各向异性体的断裂条件及其应力空间几何*

韩 玉 英

（武汉地质学院地质力学系，1981年9月29日收到）

摘 要

本文根据固体断裂裂纹扩展的能量条件，探索各向异性体的断裂条件及其应力空间几何，结论是：在恒温条件下，断裂的应力空间曲面为二次曲面．当流体静应力大于零时，为椭球面；当流体静应力小于零时，为单叶双曲面．本文所得的结论具有一定的普遍性，前人的一些结论可作为本文的特殊形式．

一、引 言

固体随着所受应力的增加，通常在物性状态上，可能发生转化，如从弹性变形阶段经过屈服极限进入弹塑性变形阶段，以及在继续加载情况下又经过强度极限迅速进入断裂．一般将固体的屈服或断裂统称为破坏 (failure)，阐明固体在复杂应力作用下发生破坏的理论——强度理论，是从现象论方面试图建立概括屈服与断裂的统一理论与统一准则．随着金属学、矿物岩石学和力学的发展，对固体屈服与断裂的研究以及二者形成的机理及其实质上的差别了解得日益增多，具体地研究固体在不同加载阶段所表现的物性的变化、转化及其数学描述方法是现今发展的主要趋向．

关于屈服与断裂的研究，过去多限于各向同性、均质的固体，现在随着对问题研究逐渐深入，所涉及到的介质也日益广泛．特别是现代复合材料在工业上的应用，地质科学向数学力学定量化方向发展，探明各向异性体的破坏规律，建立相应的破坏准则，已成为十分重要的问题．

对于各向异性固体破坏准则的研究，最早是从本世纪二十年代开始的，到四十年代末以后，才逐渐为较多的人所重视．关于这方面的早期工作与各向同性体考虑相似，主要从某一控制破坏因素考虑建立相应的破坏准则．在这方面进行工作的有：Jenkins[1]提出各向异性固体破坏的最大应力准则；Waddoups[2]提出各向异性体破坏的最大线应变准则；Hill[3]将von Mises准则推广到正交同性体．此外，Hoffman[4]，Franklin[5]，Chamis[6]提出了各种型式的二次型，借以描写破坏的函数曲面，Pariseau[7]提出用n次幂函数拟合屈服函数．为了

*陈至达推荐．

使所建立的破坏准则具有更广泛的适应性，Ashkenazi与Pekker[8]提出用张量多项式表征各向异性体的破坏函数曲面。与此类似，Wu[9]不仅从描写方法上改变了Ashkenazi等人的工作，同时也从一些实验数据算出张量多项式的系数；Tennyson等[10]提出保留张量多项式三次幂以后各项，用以反映某些各向异性体破坏函数曲面尖角的存在性；Shick与Lee[11]对Hill的各向异性屈服条件进行了推广，并与实验曲线进行了比较。

不过，所有上述的工作，都是将屈服与断裂按照破坏统一考虑的。注意将屈服与断裂区分开来，建立表征不同加载阶段具体物性特点的强度理论，最早是由П．В．Фридман[12]提出的，虽然是一个很概略的意见，但是指出了问题的重要意义。其后，我国学者刘叔仪[13][14]引用粘性体断裂的能量条件，建立了金属在恒温状态下的断裂力学条件，并进一步讨论、建立了固体的现实应力空间的具体概念。这两位学者考虑的均为各向同性体的情况。

本文根据能量理论建立了各向异性固体的断裂准则，及其应力空间的几何概念。

二、各向异性体的断裂条件

在恒温条件下，裂口传播的能量条件与其受力情况有关，在不同应力状态下，服从不同的断裂条件。

当物体中一点处于某一应力状态，以σ_1，σ_2，σ_3表示其主应力，并定义平均应力：

$$\sigma_{cp}=\frac{1}{3}(\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3)$$

则断裂条件可表为：

$$\sigma_{cp}\geqslant 0 \qquad U'=U_\phi+U_o=\frac{\bar{\alpha}}{r_0} \tag{2.1}$$

$$\sigma_{cp}\leqslant 0 \qquad U''=U_\phi-U_o=\frac{\bar{\alpha}}{r_0} \tag{2.2}$$

其中： U ——应变能密度；

U_ϕ——形变应变能密度；

U_o——容变应变能密度；

$\bar{\alpha}$ ——单位裂口表面上自由能的统计平均值；

r_0——微裂口半径。

在一般应力状态下，应变能密度

$$U=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij} \qquad (i,\ j=1,\ 2,\ 3) \tag{2.3}$$

上式中σ^{ij}，ε_{ij}分别为二阶逆变应力张量与二阶协变应变张量。i，j指标按重标作和规则运算。

对于各向异性体，应力应变关系可表达为一般形式：

$$\varepsilon_{ij}=a_{ijkl}\sigma^{kl} \qquad (i,\ j,\ k,\ l=1,\ 2,\ 3) \tag{2.4}$$

a_{ijkl}——物性系数，$a_{ijkl}=a_{jikl}=a_{jilk}=a_{ijlk}$。

利用式(2.3)、(2.4)可得：

$$U=\frac{1}{2}a_{ijkl}\sigma^{ij}\sigma^{kl} \tag{2.5}$$

又容变应变能密度可表为：

$$U_o=\frac{1}{2}\bar{K}\theta^2 \tag{2.6}$$

其中：

$$\theta=3\varepsilon=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3 \tag{2.7}$$

ε_i为主应变；$\bar{K}$为各向异性体体积压缩模量。

为计算简便，转换坐标系，将新坐标系（x', y', z'）选在应力主轴方向，设$l_{i'}^{i}$为旧坐标轴i与新坐标轴i'间的方向余弦。σ^{ij} 与$\sigma^{i'j'}$的变换关系为：

$$\sigma^{ij}=l_{i'}^{i}l_{j'}^{j}\sigma^{i'j'} \tag{2.8}$$

$\sigma^{i'j'}$ 为主应力——$\sigma^{1'1'}=\sigma_1$，$\sigma^{2'2'}=\sigma_2$，$\sigma^{3'3'}=\sigma_3$，其余为零。则U 在新坐标系中的表达式为：

$$U=\frac{1}{2}a_{i'j'k'l'}\sigma^{i'j'}\sigma^{k'l'} \tag{2.9}$$

$a_{i'j'k'l'}$为a_{ijkl}变换至新坐标系之物性系数。

这里应注意：对于各向异性体来说，主应力方向与主应变方向在一般情况下是不一致的，但在计算应变能时，由于应力张量的分量以主应力表示，故参与应变能计算的变形系数只涉及$a_{i'i'j'j'}$项，其他各项在计算应变能时不出现。

今引用下列记号：

$$\left.\begin{aligned}
&a_{1'1'1'1'}=\frac{1}{\bar{E}_1},\quad a_{2'2'2'2'}=\frac{1}{\bar{E}_2},\quad a_{3'3'3'3'}=\frac{1}{\bar{E}_3}\\
&a_{1'1'2'2'}=-\frac{\bar{\mu}_{12}}{\bar{E}_1}=-\frac{\bar{\mu}_{21}}{\bar{E}_2},\quad a_{1'1'3'3'}=-\frac{\bar{\mu}_{13}}{\bar{E}_1}=-\frac{\bar{\mu}_{31}}{\bar{E}_3}\\
&a_{2'2'3'3'}=-\frac{\bar{\mu}_{23}}{\bar{E}_2}=-\frac{\bar{\mu}_{32}}{\bar{E}_3}
\end{aligned}\right\} \tag{2.10}$$

当$\sigma_{cp}\geqslant0$时，$U'=U$，由(2.9)和(2.10)式可得各向异性体在$\sigma_{cp}\geqslant0$情况下的断裂条件为：

$$\begin{aligned}
&\bar{E}_2\bar{E}_3\sigma_1^2+\bar{E}_3\bar{E}_1\sigma_2^2+\bar{E}_1\bar{E}_2\sigma_3^2-2(\bar{\mu}_{12}\bar{E}_2\bar{E}_3\sigma_1\sigma_2\\
&\quad+\bar{\mu}_{23}\bar{E}_3\bar{E}_1\sigma_2\sigma_3+\bar{\mu}_{31}\bar{E}_1\bar{E}_2\sigma_3\sigma_1)=\frac{2\bar{\alpha}\bar{E}_1\bar{E}_2\bar{E}_3}{r_0}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

对于各向同性材料，$\bar{E}_1=\bar{E}_2=\bar{E}_3=E$，$\bar{\mu}_{12}=\bar{\mu}_{13}=\bar{\mu}_{23}=\mu$，$\bar{\alpha}=\alpha$，则(2.11) 式成为：

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\mu(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)=\frac{2\alpha E}{r_0} \tag{2.12}$$

当 $\sigma_{cp}\leqslant0$ 时，由(2.2)、(2.3)、(2.6)可得：

$$U''=U-2U_0=\frac{1}{2}\sigma^{ij}\varepsilon_{ij}-\bar{K}\theta^2 \tag{2.13}$$

将(2.4)、(2.7)式代入(2.13)得：

$$U''=\frac{1}{2}\beta_{ijkl}\ \sigma^{ij}\sigma^{kl} \tag{2.14}$$

式中：

$$\beta_{ijkl}=a_{ijkl}-2\bar{K}c_{ij}c_{kl}$$

其中：

$$c_{ij}=a_{11ij}+a_{22ij}+a_{33ij}$$

$$c_{kl}=a_{11kl}+a_{22kl}+a_{33kl}$$

参考主应力坐标系i'，U''之表达式为：

$$U''=\frac{1}{2}\beta_{i'j'k'l'}\sigma^{i'j'}\sigma^{k'l'} \tag{2.15}$$

式中：

$$\beta_{i'j'k'l'}=\beta_{ijkl}l^i_{i'}\,l^j_{j'}\,l^k_{k'}\,l^l_{l'}$$

或写成：

其中：

$$\left.\begin{aligned}&\beta_{i'j'k'l'}=a_{i'j'k'l'}-2\bar{K}c_{i'j'}c_{k'l'}\\&c_{i'j'}=a_{1'1'i'j'}+a_{2'2'i'j'}+a_{3'3'i'j'}\\&c_{k'l'}=a_{1'1'k'l'}+a_{2'2'k'l'}+a_{3'3'k'l'}\end{aligned}\right\} \tag{2.16}$$

由(2.2)、(2.15)、(2.16)式，可得各向异性体在$\sigma_{cp}\leqslant 0$情况下的断裂条件为：

$$\begin{aligned}&\frac{\sigma_1^2}{\bar{E}_1^2}[\bar{E}_1-2\bar{K}(1-\bar{\mu}_{12}-\bar{\mu}_{13})^2]+\frac{\sigma_2^2}{\bar{E}_2^2}[\bar{E}_2-2\bar{K}(1-\bar{\mu}_{21}-\bar{\mu}_{23})^2]\\&+\frac{\sigma_3^2}{\bar{E}_3^2}[\bar{E}_3-2\bar{K}(1-\bar{\mu}_{31}-\bar{\mu}_{32})^2]+2\{\sigma_1\sigma_2[\frac{\bar{\mu}_{12}}{\bar{E}_1}-\frac{2\bar{K}}{\bar{E}_1\bar{E}_2}(1-\bar{\mu}_{12}-\bar{\mu}_{13})\\&\cdot(1-\bar{\mu}_{21}-\bar{\mu}_{23})]+\sigma_2\sigma_3[\frac{\bar{\mu}_{23}}{\bar{E}_2}-\frac{2\bar{K}}{\bar{E}_2\bar{E}_3}(1-\bar{\mu}_{21}-\bar{\mu}_{23})\cdot(1-\bar{\mu}_{31}-\bar{\mu}_{32})]\\&+\sigma_3\sigma_1[\frac{\bar{\mu}_{31}}{\bar{E}_3}-\frac{2\bar{K}}{\bar{E}_3\bar{E}_1}(1-\bar{\mu}_{31}-\bar{\mu}_{32})\cdot(1-\bar{\mu}_{12}-\bar{\mu}_{13})]\}=\frac{2\bar{\alpha}}{r_0}\end{aligned} \tag{2.17}$$

对于各向同性材料：$\bar{K}=\frac{E}{3(1-2\mu)}$，则(2.17)式成为：

$$\sigma_1^2+\sigma_2^2+\sigma_3^2-2\left(\frac{2-\mu}{1+4\mu}\right)(\sigma_1\sigma_2+\sigma_2\sigma_3+\sigma_3\sigma_1)=\frac{6E\alpha}{(1+4\mu)r_0} \tag{2.18}$$

(2.12)式和(2.18)式为各向同性材料在$\sigma_{cp}\geqslant 0$及$\sigma_{cp}\leqslant 0$时之断裂条件，与文献[13]所得结果一致；而(2.12)式为(2.11)式、(2.18)式为(2.17)式之特殊情况。

三、各向异性体的断裂曲面

当$\sigma_{cp}\geqslant 0$时，各向异性体之断裂条件在主应力σ_1，σ_2，σ_3坐标系中用(2.11)式表示，它是一二次曲面方程，今将σ_1，σ_2，σ_3轴转至σ'_x，σ'_y，σ'_z坐标系。二次曲面方程式系数的函数由一直角坐标系变换为另一坐标系时，函数值不变，三个不变量为：

1. $I'_1=a_{1'1'1'1'}+a_{2'2'2'2'}+a_{3'3'3'3'}$

$$I'_2=\begin{vmatrix}a_{1'1'1'1'}&a_{1'1'2'2'}\\a_{2'2'1'1'}&a_{2'2'2'2'}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{2'2'2'2'}&a_{2'2'3'3'}\\a_{3'3'2'2'}&a_{3'3'3'3'}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_{1'1'1'1'}&a_{1'1'3'3'}\\a_{3'3'1'1'}&a_{3'3'3'3'}\end{vmatrix}$$

$$I'_3=\begin{vmatrix}a_{1'1'1'1'}&a_{1'1'2'2'}&a_{1'1'3'3'}\\a_{2'2'1'1'}&a_{2'2'2'2'}&a_{2'2'3'3'}\\a_{3'3'1'1'}&a_{3'3'2'2'}&a_{3'3'3'3'}\end{vmatrix}$$

由于I'_1，I'_2，I'_3皆不等于零，故特征方程为：

$$\lambda'^3-I'_1\lambda'^2+I'_2\lambda'-I'_3=0 \tag{3.1}$$

三个根$\lambda'_1\neq 0$，$\lambda'_2\neq 0$，$\lambda'_3\neq 0$，所以，(2,11)式转换方程为：

$$\lambda'^2_1\sigma'^2_x+\lambda'_2\sigma'^2_y+\lambda'_3\sigma'^2_z=\frac{2\bar{\alpha}}{r_0} \tag{3.2}$$

上式为一有心曲面，或写成：

$$\pm\frac{\sigma'^2_x}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda'_1 r_0}}\right)^2}\pm\frac{\sigma'^2_y}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda'_2 r_0}}\right)^2}\pm\frac{\sigma'^2_z}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda'_3 r_0}}\right)^2}=1 \tag{3.3}$$

(3.3)式所表示的二次曲面在$\sigma_{cp}\geqslant 0$区，应是封闭的曲面，故特征方程的三个根：$\lambda'_1>0$，$\lambda'_2>0$，$\lambda'_3>0$，所以，(3.1)式应为：

$$\frac{\sigma'^2_x}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda'_1 r_0}}\right)^2}+\frac{\sigma'^2_y}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda'_2 r_0}}\right)^2}+\frac{\sigma'^2_z}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda'_3 r_0}}\right)^2}=1 \tag{3.4}$$

为一椭球面。

对于各向同性体：$I'_1=\frac{3}{E}$，$I'_2=\frac{2}{E^2}(1-\mu^2)$，$I'_3=\frac{1}{E^3}(1-3\mu^2-2\mu^3)$，代入特征方程(3.1)得：

$$\lambda'^3-\frac{3}{E}\lambda'^2+\frac{3}{E^2}(1-\mu^2)\lambda'-\frac{1}{E^3}(1-3\mu^2-2\mu^3)=0$$

解以上方程式，得三个根：

$$\lambda'_1=\lambda'_2=\frac{1+\mu}{E},\quad \lambda'_3=\frac{1-2\mu}{E}$$

得二次曲面方程为：

$$\frac{\sigma'^2_x}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1+\mu)r_0}}\right)^2}+\frac{\sigma'^2_y}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1+\mu)r_0}}\right)^2}+\frac{\sigma'^2_z}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1-2\mu)r_0}}\right)^2}=1 \tag{3.5}$$

当 $\sigma_{cp}\leqslant 0$ 时，断裂条件(2.17)式也为一二次曲面方程，将其转至新的坐标系 σ'_x，σ'_y，σ'_z，三个不变量为：

1. $I''_1=\beta_{1'1'1'1'}+\beta_{2'2'2'2'}+\beta_{3'3'3'3'}$

2. $I''_2=\begin{vmatrix}\beta_{1'1'1'1'} & \beta_{1'1'2'2'}\\ \beta_{2'2'1'1'} & \beta_{2'2'2'2'}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{2'2'2'2'} & \beta_{2'2'3'3'}\\ \beta_{3'3'2'2'} & \beta_{3'3'3'3'}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\beta_{1'1'1'1'} & \beta_{1'1'3'3'}\\ \beta_{3'3'1'1'} & \beta_{3'3'3'3'}\end{vmatrix}$

3. $I''_3=\begin{vmatrix}\beta_{1'1'1'1'} & \beta_{1'1'2'2'} & \beta_{1'1'3'3'}\\ \beta_{2'2'1'1'} & \beta_{2'2'2'2'} & \beta_{2'2'3'3'}\\ \beta_{3'3'1'1'} & \beta_{3'3'2'2'} & \beta_{3'3'3'3'}\end{vmatrix}$

由于I''_1，I''_2，I''_3皆不等于零，故特征方程为：

$$\lambda''^3-I''_1\lambda''^2+I''_2\lambda''-I''_3=0 \tag{3.6}$$

三个根$\lambda''_1\neq 0$，$\lambda''_2\neq 0$，$\lambda''_3\neq 0$，故(2.17)式的转换方程为：

$$\lambda''_1\sigma'^2_x+\lambda''_2\sigma'^2_y+\lambda''_3\sigma'^2_z=\frac{2\bar{\alpha}}{r_0} \tag{3.7}$$

或写成：

$$\frac{\sigma_x'^2}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda_1'' r_0}}\right)^2} \pm \frac{\sigma_y'^2}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda_2'' r_0}}\right)^2} \pm \frac{\sigma_z'^2}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda_3'' r_0}}\right)^2} = 1 \tag{3.8}$$

为一有心曲面。(3.8)式所表示的二次曲面在$\sigma_{cp}\leqslant 0$区应是不封闭的曲面，所以，特征方程的三个根为：$\lambda_1''>0$，$\lambda_2''>0$，$\lambda_3''<0$，(3.6)式为：

$$\frac{\sigma_x'^2}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda_1'' r_0}}\right)^2} + \frac{\sigma_y'^2}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda_2'' r_0}}\right)^2} - \frac{\sigma_z'^2}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda_3'' r_0}}\right)^2} = 1 \tag{3.9}$$

为一单叶双曲面。

对于各向同性体：

$$I_1''=3\beta_{1'1'1'1'}=\frac{1+4\mu}{E},\quad I_2''=3\left(\beta^2_{1'1'1'1'}-\beta^2_{1'1'2'2'}\right)=\frac{5\mu^2+4\mu-1}{E^2}$$

$$I_3''=\beta^3_{1'1'1'1'}+2\beta^3_{1'1'2'2'}-3\beta_{1'1'1'1'}\beta^2_{1'1'2'2'}=\frac{1}{E^3}(2\mu^3+3\mu^2-1)$$

将I_1''，I_2''，I_3''之值代入特征方程(3.6)，得：

$$\lambda''^3-\left(\frac{1+4\mu}{E}\right)\lambda''^2+\left(\frac{5\mu^2+4\mu-1}{E^2}\right)\lambda''-\frac{1}{E^3}(2\mu^3+3\mu^2-1)=0$$

解以上方程得三个根为：

$$\lambda_1''=\lambda_2''=\frac{1+\mu}{E},\qquad \lambda_3''=\frac{1-2\mu}{E}$$

得二次曲面方程为：

$$\frac{\sigma_x'^2}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1+\mu)r_0}}\right)^2} + \frac{\sigma_y'^2}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1+\mu)r_0}}\right)^2} - \frac{\sigma_z'^2}{\left(\sqrt{\frac{2E\alpha}{(1-2\mu)r_0}}\right)^2} = 1 \tag{3.10}$$

(3.4)式和(3.9)式为各向异性体在$\sigma_{cp}\geqslant 0$和$\sigma_{cp}\leqslant 0$时之断裂空间曲面，(3.5)式和(3.10)式为各向同性体在$\sigma_{cp}\geqslant 0$和$\sigma_{cp}\leqslant 0$时之断裂空间曲面，此曲面与文献[14]所得之结论一致；而(3.5)式为(3.4)式、(3.10)式为(3.9)式之特殊情况。

当$\sigma_z'=0$时，即$\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3=0$，为纯剪面，则(3.4)式和(3.9)式成为：

$$\frac{\sigma_x'^2}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda_1' r_0}}\right)^2} + \frac{\sigma_y'^2}{\left(\sqrt{\frac{2\bar{\alpha}}{\lambda_2' r_0}}\right)^2} = 1 \tag{3.11}$$

为一平面椭圆曲线。即(3.4)式和(3.9)式两断裂方程所表示之二次曲面，在纯剪平面相连接为一连续的二次曲面，此曲面即为各向异性体之应力空间。

参 考 文 献

[1] Jenkins, C. F., Report on materials of construction used in aircraft and aircraft engines, Great Britain Aeronaut. Res. Committee, (1920).

[2] Waddoups, M. E., *Composite Materials Workshop*, (S. W. Tsai, N. J. Pagano, J. C. Halpin, eds.) Technomic, Westport, Connecticut,(1968).

[3] Hill, R., *Proc. Roy. Soc. A.*, 193(1948), 281—297.

[4] Hoffman, O., *J. Compos. Mater.*, 1(1967), 200—206.

[5] Franklin, H. G., *Fiber. Soc. Tech.*, 1(1968), 137—141.

[6] Chamis, C. C.,Composite Materials: Testing and Design, ASTM-STP 460, (1969), 336—251.

[7] Pariseau, W. G., Basic and applied rock mechanics (K. E. Gray ed.), Society of Mining Engineers of the American Institute of Mining, Metallurgical and Petroleum Engineers, Inc., (1972), 267—295.

[8] Ashkenazi, E. K. and F. P. Pekker., *Mech. Polim*, 6, 2(1970),284—294.

[9] Wu, E. M., *J. Compos. Mater.* 6(1972), 473—489.

[10] Tennyson, R. C.,D. Macdonald and A. P. Naugaro, *J. Compos. Mater.* 12,(1978), 63.

[11] Shih, C. F. and D. Lee, *J. Eng. Mater. Tech.*, 100(1978),294—302.

[12] Фридман, П. В., *Единая Теория Прочность*,(1943).

[13] 刘叔仪，物理学报，9,4(1953)，275—293.

[14] 刘叔仪，物理学报，10,1(1954)，13—34.

Mechanical Conditions for Fracture of Anisotropic Bodies and Their Geometry in Stress Space

Han Yu-ying

(Department of Geomechanics, Wuhan College of Geology)

Abstract

The conditions for fracture of anisotropic bodies and their geometry in stress space are proposed in this paper. The analytical formulae expressing the fracture conditions are established from the view point of energy theory for crack propagation.

In stress space the limiting surface corresponding to the fracture conditions derived for anisotropic solids are quadratic, it is an ellipsoid in case mean stress is greater than zero and it is a hyperboloid in case mean stress is smaller than zero.

The conclusions obtained by the author in the present paper have certain generality. Some results obtained by predecessors appear to be special cases with respect to the present theory.