应用数学和力学，第4卷第3期（1983年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

反对称自变量线性各向同性张量函数表示定理

郭 仲 衡

（北京大学数学系，1982年11月18日收到）

摘 要

本文给出了反对称自变量线性各向同性张量函数表示定理的两个证明：一个证明是新的；另一个基本上沿用[1]的思路，但较简短，且纠正了[1]的一个错误.

一、表 示 定 理

本文完全采用［1］的符号，且用到事实：每一个(二阶)张量 $\mathbf{B}$ 至少有一个右主向 $\mathbf{r}$（令 $|\mathbf{r}|=1$）：

$$\mathbf{B}\mathbf{r}=\lambda\mathbf{r} \tag{1.1}$$

和一个左主向 $\boldsymbol{l}$（令 $|\boldsymbol{l}|=1$）：

$$\boldsymbol{l}\mathbf{B}=\lambda\boldsymbol{l} \tag{1.2}$$

（1.1）和（1.2）中的特征值相等．若左、右主向相同，统称 $\mathbf{r}=\boldsymbol{l}$ 为 $\mathbf{B}$ 对应于特征值 λ 的主向.

我们也将用到

定义 自变量为向量的张量值函数 $\mathbf{G}(\mathbf{u})$ 或自变量为张量的张量值函数 $\mathbf{F}(\mathbf{B})$ 是各向同性的，若

$$\mathbf{Q}\mathbf{G}(\mathbf{u})\mathbf{Q}^*=\mathbf{G}(\mathbf{Q}\mathbf{u}) \tag{1.3}$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{F}(\mathbf{B})\mathbf{Q}^*=\mathbf{F}(\mathbf{Q}\mathbf{B}\mathbf{Q}^*) \tag{1.4}$$

$\forall \mathbf{Q}\in\mathrm{Orth}$.

Cauchy基本表示定理（[2]，29页） 向量 $\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_m$ 的标量值函数 $\varphi(\mathbf{u}_1,\cdots,\mathbf{u}_m)$ 是各向同性的，当且仅当它可表示为这些向量的点积 $\mathbf{u}_i\mathbf{u}_j$ $(i,j=1,\cdots,m)$ 的函数.

文献[1]给出

表示定理 反对称张量 $\mathbf{A}$ 的线性张量值函数 $\mathbf{F}(\mathbf{A})$ 是各向同性的，当且仅当存在标量 α，使得

$$\mathbf{F}(\mathbf{A})=2\alpha\mathbf{A} \tag{1.5}$$

根据定义(1.4)，定理的充分性是显然的．本文旨在给出这个定理的必要性的两个证明：一个证明是新的；另一个基本上沿用［1］的思路，但较简短，且纠正了［1］的证明的一个错

误.

二、证 明 一

考虑反对称张量**A**的对偶向量**a**:

$$\mathbf{A}=\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a} \qquad \mathbf{a}=\frac{1}{2}\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbf{A} \tag{2.1}$$

其中ε是置换张量 (三阶)[3], 在笛氏标架里

$$A_{ij}=\varepsilon_{ijr}a_r \qquad a_i=\frac{1}{2}\varepsilon_{irs}A_{rs} \tag{2.2}$$

由于

$$\begin{aligned}Q_{ir}Q_{js}A_{rs}&=Q_{ir}Q_{js}\varepsilon_{rst}a_t=Q_{ir}Q_{js}Q_{nm}\varepsilon_{rsm}Q_{nt}a_t\\&=\det Q\varepsilon_{ijr}Q_{rs}a_s=\varepsilon_{ijr}Q_{rs}a_s\end{aligned} \tag{2.3}$$

$\forall \mathbf{Q}\in\mathrm{Orth}^+$, 即

$$\mathbf{QAQ^*}=\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Qa} \tag{2.4}$$

如果记

$$\mathbf{F}(\mathbf{A})=\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a}):=\mathbf{G}(\mathbf{a}) \tag{2.5}$$

则**F**(**A**)的各向同性:

$$\mathbf{QF}(\mathbf{A})\mathbf{Q^*}=\mathbf{F}(\mathbf{QAQ^*}) \tag{2.6}$$

导致**G**(**a**)的各向同性:

$$\mathbf{QG}(\mathbf{a})\mathbf{Q^*}=\mathbf{F}(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{Qa})=\mathbf{G}(\mathbf{Qa}) \tag{2.7}$$

显然, **G**(**a**)也是线性的. 每一向量**a**均可看作某一$\mathring{\mathbf{Q}}\in\mathrm{Orth}^+$的主向 (即转轴)[4]:

$$\mathring{\mathbf{Q}}\mathbf{a}=\mathbf{a} \tag{2.8}$$

将这个特殊的$\mathring{\mathbf{Q}}$代替(2.7)中的**Q**, 得

$$\mathring{\mathbf{Q}}\mathbf{G}(\mathbf{a})=\mathbf{G}(\mathring{\mathbf{Q}}\mathbf{a})\mathring{\mathbf{Q}}=\mathbf{G}(\mathbf{a})\mathring{\mathbf{Q}} \tag{2.9}$$

$$\mathring{\mathbf{Q}}\mathbf{G}(\mathbf{a})\mathbf{a}=\mathbf{G}(\mathbf{a})\mathring{\mathbf{Q}}\mathbf{a}=\mathbf{G}(\mathbf{a})\mathbf{a} \tag{2.10}$$

由$\mathring{\mathbf{Q}}$主向的唯一性, 知**G**(**a**)**a**与**a**共线:

$$\mathbf{G}(\mathbf{a})\mathbf{a}=\varphi(\mathbf{a})\mathbf{a} \tag{2.11}$$

以任意$\mathbf{Q}\in\mathrm{Orth}$左乘上式, 利用**G**(**a**)的各向同性(2.7), 我们依次得

$$\varphi(\mathbf{a})\mathbf{Qa}=\mathbf{QG}(\mathbf{a})\mathbf{Q^*Qa}=\mathbf{G}(\mathbf{Qa})\mathbf{Qa}=\varphi(\mathbf{Qa})\mathbf{Qa} \tag{2.12}$$

从而有

$$\varphi(\mathbf{a})=\varphi(\mathbf{Qa}) \tag{2.13}$$

Q的任意性使φ为常数. $\forall \xi,\eta\in\mathscr{R}$和$\mathbf{u},\mathbf{v}\in\mathscr{V}$, 将

$$\mathbf{a}=\xi\mathbf{u}+\eta\mathbf{v} \tag{2.14}$$

代入(2.11)得

$$\xi\eta[\mathbf{G}(\mathbf{u})\mathbf{v}+\mathbf{G}(\mathbf{v})\mathbf{u}]=\varphi[\xi(1-\xi)\mathbf{u}+\eta(1-\eta)\mathbf{v}] \tag{2.15}$$

将上式中的**u**和**v**互换, 左端不变. 两右端相等以及**u**和**v**的线性无关导致

$$\varphi(\xi-\eta)[1-(\xi+\eta)]=0 \tag{2.16}$$

ξ和η的任意性使$\varphi=0$, 于是由(2.15)有

$$\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v}):=\mathbf{G}(\mathbf{u})\mathbf{v}=-\mathbf{G}(\mathbf{v})\mathbf{u} \tag{2.17}$$

它是关于自变量u和v为反对称的双线性向量值函数，而且是各向同性的，因

$$\mathbf{Qg}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\mathbf{QG}(\mathbf{u})\mathbf{Q}^*\mathbf{Qv}=\mathbf{G}(\mathbf{Qu})\mathbf{Qv}=\mathbf{g}(\mathbf{Qu},\mathbf{Qv}) \tag{2.18}$$

将向量函数值 $\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v})$ 在基 $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}\}$ 上分解，并考虑到双线性性质，我们有

$$\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\xi(\mathbf{v})\mathbf{u}+\eta(\mathbf{u})\mathbf{v}+2\alpha\mathbf{v}\wedge\mathbf{u} \tag{2.19}$$

其中 α 是常数，$\xi(\mathbf{v})$ 和 $\eta(\mathbf{u})$ 是线性函数．将(2.19)代入(2.18)两端，得

$$[\xi(\mathbf{v})-\xi(\mathbf{Qv})]\mathbf{Qu}+[\eta(\mathbf{u})-\eta(\mathbf{Qu})]\mathbf{Qv}=0 \tag{2.20}$$

从而

$$\xi(\mathbf{v})=\xi(\mathbf{Qv})\quad \eta(\mathbf{u})=\eta(\mathbf{Qu})\quad \forall\mathbf{Q}\in\mathrm{Orth} \tag{2.21}$$

就是说，$\xi(\mathbf{a})$ 和 $\eta(\mathbf{a})$ 都是线性各向同性标量值函数．利用(2.1)可将它们化成反对称自变量 $\mathbf{A}$ 的线性各向同性标量值函数．根据[1]第三节最后一句的结论，这样的函数恒等于零，于是

$$\mathbf{g}(\mathbf{u},\mathbf{v})=2\alpha\mathbf{v}\wedge\mathbf{u}=2\alpha\boldsymbol{\varepsilon}:\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}=2\alpha(\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{u})\mathbf{v} \tag{2.22}$$

由 $\mathbf{v}$ 的任意性，(2.17)和(2.22)两式就给出

$$\mathbf{G}(\mathbf{a})=2\alpha\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{a}\qquad\forall\mathbf{a}\in\mathscr{V} \tag{2.23}$$

利用(2.1)和(2.5)回到反对称自变量 $\mathbf{A}$，就得表示式(1.5)．表示定理的必要性证毕．

三、证 明 二

先局限于类型为

$$\mathbf{C}:=\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u} \tag{3.1}$$

的反对称自变量，其中 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 为任意正交单位向量．$\mathbf{C}$ 的唯一主向量（单位）

$$\mathbf{w}:=\mathbf{u}\wedge\mathbf{v} \tag{3.2}$$

满足

$$\mathbf{Cw}=\mathbf{wC}=0 \tag{3.3}$$

对于正交张量

$$\mathbf{R}=-\mathbf{I}+2\mathbf{w}\otimes\mathbf{w} \tag{3.4}$$

我们有

$$\mathbf{RCR}^*=\mathbf{C}-2\mathbf{w}\otimes\mathbf{wC}-2\mathbf{Cw}\otimes\mathbf{w}+4\mathbf{w}\otimes\mathbf{wCw}\otimes\mathbf{w}=\mathbf{C} \tag{3.5}$$

于是，$\mathbf{F}(\mathbf{C})$ 的各向同性给出

$$\mathbf{RF}(\mathbf{C})\mathbf{R}^*=\mathbf{F}(\mathbf{C})\qquad 即\qquad \mathbf{RF}(\mathbf{C})=\mathbf{F}(\mathbf{C})\mathbf{R} \tag{3.6}$$

并且有（用到(3.4)）

$$\mathbf{R}[\mathbf{F}(\mathbf{C})\mathbf{w}]=\mathbf{F}(\mathbf{C})\mathbf{Rw}=\mathbf{F}(\mathbf{C})\mathbf{w} \tag{3.7}$$

$$[\mathbf{wF}(\mathbf{C})]\mathbf{R}=\mathbf{wRF}(\mathbf{C})=\mathbf{wF}(\mathbf{C}) \tag{3.8}$$

就是说，$\mathbf{F}(\mathbf{C})\mathbf{w}$ 和 $\mathbf{wF}(\mathbf{C})$ 分别是 $\mathbf{R}$ 的右和左主向．考虑到 $\mathbf{R}$ 的唯一的左、右主向相同，且可由 $\mathbf{w}$ 代表，我们有

$$\mathbf{F}(\mathbf{C})\mathbf{w}=\xi\mathbf{w}\qquad \mathbf{wF}(\mathbf{C})=\xi\mathbf{w} \tag{3.9}$$

对于单位正交基 $\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$，$\mathbf{F}(\mathbf{C})$ 可表示为

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{C})=&\xi_{11}\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}+\xi_{12}\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}+\xi_{13}\mathbf{u}\otimes\mathbf{w}+\xi_{21}\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}+\xi_{22}\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}\\&+\xi_{23}\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}+\xi_{31}\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}+\xi_{32}\mathbf{w}\otimes\mathbf{v}+\xi_{33}\mathbf{w}\otimes\mathbf{w}\end{aligned} \tag{3.10}$$

一般而言，各 ξ_{ij} 是 $\mathbf{u}$ 和 $\mathbf{v}$ 的函数．将上式代入(3.9)，得

$$\xi_{13}\mathbf{u}+\xi_{23}\mathbf{v}+(\xi_{33}-\xi)\mathbf{w}=0 \tag{3.11}$$

$$\xi_{31}\mathbf{u}+\xi_{32}\mathbf{v}+(\xi_{33}-\xi)\mathbf{w}=0 \tag{3.12}$$

由此，有

$$\xi_{13}=\xi_{31}=\xi_{23}=\xi_{32}=0 \tag{3.13}$$

$$\xi_{33}=\xi(\mathbf{u},\mathbf{v}) \tag{3.14}$$

考虑到这结果以及

$$\mathbf{Q}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})\mathbf{Q}^{*}=(\mathbf{Q}\mathbf{u})\otimes(\mathbf{Q}\mathbf{v})-(\mathbf{Q}\mathbf{v})\otimes(\mathbf{Q}\mathbf{u}) \tag{3.15}$$

$$(\mathbf{Q}\mathbf{u})\wedge(\mathbf{Q}\mathbf{v})=\mathbf{Q}(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})=\mathbf{Q}\mathbf{w} \tag{3.16}$$

将表达式(3.10)代入$\mathbf{F}(\mathbf{C})$的各向同性定义式(1.4)，$\forall\mathbf{Q}\in\mathrm{Orth}$，我们有

$$\begin{aligned}&(\xi_{11}-\xi_{11}^{Q})(\mathbf{Qu})\otimes(\mathbf{Qu})+(\xi_{12}-\xi_{12}^{Q})(\mathbf{Qu})\otimes(\mathbf{Qv})\\&\quad+(\xi_{21}-\xi_{21}^{Q})(\mathbf{Qv})\otimes(\mathbf{Qu})+(\xi_{22}-\xi_{22}^{Q})(\mathbf{Qv})\otimes(\mathbf{Qv})\\&\quad+[\xi(\mathbf{u},\mathbf{v})-\xi(\mathbf{Qu},\mathbf{Qv})](\mathbf{Qw})\otimes(\mathbf{Qw})=0\end{aligned} \tag{3.17}$$

其中

$$\xi_{ij}^{Q}:=\xi_{ij}(\mathbf{Qu},\mathbf{Qv}) \qquad (i,j=1,2) \tag{3.18}$$

考虑到并矢基$(\mathbf{Qu})\otimes(\mathbf{Qu}),\cdots,(\mathbf{Qw})\otimes(\mathbf{Qw})$的线性无关，(3.17)给出

$$\xi_{ij}(\mathbf{u},\mathbf{v})=\xi_{ij}(\mathbf{Qu},\mathbf{Qv}) \qquad (i,j=1,2) \tag{3.19}$$

$$\xi(\mathbf{u},\mathbf{v})=\xi(\mathbf{Qu},\mathbf{Qv}) \tag{3.20}$$

这两式说明，ξ_{ij}和ξ均为$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$的各向同性标量值函数。根据Cauchy基本表示定理，它们均可表示为$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$各点积的函数。由于$\mathbf{uu}=\mathbf{vv}=1$和$\mathbf{uv}=\mathbf{vu}=0$，$\xi_{ij}$和$\xi$只能是与$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$无关的常数。于是，(3.10)简化为带常系数的表示式

$$\begin{aligned}\mathbf{F}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})=&\xi_{11}\mathbf{u}\otimes\mathbf{u}+\xi_{12}\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}+\xi_{21}\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}+\xi_{22}\mathbf{v}\otimes\mathbf{v}\\&+\xi(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\otimes(\mathbf{u}\wedge\mathbf{v})\end{aligned} \tag{3.21}$$

$\mathbf{F}(\mathbf{C})$的线性性质使得它也是$\mathbf{u}$和$\mathbf{v}$的线性函数，因此上式进一步化简

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})=\xi_{12}\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}+\xi_{21}\mathbf{v}\otimes\mathbf{u} \tag{3.22}$$

也是根据线性性质，又有

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})=-\mathbf{F}(\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{v})=-\xi_{12}\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}-\xi_{21}\mathbf{u}\otimes\mathbf{v} \tag{3.23}$$

比较上两式，根据$\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}$和$\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}$线性无关，我们有

$$\xi_{12}=-\xi_{21}\equiv 2\alpha \tag{3.24}$$

和

$$\mathbf{F}(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})=2\alpha(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u}) \tag{3.25}$$

在任意单位正交基$\{\mathbf{u},\mathbf{v},\mathbf{w}\}$下，任何反对称张量$\mathbf{A}$均可表为

$$\mathbf{A}=\xi(\mathbf{u}\otimes\mathbf{v}-\mathbf{v}\otimes\mathbf{u})+\eta(\mathbf{v}\otimes\mathbf{w}-\mathbf{w}\otimes\mathbf{v})+\zeta(\mathbf{w}\otimes\mathbf{u}-\mathbf{u}\otimes\mathbf{w}) \tag{3.26}$$

其中ξ，η，ζ是标量。利用$\mathbf{F}(\mathbf{A})$的线性性质和(3.25)式，就得表示式(1.5)。定理的必要性证毕。

作者曾和江西工学院郑泉水同志作过多次有益的讨论。

参 考 文 献

[1] 郭仲衡,非对称自变量线性各向同性张量函数的表示,应用数学和力学, 2, 6 (1981), 611-620.

[2] Truesdell, C. and W. Noll, The Non-Linear Field Theories of Mechanics, *Handbuch der Physik*, Vol. Ⅲ/3, Springer-Verlag, (1965).

[3] 郭仲衡, «非线性弹性理论», 科学出版社, (1980).

[4] Guo Zhong-heng, Representations of orthogonal tensors, *S M Arch.*, 6, 4 (1981), 451-466.

Representation Theorem for Linear, Isotropic Tensor Functions of a Skew Argument

Guo Zhong-heng

(Department of Mathematics, Peking University, Beijing)

Abstract

The present paper offers two proofs of the representation theorem for linear, isotropic tensor functions of a skew argument. The first proof is new. The second one is basically along lines of reasoning exploited in [1], but more concise, and it corrects some error committed in [1].