和 Radcliffe[1] 以及 Yang 和 Freudenstein[2] 的著作就是一种典型的例证。

参 考 文 献

[1] Suh, C. H. and Radcliffe, *Kinematics and Mechanism Design*, J. Wiley,(1980).

[2] Yang, A. T. and F. Freudenstein, Application of dual-number quaternion algebra to the analysis of spatial mechanisms, *J. Appl. Mech., Trans ASME*, Series E, 86 (1964), 300-308.

Vector Analysis of Spatial Mechanisms——(Ⅲ) Kinematics of Spatial Mechanisms

Yu Xin
(*South China Institute of Technology, Guangzhou*)

Abstract

The instantaneous kinematics for the spatial mechanisms considered in parts (Ⅰ) and (Ⅱ) are here established via the methods of vector decomposition and vector equations.