应用数学和力学，第4卷第3期（1983年5月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

离散型固体力学及其间断型变分原理*

牛 庠 均

（北京工业大学，1982年2月28日收到）

摘　　要

本文对即将形成的一门新的学科——离散型固体力学的基本假设，微分形式的方程，及其间断型变分原理进行了论述．离散型固体力学是离散介质力学的一个分支，是近期以来力学的一个发展方向．它是基于固体体系具有离散性、可分性，待解函数在定义域内具有各种不同的间断性，以及定义域的边界可动性的基础上，为解决种种情况下的固体的应力、位移、应变所形成的力学系统．当待解函数在整个定义域内为充分光滑的函数类和略去边界可动性的影响时，则离散型固体力学就退化为连续介质力学范畴的古典固体力学．它所属的变分原理，在相应的情况下，也就退化为古典与非古典变分原理．

一、引　　言

固体的内部物质结构，从微观分析，具有不连续的离散性质；就宏观而言，也具有裂纹、介质物理性质间断等离散性质；至于用电子计算机来解决固体体系的工程结构问题的数值计算时，当前也首先是对基于连续性假设的工程结构进行离散分析，也就是建立离散模型，用离散方法归结为离散方程（代数方程组），然后用计算机选择适宜的解算方法进行数值分析。可见，随着不断的研究固体微观结构的力学特性的宏观描述和计算技术的迅速发展，一门新的固体力学的分支——离散型固体力学正在形成与发展。属于离散介质力学范畴的离散型固体力学作为力学的一个新近的发展方向，在［1］中进行了论述。

1．基本假设

传统的固体力学（连续介质力学的分支），我们称之为古典固体力学，是基于固体具有连续性假设基础上形成的。基于这一假设自然引伸出待解函数（应力函数，位移函数，应变函数）在整个定义域内为解析函数类的假设。

离散型固体力学的基本假设之一是固体体系具有离散性。即固体内部具有有限个介质间断的几何空间。例如固体体系可分割为有限个元素S_a的集合，在元素S_a的内部介质是连续的，在元素S_a的边界Γ_a上，介质是间断的。但在边界Γ_a上于有限个节点上，介质是连续的，于是使全部元素连结为统一的宏观整体。

基本假设之二是固体体系具有可分性。即每个元素S_a可以任意再分为更小的元素。

基本假设之三是待解函数具有各种不同的间断性。即待解函数在元素S_a内部具有充分的

*钱伟长推荐．

光滑性，而在元素的边界 Γ_a 上，具有各种不同的间断性．本文是基于待解函数为分片连续的函数类C^{-1}的情况来进行讨论的．至于待解函数为其他函数类，在[2]中已作了论述．

2. 几何剖分

我们讨论一个固体体系，它具有有限宏观尺寸的几何形状，记为 Ω，其边界为 $\partial\Omega=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$．$\partial\Omega_1$为整体力的边界，$\partial\Omega_2$为整体几何边界．并记$\overline{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$．用有限个点、线、面把固体体系分割为有限个子区$S_a$，称$S_a$为元素．元素的边界 Γ_a 为分片光滑的．于是建立了一种几何剖分 S_h，有限个元素 S_a 的集合构成整个固体体系，记为

$$\overline{\Omega}=\bigcup_{a=1}^{M} S_a \tag{1.1}$$

3. 待解函数类

离散型固体力学的待解函数类是属于具有各种不同间断性的函数类．即待解函数在元素 S_a 的内部具有充分光滑性，但在元素的边界 Γ_a 上具有各种不同的间断性．就整体而言，待解函数类或为分片连续的C^{-1}函数类；或为连续的 C^0 函数类；或为函数本身及其一阶导数连续的 C^1 函数类；或为具有更高光滑性的 C^n 函数类．本文就分片连续的函数类进行讨论．

显然，几何剖分与分片构造待解函数是采用[3]中提出的在有限元法中通用的概念，但这儿开拓到分片连续的函数类．

4. 边界可动性

由于变形的原因，元素 S_a 的边界Γ_a是可动的．同时，由于待解函数在元素边界上具有各种不同的间断性，考虑边界可动性的影响是必要的．

为了分析可动边界的变分问题，取如下的坐标变换

$$\xi_i=x_i+\alpha\delta x_i \tag{1.2}$$

其中 x_i，ξ_i 为固体元素各点变形前后的坐标，δx_i为坐标的改变量，α为微小参量．变换是一一对应的与连续可微的，并设雅各比行列式 $J_i\neq 0$．在上述变换下，待解函数可写为

$$\left.\begin{aligned}
u_i(\xi_i)&=u_i(x_i)+\alpha\delta u_i\\
u_{i,j}(\xi_i)&=u_{i,j}(x_i)+\alpha\delta u_{i,j}\\
\sigma_{ij}(\xi_i)&=\sigma_{ij}(x_i)+\alpha\delta\sigma_{ij}
\end{aligned}\right\} \tag{1.3}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\delta u_i&=\bar{\delta}u_i+\bar{\bar{\delta}}u_i=\bar{\delta}u_i+u_{i,k}\delta x_k\\
\delta u_{i,j}&=\bar{\delta}u_{i,j}+\bar{\bar{\delta}}u_{i,j}=\bar{\delta}u_{i,j}+u_{i,j,k}\delta x_k\\
\delta\sigma_{ij}&=\bar{\delta}\sigma_{ij}+\bar{\bar{\delta}}\sigma_{ij}=\bar{\delta}\sigma_{ij}+\sigma_{ij,k}\delta x_k
\end{aligned}\right\} \tag{1.4}$$

这儿我们采用[4]中定义 δ 变分符号的含义，称为全变分符号．$\bar{\delta}$ 表示相对于坐标 x_i 固定时，待解函数的变分符号．$\bar{\bar{\delta}}$ 表示相对于坐标 x_i 改变时，待解函数的变分符号．当不考虑边界可动性时，或为固定边界时，有 $\delta=\bar{\delta}$．

5. 变分原理

目前，从整体角度来描述固体体系的变分原理，基本上可分为三大类型．

第一类：基于固体的连续性假设基础上的古典固体力学的古典变分原理．

第二类：基于对固体体系的几何剖分与分片构造待解函数的基础上，待解函数在元素交界处具有各种类型的间断性，但要求的解还应满足固体的连续性的基本假设，即解为坐标的连续函数．为此，对变分原理进行了修正，以使待解函数满足连续性假设，这类变分原理我们称之为非古典变分原理[4-6]．这一类变分原理是随着有限元法的兴起，而产生与发展起来的，是当前引起广泛兴趣的一个课题．

第三类：这类是属于离散型固体力学的变分原理．由于待解函数具有各种不同的间断性，这类变分原理可分为离散型与间断型变分原理二种．关于离散型变分原理是基于待解函数或为 C^0 函数类，或为 C^1 函数类，或为 C^n 函数类的基础上形成的．这一类离散型变分原理在[2]中已作了论述．关于间断型变分原理是基于待解函数为分片连续的 C^{-1} 函数类基础上形成的，正是本文论述的内容．

二、离散型固体力学的间断型变分原理

基于上述的基本假设，考虑元素边界的可动性，在驻值条件下，我们来讨论离散型固体力学的间断性变分问题，并导出与之等价的离散型固体力学的尤拉方程的形式．

1. 基于势能函数的情况

基于上述的前提下，由有限个元素 S_a 构成的固体体系的总势能，为

$$\Pi(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{S_a(\alpha)}\Pi_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),\ u_{i,j}(\xi_i,\alpha))dV(\xi_i)\right.$$
$$\left.-\iint\limits_{\Gamma_a(\alpha)\cap\partial\Omega_1(\alpha)}\bar{P}_i u_i(\xi_i,\alpha)dr(\xi_i)\right\} \tag{2.1}$$

利用坐标变换(1.2)，把能量泛函 (2.1) 用固定积分域表示，为

$$\Pi(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{S_a}\Pi_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),\ u_{i,j}(\xi_i,\alpha))\,|J_1|\,dV\right.$$
$$\left.-\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}P_i u_i(\xi_i,\alpha)\,|J_i|\,dr\right\} \tag{2.2}$$

其中

$$\Pi_0=\frac{1}{2}a_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl}-F_iu_i$$

$$\delta\Pi_0=\sigma_{ij}\delta\varepsilon_{ij}-F_i\delta u_i \tag{2.3}$$

$$J_1=\frac{D(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{D(x_1,x_2,x_3)},\qquad J_i=\frac{D(\xi_j,\xi_k)}{D(x_j,x_k)} \tag{2.4}$$

$$(i,\ j,\ k=1,\ 2,\ 3)$$

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零，故 (2.2) 的一阶变分为零的形式，为

$$\delta\Pi(\alpha)=\frac{\partial\Pi(\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{S_a}[(\Pi_0)_{,i}\delta x_i\right.$$
$$+(\Pi_0)_{,u_i}\delta u_i+(\Pi_0)_{,u_{i,j}}\delta u_{i,j}+(\Pi_0)(\delta x_i)_{,i}]dV$$

$$-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[(\bar{P}_iu_i)_{,j+i}\delta x_j+(\bar{P}_iu_i)_{,u_i}\delta u_i$$

$$+(\bar{P}_iu_i)(\delta x_j)_{,j+i}]dr\Big\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a}-(\sigma_{ij,j}+F_i)\bar{\delta}u_idV+\iint_{\Gamma_a}\sigma_{ij}l_j\delta u_idr$$

$$+\iint_{\Gamma_a}[\Pi_0-u_{i,n}(\sigma_{ij}l_j)]\delta ndr$$

$$+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_idr$$

$$+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[P_{II}-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,n}\delta n]dr\Big\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a}-(\sigma_{ij,j}+F_i)\bar{\delta}u_idV$$

$$+\iint_{\Gamma_a}[\Pi_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\sigma_{ij}l_j]\delta ndr$$

$$+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[P_{II}+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n]dr\Big\}=0 \tag{2.5}$$

其中

$$u_i=R_i\qquad \bar{\delta}u_i=(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n\qquad (\Gamma_a)$$

$$P_{II}=\Pi_0l_j\delta x_j-(\bar{P}_iu_i\delta x_j)_{,j+i} \tag{2.6}$$

δn 为元素 S_a 的边界 Γ_a 的外法线改变量．由于 $\bar{\delta}u_i$，δn 为任意函数，则由方程(2.5)得

$$(\sigma_{ij,j}+F_i)=0\qquad (在\ S_a\ 内) \tag{2.7a}$$

$$P_{II}+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n=0\qquad (在\partial\Omega_1) \tag{2.7b}$$

$$\Pi_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\sigma_{ij}l_j=0\qquad (在\ \Gamma_a) \tag{2.7c}$$

方程 (2.7)为基于势能函数的驻值条件的基础上，求得的与离散型固体力学的间断型变分问题等价的尤拉方程的形式．这些方程与古典固体力学的不同点在于交界方程 (2.7c) 和边界条件(2.7b)．对古典固体力学而言，交界方程 (2.7c) 自然满足，边界方程(2.7b) 就退化为 $(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)=0$ 的形式．对[2]中的情况而言，交界方程(2.7c)是不同的．因为这儿待解函数是基于分片连续的函数类．所以在元素 S_a 与 S_b 的交界处 Γ_{ab} 上，$\delta n_a\neq\delta n_b$．故仅当 (2.7c) 成立时，某一阶变分为零的条件才能成立．

2. 基于余能函数的情况

基于上述的前提下，由有限个元素 S_a 构成的固体体系的总余能，为

$$\mathcal{L}(a)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a(a)}\mathcal{L}_0(\xi_i(a),\ \sigma_{ij}(\xi_i,a))dV(\xi_i)$$

$$-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}(\xi_i,a)l_jdr\Big\} \tag{2.8}$$

利用坐标变换(1.2)，把能量泛函 (2.8)用固定积分域表示，为

$$\mathcal{L}(a)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}\mathcal{L}_0(\xi_i(a),\ \sigma_{ij}(\xi_i,a))|J_1|dV\right.$$

$$\left.-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}(\xi_i,a)l_j dr\right\} \tag{2.9}$$

其中

$$\mathcal{L}_0=\frac{1}{2}b_{ijkl}\sigma_{ij}\sigma_{kl},\qquad \delta\mathcal{L}_0=\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}$$

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零，故方程(2.9)的一阶变分为零的形式，为

$$\delta\mathcal{L}(a)=\frac{\partial\mathcal{L}(a)}{\partial a}\bigg|_{a=0}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}[(\mathcal{L}_0),_i\delta x_i+(\mathcal{L}_0),_{\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}\right.$$

$$\left.+(\mathcal{L}_0)(\delta x_i),_i]dV-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}l_j dr\right\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})\bar{\delta}\sigma_{ij}dV+\iint_{\Gamma_a}u_i\delta\sigma_{ij}l_j dr\right.$$

$$\left.+\iint_{\Gamma_a}[\mathcal{L}_0-u_i(\sigma_{ij}l_j),_n]\delta n dr+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j dr\right\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})\bar{\delta}\sigma_{ij}dV+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_j dr\right.$$

$$\left.+\iint_{\Gamma_a}[\mathcal{L}_0+(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j),_n)u_i]\delta n dr\right\}=0 \tag{2.10}$$

其中

$$\left.\begin{array}{ll}\sigma_{ij}l_j=T_i,\quad \delta(\sigma_{ij}l_j)=T_{i,n}\delta n & (\Gamma_a)\\ \bar{\delta}\sigma_{ij,j}=0\quad (\text{在 } S_a \text{ 内}),\ \ \delta\sigma_{ij}l_j=\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j & (\text{在}\partial\Omega_2)\end{array}\right\} \tag{2.11}$$

由于 $\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j$ 与 δn 是任意函数，则得

$$\varepsilon_{ij}-u_{i,j}=0\qquad (\text{在 } S_a \text{ 内}) \tag{2.12a}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0\qquad (\text{在 } \partial\Omega_2) \tag{2.12b}$$

$$\mathcal{L}_0+(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j),_n)u_i=0\qquad (\text{在}\Gamma_a) \tag{2.12c}$$

方程(2.12)为基于余能函数的驻值条件的基础上，求得的与离散型固体力学的间断型变分问题等价的尤拉方程的形式。这些方程与古典固体力学的不同点在于交界方程(2.12c)。对古典固体力学而言，交界方程 (2.12c)自然满足。对[2]中的情况而言，交界方程(2.12c)是不同的。这是因为这里采用的待解函数类为分片连续的函数类。

3. 基于广义势能函数的情况

基于上述，由有限个元素 S_a 构成的固体体系的总的广义势能，为

$$U(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a(\alpha)}U_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),\ u_{i,j}(\xi_i,\alpha),\varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha),\ \sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))dV(\xi_i)\right.$$

$$\left.-\iint_{\Gamma_a(\alpha)\cap\partial\Omega_1(\alpha)}\bar{P}_iu_i(\xi_i,\alpha)\,dr(\xi_i)-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\sigma_{ij}l_jdr\right\}\qquad(2.13)$$

其中

$$U_0=\Pi_0+\sigma_{ij}(u_{i,j}-\varepsilon_{ij})\qquad(2.14)$$

利用坐标变换(1.2)，把能量泛函(2.13)用固定积分域表示，为

$$U(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}U_0(\xi_i(\alpha),\ u_i(\xi_i,\alpha),u_{i,j}(\xi_i,\ \alpha),\ \varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\ \alpha))\,|J_1|dV\right.$$

$$\left.-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_iu_i(\xi_i,\alpha)\,|J_i|dr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\sigma_{ij}l_jdr\right\}\qquad(2.15)$$

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零，方程(2.15)的一阶变分为零的形式，为

$$\delta U(\alpha)=\frac{\partial U(\alpha)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}[(U_0)_{,i}\delta x_i\right.$$

$$+(U_0)_{,u_i}\delta u_i+(U_0)_{,u_{i,j}}\delta u_{i,j}+(U_0)_{,\varepsilon_{ij}}\delta\varepsilon_{ij}+(U_0)_{,\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}$$

$$+(U_0)(\delta x_i)_{,i}]dV-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[(\bar{P}_iu_i)_{,j\neq i}\delta x_j$$

$$+(\bar{P}_iu_i)_{,u_i}\delta u_i+(\bar{P}_iu_i)(\delta x_j)_{,j\neq i}]dr$$

$$\left.-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\sigma_{ij}l_j\delta u_idr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_jdr\right\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}[(a_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\sigma_{ij})\bar{\delta}\varepsilon_{ij}+(u_{i,j}-\varepsilon_{ij})\bar{\delta}\sigma_{ij}\right.$$

$$-(\sigma_{ij,j}+F_i)\bar{\delta}u_i]dV+\iint_{\Gamma_a}[U_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\sigma_{ij}l_j]\delta ndr$$

$$+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[P_U+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n]dr$$

$$\left.-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_jdr\right\}=0\qquad(2.16)$$

其中

$$\left.\begin{array}{ll}u_i=R_i,\ \bar{\delta}u_i=(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n & (\Gamma_a)\\ P_U=U_0\delta n-(\bar{P}_iu_i\cdot\delta x_j)_{,j\neq i} & \end{array}\right\}\qquad(2.17)$$

由于 $\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j, \bar{\delta}\varepsilon_{ij}$，$\bar{\delta}u_i$，$\delta n$ 为相互无关的任意函数，则得

$$a_{ijkl}\varepsilon_{kl}-\sigma_{ij}=0 \qquad (\text{在 } S_a \text{ 内}) \tag{2.18a}$$

$$u_{i,j}-\varepsilon_{ij}=0 \qquad (\text{在 } S_a \text{ 内}) \tag{2.18b}$$

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0 \qquad (\text{在 } S_a \text{ 内}) \tag{2.18c}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (\text{在 } \partial\Omega_2) \tag{2.18d}$$

$$P_U+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n=0 \qquad (\text{在 } \partial\Omega_1) \tag{2.18e}$$

$$U_0+(R_{i,n}-u_{i,n})\sigma_{ij}l_j=0 \qquad (\text{在 } \Gamma_a) \tag{2.18f}$$

方程(2.18)为基于广义势能函数的基础上，根据驻值条件而求得的与离散型固体力学的间断型变分问题等价的尤拉方程的形式。这些方程为物理方程，几何方程，平衡方程，几何边界条件，力的边界条件和交界方程。对于古典固体力学而言，交界方程自然满足，力的边界条件退化为$(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)=0$ 的形式。

4. 基于广义余能函数的情况

基于上述，由有限个元素 S_a 构成的固体体系的总的广义余能，为

$$\mathcal{M}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a(\alpha)}\mathcal{M}_0(\xi_i(\alpha),\ u_i(\xi_i,\ \alpha),\ \sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))\cdot dV(\xi_i)$$
$$-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_jdr-\iint_{\Gamma_a(\alpha)\cap\partial\Omega_1(\alpha)}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i(\xi_i,\ \alpha)dr(\xi_i)\Big\} \tag{2.19}$$

其中

$$\mathcal{M}_0=\mathcal{L}_0+(\sigma_{ij,j}+F_i)u_i \tag{2.20}$$

利用坐标变换(1.2)，把能量泛函 (2.19)化为用固定积分域表示，为

$$\mathcal{M}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a}\mathcal{M}_0(\xi_i(\alpha),\ u_i(\xi_i,\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))\ |J_1|dV$$
$$-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_jdr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i|J_i|dr\Big\} \tag{2.21}$$

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零，方程 (2.21) 的一阶变分为零的形式，为

$$\delta\mathcal{M}(\alpha)=\frac{\partial\mathcal{M}(\alpha)}{\partial\alpha}\Big|_{\alpha=0}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a}[(\mathcal{M}_0)_{,i}\delta x_i+(\mathcal{M}_0)_{,u_i}\delta u_i$$
$$+(\mathcal{M}_0)_{,\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}+(\mathcal{M}_0)(\delta x_i)_{,i}]dV$$
$$-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}l_jdr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i$$
$$+u_i\delta\sigma_{ij}l_j+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i(\delta x_j)_{,j*i}]dr\Big\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a}[(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})\bar{\delta}\sigma_{ij}+(\sigma_{ij,j}+F_i)\bar{\delta}u_i]dV$$
$$+\iint_{\Gamma_a}[\mathcal{M}_0+u_i(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})]\delta ndr$$

$$+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[P_u-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n]dr$$

$$+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\delta\sigma_{ij}l_jdr\Big\}=0 \tag{2.22}$$

其中

$$\left.\begin{array}{l} u_i=R_i,\quad \bar{\delta}u_i=(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n \\ \sigma_{ij}l_j=T_i,\ \bar{\delta}\sigma_{ij}l_j=(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})\delta n \end{array}\right\}(\Gamma_a)$$

$$P_u=\mathscr{M}_0\delta n-((\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i\delta x_j)_{,j\neq i}$$

由于 $\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j$，$\bar{\delta}u_i$，$\delta n$ 为相互无关的任意函数，则有

$$\varepsilon_{ij}-u_{i,j}=0\qquad(\text{在 } S_a \text{ 内}) \tag{2.23a}$$

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0\qquad(\text{在 } S_a \text{ 内}) \tag{2.23b}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0\qquad(\text{在 } \partial\Omega_2) \tag{2.23c}$$

$$P_u-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,n}-u_{i,n})\delta n=0\qquad(\text{在 } \partial\Omega_1) \tag{2.23d}$$

$$\mathscr{M}_0+u_i(T_{i,n}-(\sigma_{ij}l_j)_{,n})=0\qquad(\text{在 } \Gamma_a) \tag{2.23e}$$

方程(2.23)为基于广义余能函数基础上，根据驻值条件而求得的与离散型固体力学的间断型变分问题等价的尤拉方程的形式．对于古典固体力学而言，交界方程(2.23e)自然满足，而力的边界条件(2.23d)退化为$(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)=0$的形式．

据上所述，离散型固体力学的解，在元素 S_a 内部应满足物理方程、平衡方程、几何方程．在元素边界 Γ_a 上，应满足交界方程．在整体边界上，应满足几何边界条件和力的边界条件，不过力的边界条件是考虑了边界可动性影响的力的边界条件．对交界方程而言，它随着选取的待解函数类和泛函的类型的不同而有不同的形式．若待解函数在整个定义域为充分光滑的，且略去边界可动性的影响时，则离散型固体力学的全部尤拉方程，就退化为古典固体力学的全部方程式．

变分方程(2.5)，(2.10)，(2.16)，(2.22)是求解离散型固体力学问题的有条件和无条件的广义伽略金方程的形式．因此可以直接利用它们来建立离散方程．从能量守恒角度而言，这些方程是对于依赖于连续参变量 α 的坐标变换，使能量泛函的值不变的条件下导出的方程式，因此，它们是 Noether 原理的直接结果[7]．

三、间断型变分原理

基于上述，我们可以建立离散型固体力学的各种类型的间断型变分原理．

1. 间断型第一变分原理

对于由有限个元素 S_a 构成的固体体系，基于待解函数为分片连续的函数类的基础上，当待解函数在元素 S_a 内部满足几何方程，在整体边界上满足几何边界条件时，则使下面可动边界的泛函

$$\Pi(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a(\alpha)}\Pi_0(\xi_i(\alpha),\ u_i(\xi_i,\ \alpha),\ u_{i,j}(\xi_i,\alpha))\cdot dV(\xi_i)$$

5. 间断型非古典广义第一变分原理

对于由有限个元素 S_a 构成的固体体系，基于待解函数为分片连续的函数类的基础上，当位移函数，应力函数，应变函数均为独立的待解函数，且应力函数在元素交界处为连续函数时，则使下面可动边界的泛函

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{S_a(\alpha)} U_0(\xi_i(\alpha),\ u_i(\xi_i,\ \alpha),\ u_{i,j}(\xi_i,\ \alpha),\ \varepsilon_{ij}(\xi_i,\ \alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\ \alpha))dV(\xi_i)$$

$$-\iint\limits_{\Gamma_a(\alpha)\cap\partial\Omega_1(\alpha)}\bar{P}_i u_i(\xi_i,\alpha)dr(\xi_i)-\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\sigma_{ij}l_j dr-\iint\limits_{\Gamma_a}u_i\sigma_{ij}l_j dr\Big\}\tag{3.5}$$

实现驻值条件的应力，位移，应变函数为离散型固体力学的真实解.

6. 间断型非古典广义第二变分原理

对于由有限个元素 S_a 构成的固体体系，基于待解函数为分片连续的函数类的基础上，当位移函数，应力函数为独立待解函数，且位移函数在元素交界处为连续函数时，则使下面可动边界的泛函

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{S_a(\alpha)} \mathscr{U}_0(\xi_i(\alpha),\ u_i(\xi_i,\ \alpha),\ \sigma_{ij}(\xi_i,\ \alpha))dV(\xi_i)$$

$$-\iint\limits_{\Gamma_a(\alpha)\cap\partial\Omega_1(\alpha)}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i(\xi_i,\ \alpha)dr(\xi_i)-\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j dr$$

$$-\iint\limits_{\Gamma_a}u_i\sigma_{ij}l_j dr\Big\}\tag{3.6}$$

实现驻值条件的应力，位移函数为离散型固体力学的真实解.

注意到第二节的间断型变分问题的推演过程，再考虑到上述各个变分原理的假定条件与变分条件，就可以证明，由各个变分原理求得的解满足离散型固体力学的尤拉方程. 证明从略.

基于上述所形成的间断型变分原理，概括了相应情况的古典与非古典变分原理. 当待解函数在整个定义域内为充分光滑的，且略去边界可动性的影响时，间断型变分原理就退化为古典变分原理. 在相应情况下，当略去边界可动性的影响时，间断型变分原理中非古典类型就退化为通常的非古典变分原理[4-6].

四、结　论

1. 所谓离散型固体力学是基于固体体系具有离散性、可分性，待解函数具有种种不同的间断性，以及定义域的边界可动性的基础上，用来解决固体体系在外界因素作用下所产生的应力、位移、应变的力学系统. 它的解应满足间断型变分原理或离散型变分原理，以及与

$$-\iint_{\Gamma_a(\alpha)\cap\partial\Omega_1(\alpha)} \bar{P}_i u_i(\xi_i,\ \alpha)dr(\xi_i)\Big\} \tag{3.1}$$

实现驻值条件的位移函数为离散型固体力学的真实解。

2. 间断型第二变分原理

对于由有限个元素 S_a 构成的固体体系，基于待解函数为分片连续的函数类的基础上，当待解函数在元素 S_a 内部满足平衡方程，在整体力的边界上满足力的边界条件时，则使下面可动边界的泛函

$$\mathcal{L}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a(\alpha)}\mathcal{L}_0(\xi_i(\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\ \alpha))dV(\xi_i)$$

$$-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_jdr\Big\} \tag{3.2}$$

实现驻值条件下的应力函数及位移函数为离散型固体力学的真实解。

3. 间断型广义第一变分原理

对于由有限个元素 S_a 构成的固体体系，基于待解函数为分片连续的函数类的基础上，当位移函数，应变函数，应力函数均为独立的待解函数时，则使下面可动边界的泛函

$$U(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a(\alpha)}U_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),\ u_{i,j}(\xi_i,\ \alpha),\ \varepsilon_{ij}(\xi_i,\alpha),\ \sigma_{ij}(\xi_i,\ \alpha))dV(\xi_i)$$

$$-\iint_{\Gamma_a(\alpha)\cap\partial\Omega_1(\alpha)}\bar{P}_iu_i(\xi_i,\ \alpha)dr(\xi_i)-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\sigma_{ij}l_jdr\Big\} \tag{3.3}$$

实现驻值条件下的应力，位移，应变函数为离散型固体力学的真实解。

4. 间断型广义第二变分原理

对于由有限个元素 S_a 构成的固体体系，基于待解函数为分片连续的函数类的基础上，当位移函数，应力函数为独立的待解函数时，则使下面可动边界的泛函

$$\mathcal{M}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a(\alpha)}\mathcal{M}_0(\xi_i(\alpha),\ u_i(\xi_i,\ \alpha),\ \sigma_{ij}(\xi_i,\ \alpha))dV(\xi_i)$$

$$-\iint_{\Gamma_a(\alpha)\cap\partial\Omega_1(\alpha)}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_i(\xi_i,\alpha)dr(\xi_i)$$

$$-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_jdr\Big\} \tag{3.4}$$

实现驻值条件的应力函数，位移函数为离散型固体力学的真实解。

这些变分原理等价的尤拉方程（物理方程，平衡方程，几何方程，交界方程，几何和力的边界条件）。当待解函数在整个定义域为充分光滑的，且略去边界可动性的影响时，离散型固体力学就退化为古典固体力学。

2. 离散型固体力学的变分原理，可分离散型与间断型变分原理。关于离散型变分原理在[2]中已作了讨论。间断型变分原理概括了其他各类变分原理。在与其他类的变分原理的条件相同时，则离散型变分原理就退化为相应的变分原理（或为离散型，或为非古典型，或为古典型）。

3. 交界方程是待解函数在元素交界处应满足的方程。它随着选取的待解函数类和泛函类型的不同而具有不同的形式。

在此，我衷心感谢钱伟长教授，王仁教授给予的帮助和鼓励。

参 考 文 献

[1] 陈宗基，力学的强大生命力在于它的创造性，光明日报（1978，11，10）.

[2] 牛庠均，固体的离散型变分原理——有限元离散分析的变分原理，应用数学和力学，2，5(1981).

[3] 冯康，基于变分原理的差分格式，应用数学与计算数学，2，4(1965).

[4] 钱伟长，《变分法及有限元》上册，科学出版社，(1980).

[5] Pian. T. H. H. and P. Tong, Basis of finite element method for solid continua *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 1, (1969).

[6] Prager, W., Variational principles of linear elastostatics for discontinuous displacements strains and stresses *Recent Progress in Applied Mechanics* (1967).

[7] Courant, R. and D. Hilbert, 《数学物理方法Ⅰ》(中译本)，科学出版社，(1958).

Solid Mechanics of Discrete Form and the Variational Principles of the Discontinuous Form

Niu Xiang-jun
(*Beijing Polytechnic University, Beijing*)

Abstract

This paper has discussed the fundamental assumptions, the differential equations, and the variational principles of discontinuous form belonging to a new developing branch of science—the solid mechanics of discrete form. The solid mechanics of discrete form belongs to the branch of science of discrete medium mechanics that is the developing direction of the mechanics for the present. Based on the solid system with discretization and separability, the unknown functions with discontinuity in defined regions and the defined regions with variable boundaries, the mechanics systems to solve the solid displacements, strains and stresses in various cases are called the solid mechanics of discrete form.

When the unknown functions are sufficiently smooth functions in the whole defined region and the effects of the variable boundaries are omitted, then the solid mechanics of discrete form will degenerate to the classical solid mechanics belonging to the continuum mechanics. Its variational principles will degenerate to the classical variational principles with the same cases.