应用数学和力学，第4卷第3期（1983年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

由虚功原理推导J积分守恒*

陈 应 天**

(华中工学院，1981年9月19日收到)

摘 要

本文由力学的普遍原理——虚功原理推导出了三维情况下J积分守恒的一般形式；十分明显地给出了J积分守恒成立的几个必要条件.

假设均匀介质的物体处于平衡状态，其内任意处体积元的虚位移在 i 方向上的分量为 δu_i，由于物体处于平衡状态，由虚功原理可知虚位移产生的虚功的总和为零。

考虑物体内任一部分体积 V（其体积元用dV表示，边界用 ∂V 表示），它在内力和外力作用下做的虚功总和为零，即有[1)]

$$\iiint_V\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+f_i\right)\delta u_i\,dV-\iint_{\partial V}(\sigma_{ij}n_j-T_i)\,\delta u_i dS=0 \quad (\text{见文献}[1]) \tag{1}$$

其中σ_{ij}为应力，f_i为体积力在i方向上的分量，T_i为外加面力在i方向上的分量，n_j 为曲面法线在j方向上的方向余弦。考虑到边界条件

$$\sigma_{ij}n_j=T_i$$

方程(1)变为

$$\iiint_V\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}+f_i\right)\delta u_i dV=0 \tag{2}$$

对于小位移，应变-位移关系式为

$$\varepsilon_{ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right) \tag{3}$$

其中ε_{ij}为应变，u_i为位移。

我们把(2)式改写为

$$\iiint_V\left(\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i+\sigma_{ij}\delta\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+f_i\delta u_i\right)dV=\iiint_V\sigma_{ij}\delta\frac{\partial u_i}{\partial x_j}\,dV \tag{4}$$

由于δu_i为虚位移，于是δ符号同微分符号可以对易，即有

$$\delta\frac{\partial u_i}{\partial x_j}=\frac{\partial\delta u_i}{\partial x_j} \tag{5}$$

* 李灏推荐.

**本文完成于英国剑桥Cavendish实验室.

1) 本文应用了爱因斯坦惯例，即在任何一项中，只要某个指标重复两次，自动表示求和.

将(5)式代入(4)式，左边化为

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j}\delta u_i + \sigma_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\delta u_i + f_i\delta u_i\right)dV$$

$$=\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}\delta u_i) + f_i\delta u_i\right]dV \tag{6}$$

而据(3)式，(4)式的右边又可写为

$$\iiint_V \sigma_{ij}\delta\frac{\partial u_i}{\partial x_j}dV = \iiint_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV \tag{7}$$

所以，(4)式可写为

$$\iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}\delta u_i) + f_i\delta u_i\right]dV = \iiint_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV \tag{8}$$

如果将体积力（例如重力）忽略掉，即有

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}\delta u_i)\,dV = \iiint_V \sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}dV \tag{9}$$

如同质点力学中保守力一样，我们可以把σ_{ij}看作有势力，那么存在势函数$\Sigma(\varepsilon_{ij})$，有

$$\sigma_{ij}=\frac{\partial\Sigma(\varepsilon_{ij})}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{10}$$

在断裂力学中，称Σ为应变能密度，(9)式可写为

$$\iiint_V \frac{\partial}{\partial x_j}(\sigma_{ij}\delta u_i)\,dV = \iiint_V \delta\Sigma dV \tag{11}$$

由于应变能密度Σ是应变ε_{ij}的函数，而应变ε_{ij}又是坐标的函数，所以我们可以把Σ写成

$$\Sigma=\Sigma(x_k)$$

于是有

$$\delta\Sigma = \frac{\partial\Sigma}{\partial x_k}\delta x_k \tag{12}$$

在公式

$$\frac{\partial}{\partial x_k}(\Sigma\delta x_k) = \frac{\partial}{\partial x_k}\Sigma\cdot\delta x_k + \Sigma\frac{\partial}{\partial x_k}\delta x_k \tag{13}$$

中，注意到δ符号与偏微商符号可以对换，即

$$\Sigma\frac{\partial}{\partial x_k}\delta x_k = \Sigma\delta\frac{\partial x_k}{\partial x_k} = 0 \tag{14}$$

于是，(9)式化为

$$\iiint_V (\sigma_{ij}\delta u_i)_{,j}dV - \iiint_V (\Sigma\delta x_k)_{,k}dV = 0 \tag{15}$$

利用高斯定理，可以把(11)式的体积分化为面积分，只要在V内没有奇点，即

$$\oiint_{\partial V} (\Sigma\delta x_k n_k - \sigma_{ij}\delta u_i n_j)\,dS = 0 \tag{16}$$

其中n_j，n_k分别为边界∂V的j方向、k方向上的法向方向余弦.

但，由于$u_i = u_i(x_k)$，于是有

$$\delta u_i = \frac{\partial u_i}{\partial x_k}\delta x_k \tag{17}$$

代入(16)式，有

$$\oiint_{\partial V}\left(\Sigma n_k-\sigma_{ij}n_j\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)\delta x_k dS=0 \tag{18}$$

又，$\sigma_{ij}n_j=T_i$. 又因为δx_k的独立性，我们得到J积分在三维情况下的一般形式为

$$\oiint_{\partial V}\left(\Sigma n_k-T_i\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\right)dS=0 \tag{19}$$

对应$k=1,2,3$，此守恒定律表示三个方程. 以上方程就是在近代的断裂力学文献中常用到的形式.

以上的推导已经明确地给出了J积分守恒的几个必要条件：

(1) 所考察的系统必须处于力学平衡状态，如果存在各种运动，只能是准静态进行的.

(2) 应变位移关系式(2)表明要满足小应变条件.

(3) 忽略体力.

(4) 应力-应变满足一定的协调方程，这个条件可以从(7)式看得很清楚，不难证明使$\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}$成为全微分，即存在应变能密度$\Sigma$的充分必要条件也就是柯西-黎曼条件为

$$\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\varepsilon_{\alpha\beta}}=\frac{\partial\sigma_{\alpha\beta}}{\partial\varepsilon_{ij}} \tag{20}$$

所以在实际测量J积分时，不允许有卸载，避免与历史有关的应力应变关系式，实际上就是要保证(20)式的关系不受到破坏，但(20)式的要求并不很强，并不表明我们所考察的系统必须是弹性体.

参 考 文 献

[1] Washizu Kyuichiro, *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergaman Press, (1975).

The Derivation of J-Integral Conservation Law from the Principle of Virtual Work

Chen Ying-tian

(Hua-Zhong University of Science and Technology, Wuhan)

Abstract

The general form of J-integral conservation law in three dimensions has been derived from the principle of virtual work. The necessary conditions for J-integral conservation are also given.