

文章编号: 1000-0887(2004) 12-1249-09

# 用于应变局部化行为分析的弹塑性 损伤耦合本构研究\*

沈新普<sup>1</sup>, 沈国晓<sup>2</sup>, 陈立新<sup>3</sup>

- (1. 沈阳工业大学 建筑工程学院, 沈阳 110023;  
2. 太原重型机械学院 应用科学系, 太原 030024;  
3. 东北煤田地质局 煤层甲烷气开发中心, 沈阳 110035)

(我刊原编委杨桂通推荐)

**摘要:** 在已有的损伤塑性耦合本构模型基础上, 进行了本构意义上的参数辨识, 对不同参数取值时的材料行为进行了数值模拟, 并对损伤演化律提出了改进措施。应用改进了的模型, 在结构意义上进行了数值检验, 模拟了简单试件拉伸时的变形局部化。数值结果表明这一理论模型有更好的数值稳定性, 能较为准确地模拟金属韧性断裂的变形局部化现象。

**关键词:** 损伤; 塑性; 局部化; 本构模型  
**中图分类号:** O342      **文献标识码:** A

## 引 言

应变局部化是指在加载过程中塑性变形或其它非弹性变形(如断裂等)向一个窄带区域汇集, 而结构的其它部分则处于弹性卸载状态。一方面, 应变局部化是结构局部破坏的先兆, 对结构的承载有不利的影响; 另一方面, 应变局部化在金属切割/成型工艺中有正面的影响: 高度的应变集中能提高切口的光滑程度。

粘塑性和梯度增强塑性模型是以往处理金属材料与结构中的应变局部化问题的两个主要方法<sup>[1~2]</sup>。近年来, 在上述领域, 连续损伤力学模型也得到了越来越多的应用<sup>[3~9]</sup>。根据模型中损伤加载及演化的规律的不同类型, 上述的文献中的模型可以分为以下两类: 1) 基于塑性的损伤模型; 2) 基于能量的损伤模型。

Gurson 模型(及其推广形式)是应用最为广泛的基于塑性的损伤模型<sup>[9]</sup>, 模型中损伤的演化过程取决于相应的塑性应变的演化。

与 Gurson 模型相对应, Lemaitre<sup>[10]</sup>介绍的弹性损伤模型中, 损伤的萌生是由弹性能的值决定的, 并且损伤的演化过程完全取决于损伤共轭力(损伤应变能释放率)。因此, 弹性损伤模型是一个典型的基于能量的损伤模型。近几年来基于塑性的损伤模型在金属加工/成型研究中得到了愈来愈多的应用, 各种基于 Gurson 模型的细观及宏观模型和连续损伤模型都有了很多

\* 收稿日期: 2002\_12\_09; 修订日期: 2004\_07\_06

基金项目: 辽宁省自然科学基金资助项目(2001101023)

作者简介: 沈新普(1963—), 男, 河北清河人, 教授, 博士(联系人, Tel: + 86\_24\_23915126; Fax: + 86\_24\_23906300; E\_mail: xinpushen@vip.sina.com)。

进步<sup>[7~8]</sup>。

Saanouni\_Forster\_Hatira<sup>[5]</sup>模型是一个基于塑性的连续损伤模型。该模型成功地模拟了金属板材加工过程中的韧性损伤(断裂)现象。本文在这一模型的基础上,针对韧性断裂过程中的应变局部化现象,对模型进行了改进。并数值模拟了不同模型的本构行为特性,以及相应的结构行为特性。

## 1 损伤模型及有效变量表达式

本研究采用的损伤模型为 Lemaitre<sup>[10]</sup>介绍的各向同性标量损伤模型,并且采用了由 Saanouni, Forster 和 Hatira<sup>[5]</sup>提出的“总自由能等效原理”。

### 1.1 Saanouni\_Forster\_Hatira 模型有效变量表达式

在 Saanouni\_Forster\_Hatira 模型中有效应力及有效应变的表达式为:

$$\varepsilon^e = \sqrt{1-D} \varepsilon^e, \quad \sigma = \sigma / \sqrt{1-D}, \quad (1)$$

式中上标符号~表示有效变量,即与净材料相关的变量。塑性硬化变量 $r$ 及其共轭力 $R$ 的表示式为:

$$r = \sqrt{1-D} r, \quad R = R / \sqrt{1-D}. \quad (2)$$

弹性模量 $E$ 及硬化模量 $Q$ 及其与损伤材料相应量的关系为:

$$E = (1-D)E, \quad Q = (1-D)Q. \quad (3)$$

这样, Saanouni\_Forster\_Hatira 模型的自由能 $\Psi$ 由两项组成,为:

$$\Psi = \Psi^e + \Psi^r. \quad (4)$$

具体表达式为:

$$\rho\Psi = 0.5\lambda(\text{tr}\varepsilon^e)^2 + \mu(\varepsilon^e : \varepsilon^e) + 0.5Qr^2, \quad (5)$$

式中 $\lambda$ 和 $\mu$ 为净材料的Lame常数。损伤材料的胡克定律为:

$$\sigma = \lambda(\text{tr}\varepsilon^e)\mathbf{I} + 2\mu\varepsilon^e, \quad (6)$$

式中 $\lambda$ 和 $\mu$ 为损伤材料的Lame常数,表达式为:

$$\lambda = (1-D)\lambda, \quad \mu = (1-D)\mu. \quad (7)$$

进一步,其损伤共轭力 $Y$ 及塑性硬化变量 $r$ 的共轭力为:

$$Y = 0.5\lambda(\text{tr}\varepsilon^e)^2 + \mu(\varepsilon^e : \varepsilon^e) + 0.5Qr^2, \quad (8)$$

$$R = Qr. \quad (9)$$

### 1.2 有效变量表达式的其它形式

式(1)给出的有效变量表达式是目前有成功应用的模型之一<sup>[5~7]</sup>,被用于金属加工过程中的粘塑性与损伤耦合问题的求解,模拟了多个工程中的问题,如板材成型加工的极限等<sup>[8]</sup>。与此同时,其他的研究者也采用另外的有效变量表达式求解问题。本文将讨论比较不同的有效变量表达式的行为特性,并进一步提出意见。

式(1)给出的有效变量表达式可以更一般地写为:

$$\varepsilon^e = (1-D)^a \varepsilon^e, \quad \sigma = \sigma / (1-D)^a, \quad (10)$$

式中的上标 $a$ 被称作“有效关系指数”,其值为正,即 $a \geq 0$ ,并被 Lemaitre<sup>[10]</sup>取为1,在式(1)中为0.5。为便于比较,下面将式(2)至(8)重新改写为用有效关系指数 $a$ 表示的形式:

$$E = (1-D)^{2a}E, \quad Q = (1-D)^{2a}Q, \quad (11)$$

$$\rho\Psi = 0.5(1-D)^{2a}\varepsilon^e : \varepsilon^e + 0.5Qr^2, \quad (12)$$

$$Y = (1-D)^{2a-1}\varepsilon^e : \varepsilon^e. \quad (13)$$

### 1.3 本构关系

塑性\_损伤耦合的加载条件定义为:

$$f^{pD} = J_2(\sigma) - R - \alpha \leq 0, \quad (14)$$

式中  $J_2$  为有效应力的第二不变量, 定义为:

$$J_2(\sigma) = \sqrt{\frac{3}{2} s : s}, \quad s = \sigma - \sigma_m \mathbf{I}, \quad \sigma_m = \frac{1}{3}(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}). \quad (15)$$

参照[7], 塑性\_损伤耦合的势函数定义为:

$$F^{pD} = f^p + \frac{1}{2} \frac{b}{Q} R^2 + \left[ \frac{1}{(1-D)^\phi} \right] \frac{S}{s+1} \left[ \frac{Y^{\text{nonlocal}}}{S} \right]^{s+1}, \quad (16)$$

式中  $a, b, s, \phi$  为模型参数.

塑性应变增量和损伤演化律定义为:

$$\mathcal{E} = \mathcal{K}^D \frac{\partial F^{pD}}{\partial \sigma} = \frac{3}{2} \mathcal{K}^D \frac{1}{(1-D)^a} \frac{s}{J_2} = \mathcal{K}^D N, \quad (17)$$

$$\text{式中 } N = \frac{3}{2} \frac{1}{(1-D)^a} \frac{s}{J_2}, \quad r = \frac{\mathcal{K}^D}{(1-D)^a} (1-br), \quad (18)$$

式中  $\mathcal{K}^D$  为塑性和损伤的加载乘子. 从而, 损伤增量的计算式为:

$$D = \mathcal{K}^D \frac{\partial F^{pD}}{\partial Y} = \mathcal{K}^D \left( \frac{Y}{S} \right)^s \frac{1}{(1-D)^\phi}. \quad (19)$$

上式的损伤增量的计算式类似于 Kachanov<sup>[11]</sup> 给出的用于粘弹性损伤计算的模型. Saanouni\_Forster\_Hatira<sup>[5]</sup> 在上式中假设了  $\phi \geq 0$ , 从而使得含损伤材料中的损伤演化率高于无损材料中的损伤演化率. 这一假设会导致数值结果呈现相当程度的脆性. 这一点将在下面的第4节的数值结果中得到证明. 另一方面, 其他的研究者使用的基于塑性的损伤模型中的损伤演化率就与上式不同. 其中, Lemaitre 给出的演化率为:

$$D = \mathcal{K}^D (1-D). \quad (20)$$

此外, 基于细观力学的 Gurson 类损伤模型<sup>[2]</sup> 就假设了  $\phi \leq 0$ . 需要注意的一点是: 基于塑性的损伤模型中, 损伤的演化是由塑性变形的增长来主导的, 这里的损伤共轭力与“基于能量”的损伤模型不同. 后者的损伤共轭力是损伤加载指标参数, 主导着损伤演化.

## 2 本构积分数值格式

### 2.1 方法的一般描述

本文采用了 Besson<sup>[12]</sup> 讲述的隐式  $\theta$  法计算格式进行本构积分计算. 这一方法连同前述的本构模型已经植入了巴黎矿业学院材料中心的 ZeBuLon 程序, 该程序是一个面向对象(C++)的有限元程序包. 为了便于理解, 下面简要介绍一下隐式  $\theta$  法计算格式用于本模型的主要公式.

设定待求参数向量为  $v_l$ , 相应的约束条件向量为  $R$ . 采用 Newton\_Raphson 格式计算塑性损伤耦合问题迭代收敛时有:

$$R = R_0 \quad (21)$$

式中  $R_0$  表示初始给定条件.

给定一个应变载荷增量  $\Delta \varepsilon$ , 隐式  $\theta$  法就是要相应的变动  $\theta(\Delta v_l)$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ , 同时保持等式(21)成立, 这时有:

$$\frac{\partial R}{\partial v_l} \delta v_l = \left( \delta \Delta \varepsilon \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right)^T. \quad (22)$$

上式可以写成下面的形式:

$$\mathbf{J}\delta\mathbf{v}_I = \left( \delta\Delta\varepsilon \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right)^T, \quad (23)$$

式中  $\mathbf{J}$  为 Jacobi 矩阵。

从而可以得出:

$$\delta\mathbf{v}_I = \mathbf{J}^{-1} \left( \delta\Delta\varepsilon \quad 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right)^T, \quad (24)$$

这里  $\mathbf{J}^{-1}$  可以表示为:

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{K}_{ee} & \dots & \mathbf{K}_D \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{K}_D & \dots & \mathbf{K}_{DD} \end{pmatrix}, \quad (25)$$

式中  $\mathbf{K}_{ee}$  为  $\delta\Delta\varepsilon^e$  相应的子矩阵,  $\mathbf{K}_{DD}$  为与  $\delta\Delta D$  相应的子矩阵。

## 2.2 未知量及相关项的具体形式

率形式的未知量向量及其有限增量形式为:

$$\left\{ \varepsilon^e \quad \lambda \quad D \right\}^T, \left\{ \Delta\varepsilon^e \quad \Delta\lambda \quad \Delta D \right\}^T. \quad (26)$$

内变量演化的计算式为:

$$\Delta\varepsilon^p = \frac{\Delta\lambda}{(1-D)^a} \frac{\partial f}{\partial \sigma} = \Delta\lambda \mathbf{n}, \quad \Delta\varepsilon^e + \Delta\lambda \mathbf{n} - \Delta\varepsilon = 0, \quad (27)$$

$$\Delta D = \Delta\lambda \left[ \frac{Y}{S} \right]^s \frac{1}{(1-D)^\phi}. \quad (28)$$

迭代计算收敛时必须满足的条件方程为:

$$R_e = \Delta\varepsilon^e + \Delta\lambda \mathbf{n} - \Delta\varepsilon = 0, \quad (29)$$

$$R_\lambda = \frac{\sigma_\varepsilon}{(1-D)^a} - \sigma_y - \frac{Q}{b}(1 - e^{-b\lambda}) = 0, \quad (30)$$

$$R_D = \Delta D - \Delta\lambda \left[ \frac{Y}{S} \right]^s \frac{1}{(1-D)^\phi} = 0. \quad (31)$$

Jacobi 矩阵各元素的计算式为:

$$\partial R_e / \partial \Delta\varepsilon^e = 1 + \Delta\lambda \theta (1-D)^a \mathbf{N}: \mathbf{C}, \quad (32)$$

$$\partial R_e / \partial \Delta\lambda = \mathbf{n}, \quad (33)$$

$$\frac{\partial R_e}{\partial \Delta D} = a\theta \frac{\Delta\lambda}{(1-D)^{a+1}} \mathbf{v}, \quad (34)$$

$$\partial R_\lambda / \partial \Delta\varepsilon^e = \theta (1-D)^a \mathbf{v}: \mathbf{C}, \quad (35)$$

$$\partial R_\lambda / \partial \Delta\lambda = 0, \quad (36)$$

$$\partial R_\lambda / \partial \Delta D = a\theta J_2 (1-D)^{-a-1}, \quad (37)$$

$$\frac{\partial R_D}{\partial \Delta\varepsilon^e} = -\Delta\lambda \theta \left[ \frac{Y^{s-1}}{S^s} \right] \frac{1}{(1-D)^{\phi-2a}} \mathbf{C}: \varepsilon^e, \quad (38)$$

$$\frac{\partial R_D}{\partial \Delta\lambda} = - \left[ \frac{Y}{S} \right]^s \frac{1}{(1-D)^\phi}, \quad (39)$$

$$\frac{\partial R_D}{\partial \Delta D} = 1 - \Delta\lambda \left[ \frac{Y}{S} \right]^s \frac{\phi}{(1-D)^{\phi+1}}, \quad (40)$$

$$\text{式中} \quad \mathbf{v} = \frac{3}{2} \frac{\mathbf{s}}{J_2}, \quad \mathbf{n} = \frac{\mathbf{v}}{(1-D)^a}, \quad \mathbf{N} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \sigma}. \quad (41)$$

## 3 本构行为的数值试验与比较

在这一节里, 我们使用 ZeBuLon\_Simu 软件进行本构行为的数值试验与比较。设定相关各式中的参数  $s = 1$ 。其它的 2 个主要参数给出了下列的不同取值, 从而形成本文中所指的不

同模型:

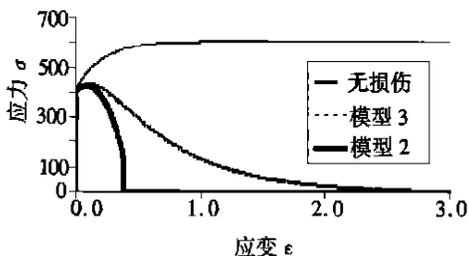


图 1 无损硬化与损伤塑性的  $\sigma_\epsilon$  曲线比较

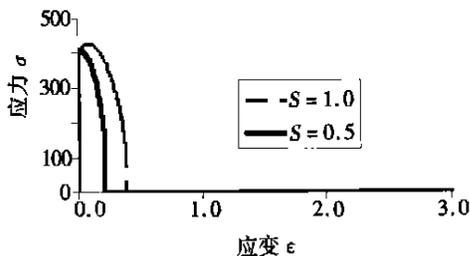


图 2 参数  $S$  的取值对  $\sigma_\epsilon$  曲线的影响(模型 1)

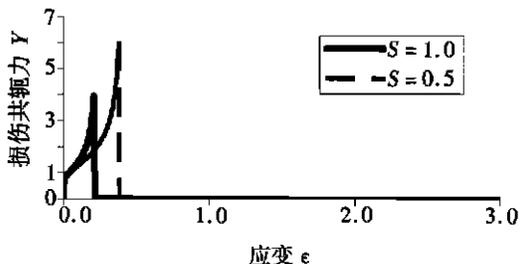


图 3 参数  $S$  的取值对  $Y_\epsilon$  曲线的影响(模型 4)

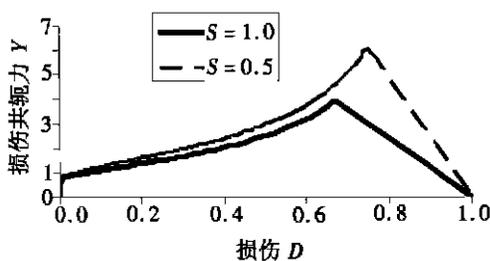


图 4 参数  $S$  的取值对  $YD$  曲线的影响(模型 3)

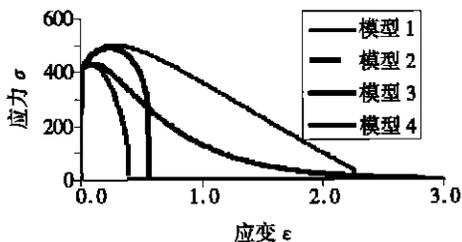


图 5 各模型  $\sigma_\epsilon$  曲线比较

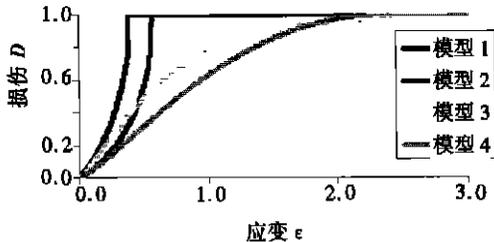


图 6 各模型  $D_\epsilon$  曲线比较

模型 1  $a = 0.5, \phi = 1;$  (42)

模型 2  $a = 1, \phi = 1;$  (43)

模型 3  $a = 1, \phi = - 1;$  (44)

模型 4  $a = 0.5, \phi = - 1.$  (45)

下面的图 1~ 图 6 给出了计算结果的图形显示。从中得出的结论为:

1) 图 1 的无损的塑性硬化曲线与经典曲线吻合,表明本文的算法是可靠的。

2) 综合各图,模型 3 的数值结果表现出的数值稳定性好,损伤后期表现出较高的韧性,适合用于韧性材料如合金等的韧性断裂模拟。

3) 模型 1 的数值结果表现出过于强烈的脆性。这一点反映在模型 1 的  $\sigma_\epsilon$  行为过脆,从而将会导致结构行为的数值不稳定,后面的小节的结构分析结果中显示了这一点。

4) 图 4 表明,  $S$  的取值对  $\sigma_\epsilon$  行为特性的影响显著,  $S = 1$  时材料的  $\sigma_\epsilon$  行为比其它取值的情况更合理。

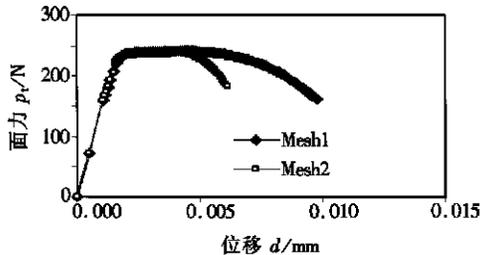


图 7 位移载荷\_面力响应曲线

综合以上, 本构参数的取值为:

$$a = 1, \phi = -1, S = s = 1 \cdot$$

(46)

### 4 数值应用

本文选择了平面状态下的双面预制缺口试件作为研究对象。其几何尺寸如图 8 所示。载荷状况为在底部和顶端部双向受均匀拉伸作用, 以模拟对称拉伸载荷。为了研究模型的网格依赖性, 本文采用了两种网格。

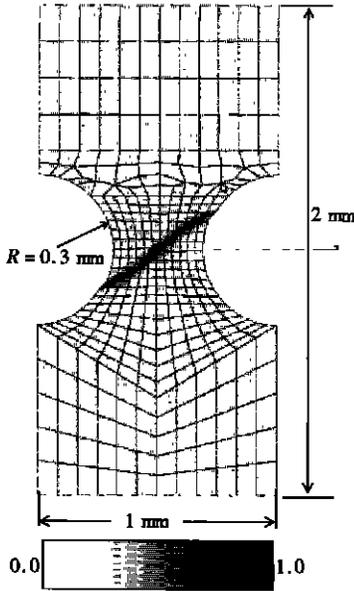


图 8 损伤  $D$  的分布与局部化

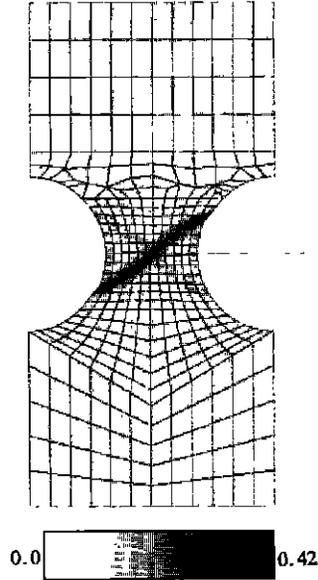


图 9 等效塑性变形的分布与局部化

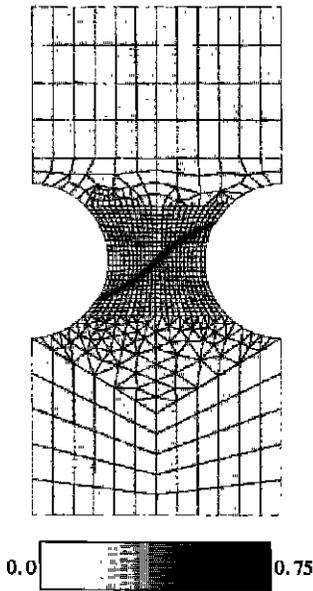


图 10 损伤  $D$  的分布与局部化

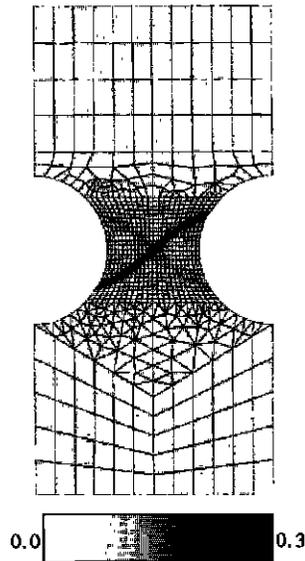


图 11 等效塑性变形的分布与局部化

网格 1 包含了 1 217 个节点和 370 个二维 8\_节点四边形等参元。所采用的材料参数为: 弹性模量为  $E = 200\ 000\ \text{MPa}$ , 泊松比  $\nu = 0.3$ , 初始屈服极限及硬化参数取值分别为  $\sigma_y = 400\ \text{MPa}$ ,  $Q = 1\ 000\ \text{MPa}$ ,  $b = 5$ ,  $S = 1$ ,  $s = 1$ , 断裂时数值上的损伤极限为  $D_c = 0.999$ 。

从图 7 中的位移载荷\_面力曲线可以看出, 结构变形经过一个稳定的塑性变形阶段之后, 塑性应变局部化和相应的损伤演化导致结构响应出现“软化”现象, 并进而发生具有一定脆性的断裂。这一点说明: 尽管材料的特性是韧性的, 结构的行为仍然可能呈现脆性特性。曲线之外的解未能求得, 这是因为进一步的行为中可能有“跃返失稳(snapback)”现象发生。

图 8 和图 9 展示了等效塑性应变  $\lambda$  和损伤  $D$  的分布及局部化情况: 二者在数值解中得到了较好地模拟, 按照 von Mises 准则计算得到的图中等效塑性应变  $\lambda$  局部化形成的剪切带的位置和形状与经典滑移线理论吻合<sup>[13]</sup>。在塑性变形初期, 结构中曾有两条对称的剪切带出现, 而最后只有一条演化形成了宏观断裂。

进一步细化了的网格(网格 2)采用了 2 733 个节点和 763 个 8\_节点等参元, 以及 154 个 6\_节点三角形等参元。采用的材料参数与前同。

在 10 和图 11 中展示了细化了的网格产生的等效塑性变形  $\lambda$  及损伤  $D$  的分布及局部化情况。与网格 1 的结果比较, 网格 2 的局部化带(剪切带)要窄得多。

将图 7 的两条位移载荷\_面力曲线比较可以看出, 网格 2 的行为在峰值后区的行为与网格 1 的行为明显不同。这表明, 损伤塑性耦合的数值结果和软化塑性模型的结果类似, 都存在网格依赖现象。

在图 12 中给出了采用模型 1 时得出的数值结果。图中的损伤局部化于中心部位的一个圆形区域, 与经典的滑移线理论<sup>[13]</sup>的预测相违背, 证明模型用于这种材料的行为模拟是不恰当的。

## 5 结束语

本文通过一系列的数值试验, 研究了金属韧性断裂的损伤塑性耦合本构模型的行为特性。以数值结果为基础, 通过模拟、比较, 分析改进了原有的模型。算例表明, 本文的模型具有较好的数值稳定性, 用于结构分析时的结果, 较好地反映了金属韧性断裂后期塑性应变和损伤的局部化现象。

本文还数值模拟并比较了力\_位移曲线峰值后区行为的网格依赖现象, 认为有必要采取措施(如采用面积加权平均的非局部模型等方法)来消除数值结果的网格依赖性。这将是本研究的下一个目标。

致谢 感谢巴黎矿业学院材料中心 Jacques Besson (雅克·贝松) 教授在 2002 年 5 月—8 月本文第一作者在巴黎矿业学院访问研究期间所提供的支持和热情帮助。

## [参 考 文 献]

- [1] de Borst R, Pamin J, Geers M G D. On coupled gradient-dependent plasticity and damage theories

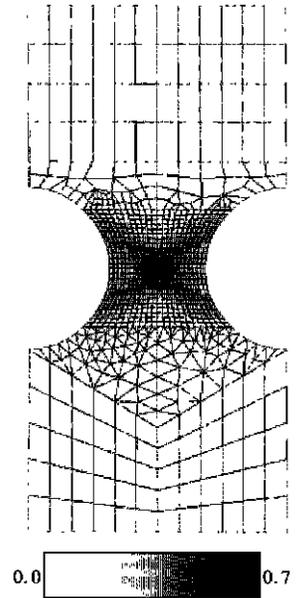


图 12 采用模型 1 得到的损伤  $D$  的分布与局部化

- with a view to localization analysis[J]. *European J Mech, A Solids*, 1999, **18**(3): 939—962.
- [2] Desoyer T, Hanus J L, Keryvin V. An instability condition of the deformation process in elasto\_(visco)\_nonlinear materials[J]. *Mech Res Comm*, 1998, **25**(2): 437—442.
- [3] Besson J, Steglich D, Brocks W. Modeling of crack growth in round bars and plane strain specimens [J]. *Internat J Solids and Structures*, 2001, **38**(11): 8259—8284.
- [4] Brunet M, Morestin F, Walter H. Damage identification for anisotropic sheet\_metals using a non-local damage model[A]. In: *Proceedings of 2002 ASME\_Proceedings of the International Mechanical Engineering Congress and Exposition [C]. Paper No, IMEGE 2002\_33088, November 17\_22, New Orleans, 2002, 1—10.*
- [5] Saanouni K, Forster C, Hatira F B. On the anelastic flow with damage[J]. *Internat J Dama Mech*, 1994, **3**(1): 140—169.
- [6] Saanouni K, Chaboche J L, Lesne P M. On the creep crack\_growth prediction by a non local damage formulation[J]. *European J Mech, A Solids*, 1989, **8**(2): 437—459.
- [7] Saanouni K, Nesnas K, Hammi Y. Damage modelling in metal forming processes[J]. *Internat J Dama Mech*, 2000, **9**(1): 196—240.
- [8] Tvergaard V, Needleman A. Analysis of cup\_cone fracture in a round tensile bar[J]. *Acta Metall*, 1984, **32**(3): 157—169.
- [9] Gurson A L. Continuum theory of ductile rupture by void nucleation and growth—Part I : Yield criteria and flow rules for porous ductile media[J]. *J En gn g Mater Tech*, 1977, **99**(2): 2—15.
- [10] Lemaitre J. *A Course on Damage Mechanics [M]. Berlin: Springer\_Verlag, 1992.*
- [11] Kachnov L M. *Introduction to Continuum Damage Mechanics [M]. The Netherlands: Martinus Nijhoff Dordrecht, 1986.*
- [12] Besson J. *Mecanique et Ingenierie des Materiaux\_Essais Mecaniques, Eprouvettes Axisymetriques Entaillees [M]. Paris: Hermes, 2001.*
- [13] 徐秉业. *塑性力学[M]. 北京: 高等教育出版社, 1988.*

## Investigation on Elasto\_Plastic Constitutive Model Coupled With Damage for Localization Phenomena

SHEN Xin\_pu<sup>1</sup>, SHEN Guo\_xiao<sup>2</sup>, CHEN Li\_xin<sup>3</sup>

(1. College of Architectural Engineering, Shenyang University of Technology, Shenyang 110023, P. R. China;

2. Department of Applied Sciences, Taiyuan Institute of Heavy Machine, Taiyuan 030024, P. R. China;

3. Energy Center for Coal\_Bedded Methane, Northeastern Bureau of Coal Geology, Shenyang 110035, P. R. China)

**Abstract:** On the basis of existing plasticity\_based damage model for plasticity coupled with damage for localization analysis, constitutive parameter identification was carried out through a series of numerical tests at local level. And then improvements were made on the expressions of the evolution laws of damage. Strain localization phenomena were simulated with a typical double\_notched specimen under tensions. Numerical results indicate the validity of the proposed theory.

**Key words:** damage; plasticity; localization; constitutive model