应用数学和力学，第4卷第2期（1983年3月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

动力阻尼特性及速度有限元法*

杨真荣　　闫榕玲

（中国科学院计算中心，1981年4月23日收到）

摘　要

为了节省动态问题的计算量和存贮量，本文在[16]的基础上，分析动态阻尼特性，研究阻尼与材料、有限元格网尺寸或频率等定量关系，给出了最大模的估计定理及不同情况的推论．

结合数值分析实例，论证阻尼对于动拉应力的影响是按模有界的；其影响值存在正负．这说明，只认为阻尼会使应力“一律偏小”的观念是不确切的．

文中，进一步说明了速度有限元法的特点．文末附录了必要的数值计算成果．

一、控　制　方　程

任一结构系统可看作为多质点系的耦合系统．任一有限元运动平衡方程可写成

$$m_i\ddot{x}_i+\sum_{j=1}c_{ij}\dot{x}_j+\sum_{j=1}k_{ij}x_j=p_i(t) \tag{1.1}$$

或

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{X}}+\mathbf{C}\dot{\mathbf{X}}+\mathbf{K}\mathbf{X}=\mathbf{P} \tag{1.2}$$

式中，**M**，**C**和**K**是质量、阻尼和（正定）刚度矩阵；**P**是外荷载向量；$\mathbf{X}$，$\dot{\mathbf{X}}$，$\ddot{\mathbf{X}}$是有限元的位移、速度和加速度向量．须说明的是，**M**为对角阵，**K**和**M**是由单元刚度和质量阵直接叠加成的．即

$$\mathbf{K}=\sum_e\mathbf{k}^{(e)},\qquad \mathbf{M}=\sum_e\mathbf{m}^{(e)} \tag{1.3}$$

其中求和是包括所有的单元．

二、$\|\mathbf{C}\|_\infty$估计

1　C的形式及正交性

在振动问题中，常见的振型叠加法是研究特征问题的求解．在这种情况下，广义特征值问题

$$\mathbf{K}\mathbf{\Phi}=\lambda\mathbf{M}\mathbf{\Phi} \tag{2.1}$$

式中**K**和**M**相应是有限元集合成的刚度和质量矩阵．特征值λ_i和特征向量$\boldsymbol{\varphi}_i$是自由振频平方(ω_i^2)和相应振型向量．每个特征对$(\lambda_i,\ \boldsymbol{\varphi}_i)$或$(\lambda_j,\ \boldsymbol{\varphi}_j)$满足(2.1)；即，我们有

---

* 唐立民推荐．

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_i=\lambda_i\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_i \tag{2.2}$$

或

$$\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_j=\lambda_j\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j \tag{2.3}$$

用$\boldsymbol{\varphi}_i^T$左乘(2.2)并再转置得到

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_j=\lambda_i\boldsymbol{\varphi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j \tag{2.4}$$

类似我们有

$$\boldsymbol{\varphi}_i^t\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_j=\lambda_j\boldsymbol{\varphi}_i^t\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j \tag{2.5}$$

利用(2.4)和(2.5)，我们得到

$$(\lambda_i-\lambda_j)(\boldsymbol{\varphi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j)=0 \tag{2.6}$$

即

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_j=\begin{cases}0 & \text{当}\quad i\neq j\\ \text{constant} & \text{当}\quad i=j\end{cases} \tag{2.7}$$

按同样方式我们得到

$$\boldsymbol{\varphi}_i^T\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_j=\begin{cases}0 & \text{当}\quad i\neq j\\ \omega_i^t & \text{当}\quad i=j\end{cases} \tag{2.8}$$

类似用$\boldsymbol{\varphi}_i^t(\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1})^n$作用于(2.2)且利用(2.8)，我们得到

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T(\mathbf{K}\mathbf{M}^{-1})^n\mathbf{K}\boldsymbol{\varphi}_i=0 \quad \text{当}\quad i\neq j \tag{2.9}$$

$$(n=1,2,\cdots)$$

其次，用$\boldsymbol{\varphi}_j^t(\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1})^h$作用于(2.2)并利用(2.7)，我们有

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T(\mathbf{M}\mathbf{K}^{-1})^h\mathbf{M}\boldsymbol{\varphi}_i=0 \quad \text{当}\quad i\neq j \tag{2.10}$$

$$(h=1,2,\cdots)$$

(2.9)和(2.10)概括如下形式

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{M}(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^b\boldsymbol{\varphi}_i=0 \quad \text{当}\quad i\neq j$$

$$(b=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots)$$

因此，采用[11][12]

$$\mathbf{C}=\mathbf{M}\sum_{b=0}a_b(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^b \tag{2.11}$$

我们有

$$\boldsymbol{\varphi}_j^T\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}_i=0 \quad \text{当}\quad i\neq j$$

$$\boldsymbol{\varphi}_j^t\mathbf{C}\boldsymbol{\varphi}_i=\text{constant} \quad \text{当}\quad i=j$$

我们用

$$\mathbf{C}=\mathbf{M}\sum_{b=0}^{1}a_b(\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K})^b \tag{2.12}$$

并且

$$\boldsymbol{\varphi}_i^t\mathbf{C}\varphi_i=2\xi_i\omega_i \quad \text{当}\quad i=j \tag{2.13}$$

式中系数a_b($b=0,1,2,3,\cdots\cdots$)按Rayleigh阻尼，我们有

$$a_0+a_1\omega_i^2=2\xi_i\omega_i \tag{2.14}$$

或

$$\left.\begin{aligned}a_0+a_1\omega_i^2=2\xi_i\omega_i\\ a_0+a_1\omega_j^2=2\xi_j\omega_j\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

因此，我们可求解a_0和a_1，即得

$$\left.\begin{aligned} a_0 &= 2\xi\omega_i\omega_j/(\omega_j+\omega_i) \\ a_1 &= \frac{2\xi}{\omega_i+\omega_j} \end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

其中，令 $\xi_i=\xi_j=\xi$.

由(2.16)我们得到

$$\left.\begin{aligned} a_0 &\leqslant \xi\cdot\frac{\omega_{\max}}{\omega_{\min}} \\ a_1 &\leqslant \xi/\omega_{\min} \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

2. $\|\mathbf{C}\|_\infty$估计

引理 1

令K和k表示总体和单元刚度矩阵，则

$$\|\mathbf{K}\|_\infty \leqslant P_{\max}\max_e\|\mathbf{k}_e\|_\infty \tag{2.18}$$

其中$P_{\max}$表示节点周围最多的单元个数，此处 e 类指网格中N_e个单元.

证明：不超过$P_{\max}$个单元阵贡献于K中任一行，故(2.18)不等式成立.

引理 2

任一 s 阶正定对称单元阵 k

$$\|\mathbf{k}\|_\infty \leqslant S\max_i(k_{ii}) \tag{2.19}$$

$$(i=1,2,\cdots,s)$$

式中k_{ii}是 k 阵的对角线元素.

（证明从略）.

引理 3

若M和m表示总体和单元集中质量阵，m_e 表示 m的对角元素，则

$$\|\mathbf{M}\|_\infty \leqslant P_{\max}\max_e(m_e) \tag{2.20}$$

（证明从略）.

定理 1

令K和k表示总体和单元刚度矩阵，M和m表示总体和单元集中质量阵，m_e 表示m的对角元素，则

$$\|\mathbf{C}\|_\infty \leqslant P_{\max}(a_0\max_e(m_e)+a_1\max_e(S_e\max_i k_{ii})) \tag{2.21}$$

式中C是Rayleigh阻尼矩阵

a_0，a_1由(2.17)确定.

（证明从略）.

推论 1

若所有单元刚度和质量都是同类型且均质的，则

$$\|\mathbf{C}\|_\infty \leqslant \alpha_1\max_e(m_e)+\alpha_2\max_e(\max_i k_{ii}) \tag{2.22}$$

其中 $\alpha_1 \leqslant P_{\max}\xi\omega_{\max}/\omega_{\min}$

$\alpha_2 \leqslant S_e\cdot P_{\max}\cdot\xi/\omega_{\min}$

推论 2

对于典型三角形元且$P_{\max}\leqslant 8$，我们有

$$\|\mathbf{C}\|_\infty \leqslant \frac{8}{3} a_0 t_m \rho_m |\Delta y_m \cdot \Delta x_m| + 64 a_1 H (\Delta y_m^2 + \Delta t_m^2) \tag{2.23}$$

式中，t_m是最大厚度，ρ_m是密度或不同单元单位体积质量的最大值，Δy_m和Δx_m是单元节点坐标差的最大值，而

$$H = \begin{cases} \dfrac{E t_m}{4(1-\nu^2)\Delta} & \text{对于平面应力情况} \\ \dfrac{E(1-\nu) t_m}{4(1+\nu)(1-2\nu)\Delta} & \text{对于平面应变情况} \end{cases}$$

式中，ν是波桑比，Δ是三角形面积的最小值，E是弹性模量

如果

$$(h_m = \max(|\Delta y_m|, \ |\Delta x_m|) \tag{2.24}$$

那么

$$\|\mathbf{C}\|_\infty \leqslant T_m (h_m^2) \tag{2.25}$$

其中

$$T_m = \frac{8}{3} a_0 t_m \rho_m + 128 a_1 H \tag{2.26}$$

3. 数值实验

在定理 1 中，我们已经得到$\|\mathbf{C}\|_\infty$的上界．为了分析系统阻尼对应力的影响，我们研究了坝体的应力．表 1 和表 3 给出有限元法动力分析的数值结果．我们的数值试验（表 3）指出坝体下游表面最大主应力是 19.09kg/cm²(坝基，1967，7，29 E-W 记录 $\ddot{X}(0)=0.3g$)，坝顶最大主应力差大约是忽略阻尼情况的 30.9%，而坝底大约是 −25.7%．即忽略阻尼情况下，坝顶部主应力（拉应力）增大30.9%，而坝底减少25.7%．显然，阻尼的影响值沿坝垂向是不同的．

4. 频率计算

在上节我们介绍了估计$\|\mathbf{C}\|_\infty$的过程．值得注意的是计算ω_{max}和ω_{min}。

在自由振动问题中，基于基本振型的正交性，第 i 个自然频率可写成

$$\omega_i^2 = \frac{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{K} \boldsymbol{\varphi}_i}{\boldsymbol{\varphi}_i^T \mathbf{M} \boldsymbol{\varphi}_i} \tag{2.27}$$

或

$$\omega_i^2 = \frac{\text{应变能}}{\text{单位圆频率动能}} \tag{2.28}$$

若ω_{min}表示最小(1st)频率，则由 Rayleighs 原理，对于任一向量，则有

$$\mathbf{u}^T\mathbf{K}\mathbf{u}/\mathbf{u}^T\mathbf{M}\mathbf{u} \geqslant \omega^2_{min} \tag{2.29}$$

由原始有限元法ω_i形成为上界时，序列收敛性可加以改变，即可构造如下逼近

1. 逐渐增加动能而不改变应变能；
2. 逐渐减少应变能而不改变动能；

例如，我们选择改变动能，修正质量阵 $\mathbf{M}_n$ 是由质量阵$\mathbf{M}$乘以修正对角阵$\mathbf{M}_d$乘积得到

$$\mathbf{M}_n = \mathbf{M}_d \cdot \mathbf{M} \tag{2.30}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{若} & \mathbf{M}_d \to \mathbf{I} \\ \text{则} & \mathbf{M}_n \to \mathbf{M} \end{array}\right\} \tag{2.31}$$

如果形成下界ω_{min}。那么只要定义

$$\mathbf{M}_n=\mathbf{M}_d^{-1}\mathbf{M}$$

式中 $\mathbf{M}_d^{-1}$是对角阵

若 $\mathbf{M}_d^{-1}\to\mathbf{I}$，则 $\mathbf{M}_n\to\mathbf{M}$.

表 1 说明桥梁振动的频率和振型，表 2 说明 a_n. a_t 及其它数值结果.

表 1　　结构频率与振型计算($N=15$)

频率 / 振型	ω_1 42.2623	ω_2 40.7106	ω_3 38.6608	ω_4 37.1465	ω_8 31.5339	ω_{12} 8.8915	ω_{13} 8.3916	ω_{14} 7.7663	ω_{15} 6.8893
u_1	0.1763^{-11}	-0.4340^{-11}	0.5755^{-1}	-0.2352^{-9}	-0.1670^{-5}	-0.5165^{-4}	0.6909^{-1}	-0.7781^{-1}	0.9946
u_2	0.2690^{-9}	-0.3807^{-9}	0.4536^{-8}	-0.1376^{-7}	-0.5693^{-4}	-0.6118^{-1}	0.9906	-0.7253^{-1}	-0.7497^{-1}
u_3	0.9941	-0.9277^{-1}	0.5438^{-1}	-0.4915^{-2}	-0.2736^{-5}	-0.8098^{-8}	-0.6471^{-1}	0.5512^{-9}	0.2403^{-9}
u_4	-0.1050^{-5}	-0.8815^{-6}	0.1019^{-4}	-0.7921^{-5}	-0.6150^{-2}	-0.6124^{-1}	-0.4162^{-1}	0.3896^{-2}	0.1209^{-2}
u_5	-0.6343^{-1}	-0.9510^{-1}	0.9869	-0.1058	-0.2633^{-3}	0.4036^{-5}	0.1411^{-5}	-0.1416^{-6}	-0.3648^{-1}
u_6	0.4708^{-4}	0.1109^{-3}	-0.1029^{-2}	-0.7827^{-3}	-0.1234	0.7836^{-2}	0.2103^{-2}	-0.2320^{-3}	-0.4898^{-4}
u_7	0.4517^{-3}	0.1403^{-2}	-0.1220^{-1}	-0.2077^{-1}	-0.1408	-0.7962^{-3}	-0.1706^{-3}	0.2106^{-4}	0.3717^{-5}
u_8	0.1766^{-2}	0.7011^{-2}	-0.5252^{-1}	-0.1260	0.2437^{-1}	0.9324^{-4}	0.1738^{-4}	-0.2349^{-5}	-0.3699^{-6}
u_9	-0.1871^{-1}	-0.2099	0.1584^{-1}	0.3608	0.4754	0.3818	0.1308^{-1}	-0.2186	-0.1606^{-1}
u_{10}	-0.3132^{-1}	-0.3529	0.1078^{-1}	0.4561	0.6813^{-1}	-0.5194	-0.6580^{-2}	0.4370	0.3201^{-1}
u_{11}	0.4166^{-1}	0.4722	0.1078^{-1}	-0.3076	0.4340	-0.1960	0.2877^{-1}	0.5584	0.4071^{-1}
u_{12}	0.4657^{-1}	-0.5311	-0.5709^{-1}	-0.2274^{-1}	-0.1993	0.2906	0.6443^{-1}	0.5253	0.3810^{-1}
u_{13}	0.3804^{-1}	0.4366	0.7779^{-1}	0.3235	-0.3567	0.5454	0.7216^{-1}	0.3735	0.2695^{-1}
u_{14}	-0.2539^{-1}	-0.2935	-0.7657^{-1}	-0.4610	0.3969	0.3753	0.4085^{-1}	0.1481	0.1093^{-1}
u_{15}	0.1526^{-1}	0.1779	0.6515^{-1}	0.4708	0.4791	0.8928^{-1}	0.8673^{-2}	0.2278^{-1}	0.1622^{-2}

三、逐次逼近速度元法

基于阻尼分析启发我们，为了节省逐步积分动力问题的计算量，以速度为变量的速度元法是值得注意的.

在每个时刻t_n，相应求解边值问题. 但在无阻尼和集中质量阵情况，解是显式的. 即不必求解代数方程组.

如果我们忽略步长的高阶项，我们可构造简化显式格式：

$$\left.\begin{aligned}
&\mathbf{u}_n^{(1)}=a\mathbf{M}^{-1}P_n-a\mathbf{M}^{-1}\mathbf{K}\mathbf{u}_{n-2}+\mathbf{u}_{n-2}^{(1)}+a\mathbf{u}_{n-2}^{(2)}\\
&\mathbf{u}_n^{(2)}=\mathbf{M}^{-1}(P_n-\mathbf{K}\mathbf{u}_{n-2}-\Delta t\,\mathbf{K}\mathbf{u}_{n-2}^{(1)})\\
&\mathbf{u}_n=\mathbf{u}_{n-2}+\theta\Delta t\ \mathbf{u}_{n-2}^{(1)}
\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

式中

$$a=\theta\Delta t/6\text{[16]}$$

逼近算子谱半径是

$$\rho(\mathcal{A})=1+O(\Delta t)\tag{3.2}$$

稳定条件是

$$\Delta t\omega<\sqrt{3}\tag{3.3}$$

对于任意阻尼系统和非线性情况，此格式可作为得到较好的迭代初值. 即我们可构造如下迭代格式[16]

表 2 不同振型及阻尼比情况下的阻尼系数计算结果

I	J	$\xi=0.05$		$\xi=0.15$	
		a_0	a_1	a_0	a_1
1	1	2.113	0.1183^{-2}	6.339	0.3549^{-2}
1	2	2.073	0.1205^{-2}	6.221	0.3615^{-2}
1	3	2.019	0.1236^{-2}	6.057	0.3707^{-2}
1	4	1.976	0.1259^{-2}	5.930	0.3779^{-2}
1	5	1.945	0.1277^{-2}	5.835	0.3831^{-2}
1	6	1.900	0.1302^{-2}	5.702	0.3906^{-2}
1	7	1.848	0.1331^{-2}	5.544	0.3994^{-2}
1	8	1.805	0.1355^{-2}	5.417	0.4065^{-2}
1	9	0.8134	0.1910^{-2}	2.439	0.5732^{-2}
1	10	0.7951	0.1920^{-2}	2.385	0.5762^{-2}
1	11	0.7668	0.1936^{-2}	2.300	0.5810^{-2}
1	12	0.7346	0.1954^{-2}	2.203	0.5864^{-2}
1	13	0.7001	0.1974^{-2}	2.100	0.5922^{-2}
1	14	0.6560	0.1998^{-2}	1.968	0.5996^{-2}
1	15	0.5923	0.2034^{-2}	1.777	0.6103^{-2}
⋮	⋮				
8	1	1.805	0.1355^{-2}	5.417	0.4065^{-2}
8	2	1.776	0.1384^{-2}	5.330	0.4152^{-2}
8	3	1.736	0.1424^{-2}	5.210	0.4273^{-2}
8	4	1.705	0.1456^{-2}	5.116	0.4368^{-2}
8	5	1.681	0.1479^{-2}	5.045	0.4439^{-2}
8	6	1.648	0.1513^{-2}	4.945	0.4540^{-2}
8	7	1.608	0.1553^{-2}	4.826	0.4659^{-2}
8	8	1.576	0.1585^{-2}	4.730	0.4756^{-2}
8	9	0.7632	0.2403^{-2}	2.289	0.7210^{-2}
8	10	0.7473	0.2419^{-2}	2.241	0.7258^{-2}
8	11	0.7222	0.2444^{-2}	2.166	0.7334^{-2}
8	12	0.6935	0.2473^{-2}	2.081	0.7421^{-2}
8	13	0.6627	0.2504^{-2}	1.988	0.7513^{-2}
8	14	0.6231	0.2544^{-2}	1.869	0.7633^{-2}
8	15	0.5654	0.2602^{-2}	1.696	0.7807^{-2}
⋮	⋮				
15	1	0.5923	0.2034^{-2}	1.777	0.6105^{-2}
15	2	0.5892	0.2100^{-2}	1.767	0.6302^{-2}
15	3	0.5847	0.2195^{-2}	1.754	0.6586^{-2}
15	4	0.5811	0.2270^{-2}	1.743	0.6812^{-2}
15	5	0.5783	0.2329^{-2}	1.735	0.6988^{-2}
15	6	0.5743	0.2413^{-2}	1.723	0.7240^{-2}
15	7	0.5694	0.2516^{-2}	1.708	0.7549^{-2}
15	8	0.5654	0.2602^{-2}	1.696	0.7807^{-2}
15	9	0.4090	0.5896^{-2}	1.227	0.1768^{-1}
15	10	0.4044	0.5993^{-2}	1.213	0.1798^{-1}
15	11	0.3969	0.6150^{-2}	1.190	0.1845^{-1}
15	12	0.3881	0.6336^{-2}	1.164	0.1901^{-1}
15	13	0.3783	0.6544^{-2}	1.135	0.1963^{-1}
15	14	0.3650	0.6823^{-2}	1.095	0.2046^{-1}
15	15	0.3444	0.7257^{-2}	1.033	0.2177^{-1}

表 3　坝面σ_y沿高程分布（不同阻尼情况）

	单元代号	$a_0=0$ $a_1=0$	$a_0=2.987$ $a_1=0.591\times10^{-3}$	阻尼影响 ③－④	阻尼影响 ⑤÷③%	备注
①	②	③	④	⑤	⑥	
坝顶	4	1.286	0.8886	0.3974	30.9	影响最大
↑	10	5.240	3.697	1.543	29.4	
	15	8.799	6.301	2.498	28.3	
	24	12.76	9.356	3.404	26.6	
	37	19.09	14.28	4.81	25.1	
	54	13.72	10.43	3.29	23.5	
	66	11.45	8.855	2.595	22.6	
	77	10.43	8.274	2.156	20.6	
	113	9.264	7.545	1.719	18.5	
	130	6.517	5.514	1.003	15.3	
	145	4.622	4.125	0.497	10.7	
	165	3.776	3.525	0.251	6.66	
	205	3.051	2.912	0.139	4.5	
	230	2.561	2.466	0.095	3.7	
	255	2.057	2.092	−0.035	−1.7	影响最小
	304	1.746	1.859	−0.113	−6.4	
	335	1.426	1.566	−0.14	−9.8	
	371	1.128	1.273	−0.145	−12.8	
↓	404	0.9847	1.134	−0.149	−15.1	
坝基	407	0.8206	1.032	−0.211	−25.7	

注：震动时刻 $t=0.215$Sec（坝身呈现最大拉应力时刻）$t_m=18$，S=6，$\rho_m=0.247$（T-M-Sec）

$$\mathbf{V}_{n+1}=\mathbf{Q}+\mathbf{G}_0\mathbf{V}_n \quad \text{对于线性情况} \tag{3.4}$$

$$\Delta\mathbf{V}_{n+1}=\mathbf{q}+\mathbf{G}_1\Delta\mathbf{V}_n \quad \text{对于非线性情况} \tag{3.5}$$

$\mathbf{V}$表示速度函数，$\mathbf{G}_0$和$\mathbf{G}_1$表示迭代矩阵。

$\Delta\mathbf{V}$表示速度增量，$\mathbf{Q}$和$\mathbf{q}$表示荷载和荷载增量。

可以证明

若 $\mathbf{G}=\mathbf{I}+\overline{\mathbf{M}}\mathbf{C}$ 是正对称正定，则集$\{\Delta\mathbf{V}_n\}$收敛于解$\{\Delta\mathbf{V}\}$，即

$$\lim_{n\to\infty}\|\Delta\mathbf{V}_n-\Delta\mathbf{V}\|\to 0 \tag{3.6}$$

$$\|\Delta\mathbf{V}_n-\Delta\mathbf{V}\|\leqslant\frac{m}{\lambda^n}\|\Delta\mathbf{V}_0-\Delta\mathbf{V}\| \tag{3.7}$$

这个关系式说明，若$\Delta\mathbf{V}_0$靠近$\Delta\mathbf{V}$或最小特征值是较大的，则收敛是快的。

参 考 文 献

[1] Houbolt, J. C., A Recurrence matrix for the dynamic response of elastic aircraft, *J. Aeronaut. Sci.*, 17 (1950), 540-550.

[2] Newmark, N. M., A method of computation for structural dynamics, *Proc. Am. Soc. Civ. Eng.*, 85, EM3 (1959), 67—94.

[3] Chan, S. P. and H. L. Cox, Transient analysis of forced vibrations of complete structural-mechanical systems, *JLR. Aeronaut. Soc.*, 66(1962),457—460.

[4] Gurtin, M. E., Variational Principles for linear elasto-dynamics, *Archs. Rat ion.*

Mech. Analysis, 16 (1964), 34—50.

[5] Wilson, E. L., A computer program for the dynamic stress analysis of underground structures, Report No. 68—1, Univ. of Calif, Berkeley,(1968).

[6] Zienkiewicz, O. C., A new look at the Newmark, Houbolt and other time stepping formulas: A weighted residual approach, *Earth. Eng. Stru. Dyns.*, 5, (1977), 413—418.

[7] Hilber, H. M., Collocation dissipation and 'oversroot' for time intergration schemes in strctural dynamics, *EARTH, ENG. and STRU. DYNA.*, 6(1978), 99—117.

[8] Richmyer, Robert D., *Difference Methods for Initial-Value Problems*, Interscience Publishers, New York(1967).

[9] 钱伟长,《变分法及有限元》(1978).

[10] Connor, J. J.,《流体流动的有限元技术》(1976).

[11] 杨真荣、徐萃薇、王大钧、周本华、魏泽光,有限元法动力分析,全国计算技术会议文选(1973),748.

[12] 沈崇刚、陈厚群、杨真荣等,新丰江水库地震及其对大坝的影响,国际大坝会议11届会议论文,中国科学,17, 2(1974).

[13] 徐宗和、罗学海、杨真荣等,新丰江水库诱发地震的强震观测,国际诱震第一届学术讨论会报告(1975),

[14] 杨真荣,动力问题的有限单元法,科学院计算所(1975).

[15] 科学院计算所,建研院等,平面框架非线性地震反应分析初探(1978).

[16] 杨真荣,动态问题速度有限元法,应用数学和力学,1, 1(1980).

[17] Whiteman, J. R., *The Mathematics of Finite Elements and Applications*, Academic Press, London and New York(1972).

Damping Feature of Dynamic Problem and "Velocity" Finite Element Method

Yang Zhen-rong Yan Rong-ling

(*Computer Centre, Academia Sinica, Beijing*)

Abstract

In order to reduce the amount of computation and storage of dynamic problem, this paper based on [16] is to analyse damping feature, and study the relations among the damping and the material as well as frequencies and the size of mesh of finite element, give the estimation theorem of maximum norm and a corollary.

Examples have been analyzed numerically, with limited norm. The influnce of damping on the dynamic tense stress is assumed to be limited in value, but it can be both positive and negative.

This means that to consider damping as always tending to decrease the stress incline is incorrect.

The feature of "velocity" finite element method is summarized further in the paper. Some necessary numerical results are given in the appendix.