应用数学和力学，第4卷第2期（1983年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

弹性厚板的分区广义变分原理

龙 驭 球

（清华大学，1982年5月17日收到）

摘 要

本文提出弹性厚板分区广义变分原理，其要点如下：

1. 各分区可任意定为势能区或余能区．分区势能、分区余能、分区混合变分原理是它的三种特殊形式．

2. 每个分区中独立变分变量的个数可任意规定．每个分区可定为单类变量区、二类变量区或三类变量区．

3. 每个交界线上的位移和力的连接条件可以放宽．这个原理为非协调元的厚板有限元法提供理论基础．

各种厚板有限元模型可看作这个原理的特殊应用．特别是弹性厚板分区混合变分原理的提出为分区混合有限元法应用于厚板问题打下了基础．

弹性力学和弹性薄板弯曲问题的变分原理在[1]、[2]、[3]中有系统的阐述。在[2]中还讨论了弹性厚板的变分原理。

弹性力学和弹性薄板弯曲问题的分区广义变分原理分别在[4]、[5]和[4]、[6]中讨论过。

本文在[5]、[6]的基础上进一步将分区广义变分原理推广到弹性厚板问题。其中厚板分区混合变分原理的提出为分区混合有限元法[7]推广应用于厚板问题打下了基础。

一、分区三类变量广义混合变分原理

我们考虑中等厚度的弹性板，简称弹性厚板。在板中面内取直角坐标x，y(图1)。z轴以向下为正。n和s分别表示边界的向外法线和切线方向。s的正方向如图所示。

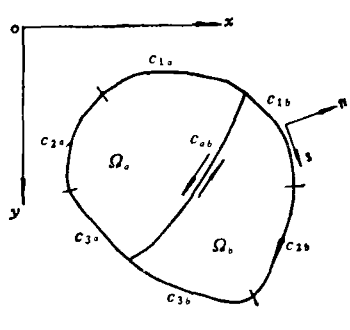

图 1

设板分为两个分区：a区和b区。两区所占的域分别为Ω_a和Ω_b，外部边界分别为c_a和c_b，各由三部分组成：

$$c_a=c_{1a}+c_{2a}+c_{3a},\qquad c_b=c_{1b}+c_{2b}+c_{3b}$$

其中c_{1a}和c_{1b}为固定边（挠度w，中面法线的法向转角ψ_n，切向转角ψ_s分别给定为$\bar{w},\bar{\psi}_n,\bar{\psi}_s$），$c_{2a}$和$c_{2b}$为简支边（挠度$w$，中面法线的切向转角$\psi_s$，法向弯矩$M_n$分别给定为$\bar{w}$，$\bar{\psi}_s$，$\bar{M}_n$），$c_{3a}$和$c_{3b}$为自由边

(法向弯矩M_n，扭矩M_{ns}，横剪力Q_n分别给定为$\bar{M}_n$，$\bar{M}_{ns}$，$\bar{Q}_n$)。两区的交界线为c_{ab}。挠度w以向下为正，法向转角ψ_n以由n到z的转向为正，切向转角ψ_s以由s到z的转向为正，法向弯矩M_n以使下部受拉为正，扭矩M_{ns}以使下部沿s正方向产生正号剪应力τ_{ns}为正，剪力Q_n以向下为正。

分区三类变量广义混合变分原理的要点可分述如下：

1. 自变函数

a区和b区各有三类独立的自变函数：

位移：$\{d\}^{(a)}=\lfloor w\ \ \psi_x\ \ \psi_y\rfloor^{T(a)}$

$\{d\}^{(b)}=\lfloor w\ \ \psi_x\ \ \psi_y\rfloor^{T(b)}$

内力：$\{s\}^{(a)}=\lfloor M_x\ \ M_y\ \ M_{xy}\ \ Q_x\ \ Q_y\rfloor^{T(a)}$

$\{s\}^{(b)}=\lfloor M_x\ \ M_y\ \ M_{xy}\ \ Q_x\ \ Q_y\rfloor^{T(b)}$

应变：$\{E\}^{(a)}=\lfloor k_x\ \ k_y\ \ 2k_{xy}\ \ \gamma_x\ \ \gamma_y\rfloor^{T(a)}$

$\{E\}^{(b)}=\lfloor k_x\ \ k_y\ \ 2k_{xy}\ \ \gamma_x\ \ \gamma_y\rfloor^{T(b)}$

法线转角ψ_x，ψ_y分别以由x到z和由y到z的转向为正。弯矩M_x，M_y以下部受拉为正，扭矩M_{xy}以使下部产生正向剪应力τ_{xy}为正，正面上的剪力Q_x，Q_y以向下为正。曲率k_x，k_y，扭率k_{xy}，剪应变γ_x（即γ_{xz}），γ_y（即γ_{yz}）分别以与正号的M_x，M_y，M_{xy}，Q_x，Q_y相应的变形为正。以上三类自变函数在域内、在边界线和交界线上都无需满足任何条件。

2. 泛函定义

设a区定为势能区，b区定为余能区。泛函定义为

$$\Pi_3=\Pi_{3p}^{(a)}-\Pi_{3c}^{(b)}+H_{pc} \tag{1.1}$$

其中$\Pi_{3p}^{(a)}$为a区（不包括交界线c_{ab}）的三类变量广义势能：

$$\begin{aligned}\Pi_{3p}^{(a)}=&\iint_{\Omega_a}\Big[A_b(\{k\})+A_s(\{\gamma\})-M_x\left(k_x+\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\right)-M_y\left(k_y+\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right)-M_{xy}\Big(2k_{xy}\\&+\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\Big)-Q_x\left(\gamma_x-\frac{\partial w}{\partial x}+\psi_x\right)-Q_y\left(\gamma_y-\frac{\partial w}{\partial y}+\psi_y\right)-\bar{m}_x\psi_x-\bar{m}_y\psi_y\\&-\bar{q}w\Big]dxdy+\int_{C_{1a}+C_{2a}}[M_{ns}(\psi_s-\bar{\psi}_s)-Q_n(w-\bar{w})]ds+\int_{C_{3a}}(\bar{M}_{ns}\psi_s-\bar{Q}_nw)ds\\&+\int_{C_{1a}}(\psi_n-\bar{\psi}_n)M_nds+\int_{C_{2a}+C_{3a}}\bar{M}_n\psi_nds\end{aligned} \tag{1.2}$$

这里$\bar{q}$为荷载集度，以向下为正。$\bar{m}_x$和$\bar{m}_y$为力偶荷载集度，以与正号ψ_x，ψ_y相应的方向为正。$A_b(\{k\})$和$A_s(\{\gamma\})$分别为弯扭和剪切应变能密度：

$$A_b(\{k\})=\frac{D}{2}[k_x^2+k_y^2+2\mu k_xk_y+2(1-\mu)k_{xy}^2] \tag{1.3}$$

$$A_s(\{\gamma\})=\frac{C}{2}(\gamma_x^2+\gamma_y^2) \tag{1.4}$$

其中D和C分别为板的抗弯刚度和抗剪刚度，μ为材料的波桑比。

$\Pi_{3c}^{(b)}$为b区（不包括交界线c_{ab}）的三类变量广义余能：

$$\Pi_{3c}^{(b)}=\iint_{\Omega_b}\Big[-A_b(\{k\})-A_s(\{\gamma\})+M_xk_x+M_yk_y+2M_{xy}k_{xy}+Q_x\gamma_x+Q_y\gamma_y$$

$$-\left(\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x-\bar{m}_x\right)\psi_x-\left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y-\bar{m}_y\right)\psi_y$$

$$+\left(\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\bar{q}\right)w\Big]dxdy+\int_{C_{1b}+C_{2b}}(\bar{\psi}_sM_{ns}-\bar{w}Q_n)\,ds+\int_{C_{3b}}[(M_{ns}$$

$$-\bar{M}_{ns})\psi_s-(Q_n-\bar{Q}_n)w]ds+\int_{C_{1b}}\bar{\psi}_nM_nds+\int_{C_{2b}+C_{3b}}(M_n-\bar{M}_n)\psi_nds \tag{1.5}$$

H_{pc}为交界线c_{ab}的附加能量项：

$$H_{pc}=\int_{C_{ab}}(M_n^{(b)}\ \psi_n^{(a)}+M_{ns}^{(b)}\ \psi_s^{(a)}+Q_n^{(b)}\ w^{(a)})ds \tag{1.6}$$

3. 驻值条件

泛函驻值条件

$$\delta\Pi_3=\delta\Pi_{3p}^{(a)}-\delta\Pi_{3c}^{(b)}+\delta H_{pc}=0 \tag{1.7}$$

等价于厚板分区系统的全部场方程、边界条件和交界线上的连接条件，其中包括：

在Ω_a和Ω_b内的物理方程、几何方程和平衡方程：

$$M_x=D(k_x+\mu k_y),\quad M_y=D(k_y+\mu k_x),\quad M_{xy}=D(1-\mu)k_{xy} \tag{1.8}$$

$$k_x=-\frac{\partial\psi_x}{\partial x},\quad k_y=-\frac{\partial\psi_y}{\partial y},\quad 2k_{xy}=-\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right) \tag{1.9}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x-\bar{m}_x=0,\quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y-\bar{m}_y=0\\&\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\bar{q}=0\end{aligned}\right\} \tag{1.10}$$

在边界线上的几何边界条件、静力边界条件：

$$\left.\begin{aligned}&\psi_s=\bar{\psi}_s,\quad w=\bar{w} &&\text{在}c_{1a}+c_{2a}+c_{1b}+c_{2b}\text{上}\\&\psi_n=\bar{\psi}_n &&\text{在}c_{1a}+c_{1b}\text{上}\end{aligned}\right\} \tag{1.11}$$

$$\left.\begin{aligned}&M_{ns}=\bar{M}_{ns},\quad Q_n=\bar{Q}_n &&\text{在}c_{3a}+c_{3b}\text{上}\\&M_n=\bar{M}_n &&\text{在}c_{2a}+c_{3a}+c_{2b}+c_{3b}\text{上}\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

在交界线 c_{ab} 上的连接条件：

$$Q_n^{(a)}=-Q_n^{(b)},\quad M_n^{(a)}=M_n^{(b)},\quad M_{ns}^{(a)}=M_{ns}^{(b)} \tag{1.13}$$

$$w^{(a)}=w^{(b)},\quad \psi_n^{(a)}=-\psi_n^{(b)},\quad \psi_s^{(a)}=-\psi_s^{(b)} \tag{1.14}$$

二、分区三类变量广义势能和广义余能原理

1. $\Pi_{3p}^{(a)}$和$\Pi_{3c}^{(a)}$之间的转换关系

a区（不包括交界线c_{ab}）的三类变量广义势能$\Pi_{3p}^{(a)}$和广义余能$\Pi_{3c}^{(a)}$二者之间有如下转换关系：

$$\Pi_{sp}^{(a)}+\Pi_{sc}^{(a)}=\int_{C_{ab}}\left[Q_n^{(a)}w^{(a)}-M_n^{(a)}\psi_n^{(a)}-M_{ns}^{(a)}\psi_s^{(a)}\right]ds \tag{2.1}$$

证：由式(1.2)和（1.5）[在式(1.5)中将b换成a]，得

$$\begin{aligned}\Pi_{sp}^{(a)}+\Pi_{sc}^{(a)}=&\iint_{\Omega_a}\Big[-M_x\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-M_y\frac{\partial\psi_y}{\partial y}-M_{xy}\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\Big)+Q_x\Big(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi_x\Big)\\&+Q_y\Big(\frac{\partial w}{\partial y}-\psi_y\Big)-\Big(\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x\Big)\psi_x-\Big(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y\Big)\psi_y+\Big(\frac{\partial Q_x}{\partial x}\\&+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\Big)w\Big]dxdy-\int_{C_{1a}+C_{2a}+C_{3a}}(Q_nw-M_n\psi_n-M_{ns}\psi_s)ds\end{aligned} \tag{2.2}$$

根据分部积分，可得下列恒等关系：

$$\begin{aligned}&\iint_{\Omega_a}\Big[-M_x\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-M_y\frac{\partial\psi_y}{\partial y}-M_{xy}\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\Big)+Q_x\Big(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi_x\Big)+Q_y\Big(\frac{\partial w}{\partial y}-\psi_y\Big)\Big]dxdy\\=&\iint_{\Omega_a}\Big[\Big(\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x\Big)\psi_x+\Big(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}-Q_y\Big)\psi_y-\Big(\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}\Big)w\Big]dxdy\\&+\int_{C_{1a}+C_{2a}+C_{3a}+C_{ab}}(Q_nw-M_n\psi_n-M_{ns}\psi_s)ds\end{aligned} \tag{2.3}$$

将式（2.3）代入式（2.2），即得式（2.1）。证毕。

如果整个区域不再分区，这时c_{ab}不存在，故得

$$\Pi_{sp}^{(a)}+\Pi_{sc}^{(a)}=0 \tag{2.4}$$

2. 分区三类变量广义势能原理

在分区三类变量广义混合变分原理的泛函表示式（1.1）中，a区按广义势能给出，b区按广义余能给出。现对b区也改为按广义势能给出。为此，由式（2.1）可写出

$$\Pi_{sc}^{(b)}=-\Pi_{sp}^{(b)}+\int_{C_{ab}}[Q_n^{(b)}w^{(b)}-M_n^{(b)}\psi_n^{(b)}-M_{ns}^{(b)}\psi_s^{(b)}]ds$$

将此式代入式（1.1），得

$$\Pi_s=\Pi_{sp}^{(a)}+\Pi_{sp}^{(b)}+H_{pp} \tag{2.5}$$

其中H_{pp}是交界线c_{ab}的势能附加项：

$$H_{pp}=\int_{C_{ab}}[Q_n^{(b)}(w^{(a)}-w^{(b)})+M_n^{(b)}(\psi_n^{(a)}+\psi_n^{(b)})+M_{ns}^{(b)}(\psi_s^{(a)}+\psi_s^{(b)})]ds \tag{2.6a}$$

式（2.5）和（2.6a）就是分区三类变量广义势能原理的泛函表示式。可以证明，这个泛函的驻值条件等价于厚板分区系统的全部场方程、边界条件和交界线上的连接条件。

如果把式（2.6a）中的a和b互换，即得H_{pp}的另一表示式：

$$H_{pp}=\int_{C_{ab}}[Q_n^{(a)}(w^{(b)}-w^{(a)})+M_n^{(a)}(\psi_n^{(a)}+\psi_n^{(b)})+M_{ns}^{(a)}(\psi_s^{(a)}+\psi_s^{(b)})]ds \tag{2.6b}$$

如果在交界线c_{ab}上的位移连接条件（1.14）事先得到满足，则由式（2.6a）或（2.6b）即得

$$H_{pp}=0 \tag{2.7}$$

3. 分区三类变量广义余能原理

如果在式（1.1）中，对a区改为按广义余能表示，则将式（2.1）代入式（1.1），即得

$$\Pi_s=-\Pi_{sc}^{(a)}-\Pi_{sc}^{(b)}+H_{cc} \tag{2.8}$$

其中H_{oc}为交界线c_{ab}的余能附加项：

$$H_{oc}=\int_{c_{ab}}[(Q_n^{(a)}+Q_n^{(b)})w^{(a)}+(M_n^{(b)}-M_n^{(a)})\psi_n^{(a)}+(M_{ns}^{(b)}-M_{ns}^{(a)})\psi_s^{(a)}]ds \quad (2.9a)$$

式（2.8）和（2.9a）就是分区三类变量广义余能原理的泛函表示式．如果把式（2.9a）中的a和b互换，即得H_{oc}的另一表示式：

$$H_{oc}=\int_{c_{ab}}[(Q_n^{(a)}+Q_n^{(b)})w^{(b)}+(M_n^{(a)}-M_n^{(b)})\psi_n^{(b)}+(M_{ns}^{(a)}-M_{ns}^{(b)})\psi_s^{(b)}]ds \quad (2.9b)$$

如果在交界线c_{ab}上力的连接条件（1.13）事先得到满足，则由式（2.9）即得

$$H_{oc}=0 \quad (2.10)$$

三、分区二类变量和单类变量的广义变分原理

1. 分区二类变量广义变分原理

利用应变能密度$A_b(\{k\})$，$A_s(\{\gamma\})$和应变余能密度$B_b(\{M\})$，$B_s(\{Q\})$之间的如下关系：

$$\left.\begin{aligned}B_b(\{M\})&=M_xk_x+M_yk_y+2M_{xy}k_{xy}-A_b(\{k\})\\B_s(\{Q\})&=Q_x\gamma_x+Q_y\gamma_y-A_s(\{\gamma\})\end{aligned}\right\} \quad (3.1)$$

在a区（不包括交界线c_{ab}）的三类变量广义势能$\Pi_{3p}^{(a)}$和广义余能$\Pi_{3c}^{(a)}$中可消去应变$\{E\}$，从而得到二类变量（位移$\{d\}$，内力$\{s\}$）广义势能$\Pi_{2p}^{(a)}$和广义余能$\Pi_{2c}^{(a)}$如下：

$$\begin{aligned}\Pi_{2p}^{(a)}=&\iint_{\Omega_a}\Big[-M_x\frac{\partial\psi_x}{\partial x}-M_y\frac{\partial\psi_y}{\partial y}-M_{xy}\Big(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\Big)+Q_x\Big(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi_x\Big)+Q_y\Big(\frac{\partial w}{\partial y}\\&-\psi_y\Big)-B_b(\{M\})-B_s(\{Q\})-\bar{m}_x\psi_x-\bar{m}_y\psi_y-\bar{q}w\Big]dxdy\\&+\int_{c_{1a}+c_{2a}}[(\psi_s-\bar{\psi}_s)M_{ns}-(w-\bar{w})Q_n]ds+\int_{c_{3a}}(\bar{M}_{ns}\psi_s-\bar{Q}_nw)ds\\&+\int_{c_{1a}}(\psi_n-\bar{\psi}_n)M_nds+\int_{c_{2a}+c_{3a}}\bar{M}_n\psi_nds\end{aligned} \quad (3.2)$$

$$\begin{aligned}\Pi_{2c}^{(a)}=&\iint_{\Omega_a}\Big[B_b(\{M\})+B_s(\{Q\})-\Big(\frac{\partial M_x}{\partial x}+\frac{\partial M_{xy}}{\partial y}-Q_x-\bar{m}_x\Big)\psi_x-\Big(\frac{\partial M_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial M_y}{\partial y}\\&-Q_y-\bar{m}_y\Big)\psi_y+\Big(\frac{\partial Q_x}{\partial x}+\frac{\partial Q_y}{\partial y}+\bar{q}\Big)w\Big]dxdy+\int_{c_{1a}+c_{2a}}(\bar{\psi}_sM_{ns}-\bar{w}Q_n)ds\\&+\int_{c_{3a}}[(M_{ns}-\bar{M}_{ns})\psi_s-(Q_n-\bar{Q}_n)w]ds+\int_{c_{1a}}\bar{\psi}_nM_nds\\&+\int_{c_{2a}+c_{3a}}(M_n-\bar{M}_n)\psi_nds\end{aligned} \quad (3.3)$$

根据式(1.1)、(2.5)、(2.8)，可得出分区二类变量广义混合、势能、余能变分原理的泛函表示式如下：

$$\Pi_2=\Pi_{2p}^{(a)}-\Pi_{2c}^{(b)}+H_{pc} \quad (3.4)$$

$$\Pi_2=\Pi_{2p}^{(a)}+\Pi_{2p}^{(b)}+H_{pp} \quad (3.5)$$

$$\Pi_2=-\Pi_{2c}^{(a)}-\Pi_{2c}^{(b)}+H_{oc} \quad (3.6)$$

其中H_{pc}，H_{pp}，H_{cc}仍由式(1.6)、(2.6)、(2.9)给出．

2. 分区单类变量变分原理

现在考虑每个分区只有一类自变函数的情形．

如果a区是势能区，则只取位移$\{d\}$作自变函数。这时式（1.2）中的Π_{3p}^{a} 或式（3.2）中的$\Pi_{2p}^{(a)}$即转化为a区单类变量势能$\Pi_{1p}^{(a)}$如下：

$$\Pi_{1p}^{(a)}=\iint_{\Omega_a}[A_b(\{d\})+A_s(\{d\})-\bar{m}_x\psi_x-\bar{m}_y\psi_y-\bar{q}w]\,dxdy+\int_{c_{1a}+c_{2a}}[(\psi_s-\bar{\psi}_s)\hat{M}_{ns}-(w-\bar{w})\hat{Q}_n]ds+\int_{c_{3a}}(\hat{M}_{ns}\psi_s-\bar{Q}_nw)\,ds+\int_{c_{1a}}(\psi_n-\bar{\psi}_n)\hat{M}_nds+\int_{c_{2a}+c_{3a}}\bar{M}_n\psi_nds \tag{3.7a}$$

其中$\hat{Q}_n$，$\hat{M}_n$，$\hat{M}_{ns}$是边界力变量，也可表示为位移$\{d\}$的函数，$A_b(\{d\})$和$A_s(\{d\})$为用位移$\{d\}$表示的应变能密度：

$$A_b(\{d\})=\frac{D}{2}\left[\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial\psi_y}{\partial y}\right)^2+2\mu\frac{\partial\psi_x}{\partial x}\frac{\partial\psi_y}{\partial y}+\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial\psi_x}{\partial y}+\frac{\partial\psi_y}{\partial x}\right)^2\right] \tag{3.8}$$

$$A_s(\{d\})=\frac{C}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}-\psi_x\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial y}-\psi_y\right)^2\right] \tag{3.9}$$

如果位移$\{d\}$事先满足几何边界条件，则

$$\Pi_{1p}^{(a)}=\iint_{\Omega_a}[A_b(\{d\})+A_s(\{d\})-\bar{m}_x\psi_x-\bar{m}_y\psi_y-\bar{q}w]\,dxdy+\int_{c_{3a}}(\bar{M}_{ns}\psi_s-\bar{Q}_nw)ds+\int_{c_{2a}+c_{3a}}\bar{M}_n\psi_nds \tag{3.7b}$$

如果a区是余能区，则只取内力$\{s\}$作自变函数，而且$\{s\}$应事先满足平衡微分方程（1.10），这时式（1.5）相应的$\Pi_{3c}^{(a)}$或式（3.3）中的$\Pi_{2c}^{(a)}$即转化为单类变量余能$\Pi_{1c}^{(a)}$如下：

$$\Pi_{1c}^{(a)}=\iint_{\Omega_a}[B_b(\{M\})+B_s(\{Q\})]\,dxdy+\int_{c_{1a}+c_{2a}}(\bar{\psi}_sM_{ns}-\bar{w}Q_n)ds+\int_{c_{3a}}[(M_{ns}-\bar{M}_{ns})\hat{\psi}_s-(Q_n-\bar{Q}_n)\hat{w}]ds+\int_{c_{1a}}\bar{\psi}_nM_nds+\int_{c_{2a}+c_{3a}}(M_n-\bar{M}_n)\hat{\psi}_nds \tag{3.10a}$$

其中$\hat{w}$，$\hat{\psi}_n$，$\hat{\psi}_s$是边界位移变量。

如果内力$\{s\}$事先还满足力的边界条件，则

$$\Pi_{1c}^{(a)}=\iint_{\Omega_a}[B_b(\{M\})+B_s(\{Q\})]\,dxdy+\int_{c_{1a}+c_{2a}}(\bar{\psi}_sM_{ns}-\bar{w}Q_n)\,ds+\int_{c_{1a}}\bar{\psi}_nM_nds \tag{3.10b}$$

根据式（1.1）、（2.5）、（2.8）或式（3.4）、（3.5）、（3.6）可得出分区单类变量混合、势能、余能原理的泛函表示式如下：

$$\Pi_1=\Pi_{1p}^{(a)}-\Pi_{1c}^{(b)}+H_{pc} \tag{3.11}$$

$$\Pi_1=\Pi_{1p}^{(a)}+\Pi_{1p}^{(b)}+H_{pp} \tag{3.12}$$

$$\Pi_1=-\Pi_{1c}^{(a)}-\Pi_{1c}^{(b)}+H_{cc} \tag{3.13}$$

其中H_{pc}，H_{pp}，H_{cc}的表示式同前。

四、分区广义变分原理的一般形式

综合以上讨论，可得出弹性厚板分区广义变分原理的一般形式．设弹性厚板分为多个分区，各个分区可任意定为单类、二类、三类变量的势能区(例如图 2 中的Ω_{p1}，Ω_{p2}，Ω_{p3}区）或余能区(例如图 2 中的Ω_{c1}，Ω_{c2}，Ω_{c3}区）．相邻分区的交界线分为 c_{pc}，c_{pp}，c_{cc} 三类：在c_{pc}的一侧是势能区，另侧是余能区；在 c_{pp} 的两侧都是势能区；在 c_{cc} 的两侧都是余能区．

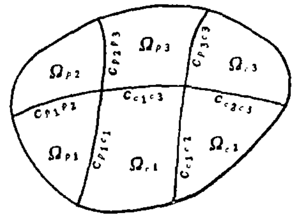

图 2

分区广义变分原理的泛函一般形式可写成：

$$\Pi=\sum_{\Omega_p}\Pi_p-\sum_{\Omega_c}\Pi_c+\sum_{c_{pc}}H_{pc}+\sum_{c_{pp}}H_{pp}+\sum_{c_{cc}}H_{cc} \tag{4.1}$$

上式右边各项的意义如下：

第一项表示各势能区Ω_p的势能或广义势能Π_p之和，Π_p可以是Π_{1p}，Π_{2p}或Π_{3p}，分别由式(3.7)、(3.2)、(1.2)给出．

第二项表示各余能区Ω_c的余能或广义余能Π_c之和，Π_c 可以是Π_{1c}，Π_{2c}或Π_{3c}，分别由式(3.10)、(3.3)、(1.5)给出．

第三项表示相邻分区交界线c_{pc}处的混合能量附加项H_{pc}之和，其中H_{pc}由式(1.6) 给出．

第四项表示相邻分区交界线c_{pp}处的势能附加项H_{pp}之和，其中H_{pp}由式（2.6）给出．

第五项表示相邻分区交界线c_{cc}处的余能附加项H_{cc}之和，其中H_{cc}由式（2.9）给出．

可以证明，式（4.1）定义的泛函Π的驻值条件

$$\delta\Pi=0 \tag{4.2}$$

等价于厚板多区系统的全部场方程、边界条件以及交界线上的连接条件．

如果每个分区都定为势能区，则由式（4.1）可得出分区势能或分区广义势能原理的泛函如下：

$$\Pi=\sum_{\Omega_p}\Pi_p+\sum_{c_{pp}}H_{pp} \tag{4.3}$$

式（2.5)、(3.5)、(3.12）是式（4.3）的特例．

如果每个分区都定为余能区，则由式（4.1）可得出分区余能或分区广义余能原理的泛函如下：

$$\Pi=-\sum_{\Omega_c}\Pi_c+\sum_{c_{cc}}H_{cc} \tag{4.4}$$

式(2.8)、(3.6)、(3.13)是式(4.4)的特例．

弹性厚板分区广义变分原理的泛函表示式（4.1）的提出，使厚板变分原理有了最为一般的形式，并使厚板各种特殊形式的变分原理得到沟通．

利用转换关系式（2.1）可以方便地对厚板各类变分原理的泛函表示式直接进行转换．

弹性厚板分区混合变分原理及其泛函表示式（1.1）的提出为分区混合有限元法应用于厚板问题打下基础．

参 考 文 献

[1] 钱伟长，《变分法及有限元》(上册)，科学出版社，(1980).

[2] 胡海昌，《弹性力学的变分原理及其应用》，科学出版社，(1981).

[3] Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, (1975).

[4] 钱伟长，非协调元和广义变分原理，合肥有限元邀请学术报告会论文，(1981).

[5] 龙驭球，弹性力学中的分区广义变分原理，上海力学，2,2(1981),1—9.

[6] 龙驭球，弹性薄板的分区广义变分原理，《应用数学和力学论文集》，(待出版).

[7] 龙驭球，支秉琛，匡文起，单建，分区混合有限元法计算应力强度因子，力学学报，4(1982).

Subregion Generalized Variational Principles for Elastic Thick Plates

Long Yu-chiu

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

In this paper, the subregion generalized variational principle for elastic thick plates is proposed. The main points of it may be stated as follows:

1. Each subregion may be assigned arbitrarily as potential region or complementary region. The subregion variational principles of potential energy, complementary energy and mixed energy represent three special forms of this principle.

2. The number of independent variational variables in each subregion may be assigned arbitrarily. Anyone of the subregions may be assigned as one-variable-region, two-variable-region or three-variable-region.

3. The conjunction conditions of displacements and stresses on each interline of neighbouring subregions may be relaxed. On the basis of this principle the finite element analysis of non-conforming elements for thick plates can be formulated.

Different finite element models for thick plates can be obtained by different applications of this principle. Especially the subregion mixed variational principle for thick plates may be applied to formulating the subregion mixed finite element method for thick plates.