

超声速、高超声速粘性气体分离流动的 显隐式差分算法

张涵信 陆林生 余泽楚 马占奎

(中国气动力研究与发展中心, 1982年6月4日收到)

摘 要

本文利用反扩散的两步显、隐式差分方法, 求解了超声速、高超声速粘性气体绕二维、三维压缩拐角的层流和湍流分离运动。结果表明, 它既能获得很好的精度, 又能大大缩短计算机时。

一、引 言

利用差分方法求解粘性气体的分离流动时, 在粘性起作用的区域, 差分格式的粘性项或附加人工粘性项必须远小于真实的物理粘性项, 为此, 格式最好是高阶精度的。如果流场内存在激波, 当利用激波穿行法计算时, 差分格式应能自动捕捉激波。此外, 差分格式的稳定时间步长应较大, 这样在作高雷诺数层流或湍流计算时, 虽然网格很小, 但计算时间并不很长。文献[1]利用自动调节的显式混合格式所给出的算法, 能满足上述前两个要求, 并且已经得到了很好的结果。但是由于稳定时间步长很小, 所需计算时间很长, 所以进一步寻求一种能同时满足上述三个要求的差分格式, 是很有意义的。这就是本文的目的。

本文研究的格式是显、隐式差分格式。采用时间分裂法, 沿着壁面法向的近壁面区的差分算子用隐式, 其余区域和其它方向的差分算子用显式, 这样可以获得很大的稳定时间步长。

在隐式差分计算过程中, 为了增强计算的稳定性和提高差分格式的精度, 我们采用了反扩散的两步格式: 第一步采用具有正耗散项的一阶隐式格式; 第二步进行局部显式反扩散, 即将正耗散项显式减掉。两步之后, 格式保持两阶精度。这种反扩散两步算法, 亦被推广到显式格式。为了计算中能自动捕捉激波, 以两步给出的一、二阶格式为基础, 进一步建立了自动调节的混合格式, 计算表明, 这种方法是很好的。

本文包括引言分四个部分。第二部分讨论了模型方程反扩散两步差分格式; 第三部分给出了Navier-Stokes (以下简称NS) 方程的显、隐式差分算法; 第四部分给出了计算结果, 并对结果作了比较和分析。

二、模 型 方 程

为了简单, 讨论如下模型方程:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (2.1)$$

式中 a 为常数。先建立反扩散的两步显式格式，再建立反扩散的两步隐式格式。

1. 反扩散的两步显式格式

第一步，采用迎风格式，即

$$\left. \begin{aligned} \overline{u_j^{n+1}} &= u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_j^n - u_{j-1}^n) & a > 0 \\ \overline{u_j^{n+1}} &= u_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - u_j^n) & a < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2a)$$

或者写成统一的形式：

$$\overline{u_j^{n+1}} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \frac{|a|\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2.2b)$$

不难看出，这就是Pусанов格式：

$$\overline{u_j^{n+1}} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{2\Delta x} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\omega}{2} \frac{|a|\Delta t}{\Delta x} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$$

在 $\omega=1$ 的情形。

大家知道，(2.2)是一阶格式，它的格式粘性项是：

$$\frac{1}{2} Q_1 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2.3)$$

式中

$$Q_1 = \frac{|a|\Delta t}{\Delta x} \left(1 - \frac{|a|\Delta t}{\Delta x} \right) \quad (2.3a)$$

第二步是对第一步进行反扩散，即从 $\overline{u_j^{n+1}}$ 中减去粘性项(2.3)，于是

$$u_j^{n+1} = \overline{u_j^{n+1}} - \frac{1}{2} Q_1 (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2.4a)$$

显然(2.4a)是二阶精度的。利用(2.2)，(2.4a)亦可写成：

$$\left. \begin{aligned} u_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left\{ u_j^n + \overline{u_j^{n+1}} - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (\overline{u_{j+1}^{n+1}} - \overline{u_j^{n+1}}) \right\} & a > 0 \\ \overline{u_j^{n+1}} &= \frac{1}{2} \left\{ u_j^n + \overline{u_j^{n+1}} - \frac{a\Delta t}{\Delta x} (\overline{u_{j+1}^{n+1}} - \overline{u_{j-1}^{n+1}}) \right\} & a < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4b)$$

将(2.2a)与(2.4b)结合在一起，容易看到，这就是MacCormack的两步显式格式。这表明从一阶的迎风格式出发，经反扩散，可变成二阶MacCormack格式。类似的从带有正耗散项的一阶其他格式出发，经过反扩散，也可以建立相应的二阶格式。

2. 反扩散的两步隐式格式：

在隐式计算中，常常采用Crank-Nicolson格式，

即：

$$\overline{u_j^{n+1}} = u_j^n - \frac{a\Delta t}{4\Delta x} \left[(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + (\overline{u_{j+1}^{n+1}} - \overline{u_{j-1}^{n+1}}) \right] \quad (2.5)$$

这是二阶格式，它的增长因子为1。为了增大其稳定性和增强矩阵追赶中矩阵主对角线元的优势，作为第一步，我们在(2.5)的右端附加隐式的正的耗散项，于是就得到了一阶隐式格式：

$$\begin{aligned} \overline{u_j^{n+1}} &= u_j^n - \frac{a\Delta t}{4\Delta x} \left[(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + (\overline{u_{j+1}^{n+1}} - \overline{u_{j-1}^{n+1}}) \right] \\ &+ \frac{Q_1}{2} (\overline{u_{j+1}^{n+1}} - 2\overline{u_j^{n+1}} + \overline{u_{j-1}^{n+1}}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

这里 Q_1 是耗散系数。由(2.6)可求出 $\overline{u_j^{n+1}}$ 。然后第二步，从 $\overline{u_j^{n+1}}$ 局部的显式的减去耗散项 $\frac{Q_1}{2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$ ，我们可以得到如下二阶格式：

$$u_j^{n+1} = \overline{u_j^{n+1}} - \frac{Q_1}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2.7a)$$

或者将(2.6)代入(2.7a)得：

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{a\Delta t}{4\Delta x} \left[(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + (\overline{u_{j+1}^{n+1}} - \overline{u_{j-1}^{n+1}}) \right] \\ &+ \frac{Q_1}{2} \left[(\overline{u_{j+1}^{n+1}} - u_{j+1}^n) - 2(\overline{u_j^{n+1}} - u_j^n) + (\overline{u_{j-1}^{n+1}} - u_{j-1}^n) \right] \end{aligned} \quad (2.7b)$$

为了在计算过程中能自动捕捉激波，我们以(2.2)、(2.4)或者以(2.6)、(2.7)为基础，构造自动调节的混合格式：

$$u_j^{n+1} = (1-\theta) \left[\overline{u_j^{n+1}} - \frac{Q_1}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \right] + \theta \overline{u_j^{n+1}}$$

或者

$$u_j^{n+1} = \overline{u_j^{n+1}} - \frac{Q_1}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + \frac{Q_2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2.8)$$

式中

$$Q_2 = \theta Q_1 \quad (2.9)$$

θ 为自动调节的开关函数，在激波附近其值为1，在粘性重要的区域，其值为零。这表明在激波附近格式为一阶精度，在离开激波的区域，格式为二阶精度，关于 θ 的表达式，可参见文献[1]。对于 Q_1 ，计算表明，它的值取0.1—0.3为好。

综上所述我们得到了自动调节的反扩散格式(2.8)，其中 $\overline{u_j^{n+1}}$ 可用显式方法计算，亦可用隐式方法计算。利用富里哀分析方法可以证明，当用显式时，(2.2)、(2.4)的稳定条件都是 $\frac{|a|\Delta t}{\Delta x} \leq 1$ ，如果采用隐式算法，(2.6)、(2.7)都是无条件稳定的。

如果引入滤波函数：

$$\left. \begin{aligned} \widetilde{u_j^{n+1}} &= \overline{u_j^{n+1}} + \frac{Q_2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ \widetilde{u_j^n} &= u_j^n + \frac{Q_2}{2} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

准确到二阶精度，(2.6)可写成：

$$\begin{aligned} \widetilde{u_j^{n+1}} &= \widetilde{u_j^n} - \frac{a\Delta t}{4\Delta x} \left[(\widetilde{u_{j+1}^n} - \widetilde{u_{j-1}^n}) + (\widetilde{u_{j+1}^{n+1}} - \widetilde{u_{j-1}^{n+1}}) \right] \\ &+ \frac{Q_1}{2} (\widetilde{u_{j+1}^{n+1}} - 2\widetilde{u_j^{n+1}} + \widetilde{u_{j-1}^{n+1}}) \end{aligned} \quad (2.11)$$

(2.2)可写成:

$$\widetilde{u}_j^{n+1} = \widetilde{u}_j^n - \frac{a\Delta t}{\Delta x} \Delta_x \widetilde{u}_j^n \quad (2.12)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} \Delta_x \widetilde{u}_j^n &= \widetilde{u}_j^n - \widetilde{u}_{j-1}^n & a > 0 \\ \Delta_x \widetilde{u}_j^n &= \widetilde{u}_{j+1}^n - \widetilde{u}_j^n & a < 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

(2.8)可以写成:

$$u_j^{n+1} = \widetilde{u}_j^{n+1} - \frac{Q_1}{2} (\widetilde{u}_{j+1}^{n+1} - 2\widetilde{u}_j^{n+1} + \widetilde{u}_{j-1}^{n+1}) \quad (2.14)$$

作了以上处理后, (2.14)又变成二阶格式了。

上面关于模型方程的研究, 可推广到方程:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \quad (2.15)$$

这里 f 是 U 的函数. 仿照(2.6), 反扩散隐式格式的第一步可写成:

$$\overline{U}_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\Delta t}{4\Delta x} [(f_{j+1}^n - f_{j-1}^n) + (\overline{f}_{j+1}^{n+1} - \overline{f}_{j-1}^{n+1})] + \frac{Q_1}{2} (\overline{U}_{j+1}^{n+1} - 2\overline{U}_j^{n+1} + \overline{U}_{j-1}^{n+1})$$

由于 $\overline{f}_j^{n+1} = f_j^n + \left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)_j^n (\overline{U}_j^{n+1} - U_j^n) + \dots$, 代入上式后得:

$$\begin{aligned} \overline{U}_j^{n+1} &= U_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) - \frac{\Delta t}{4\Delta x} A_{j+1}^n \Delta U_{j+1} \\ &\quad + \frac{\Delta t}{4\Delta x} A_{j-1}^n \Delta U_{j-1} + \frac{Q_1}{2} (\overline{U}_{j+1}^{n+1} - 2\overline{U}_j^{n+1} + \overline{U}_{j-1}^{n+1}) \end{aligned} \quad (2.16)$$

式中

$$\left. \begin{aligned} A_j^n &= \left(\frac{\partial f}{\partial U}\right)_j^n \\ \Delta U_j &= \overline{U}_j^{n+1} - U_j^n \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

仿照(2.7a), 第二步是:

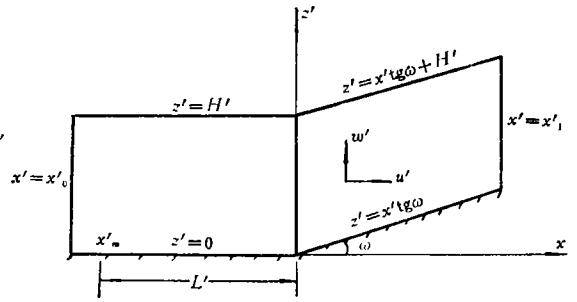
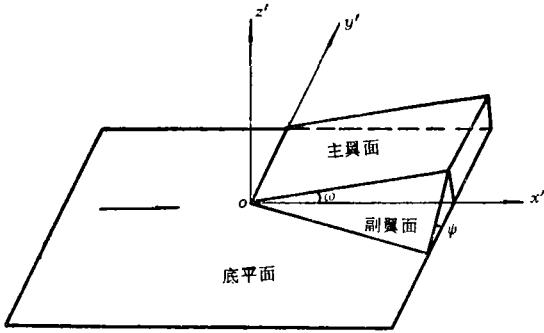
$$U_j^{n+1} = \overline{U}_j^{n+1} - \frac{Q_1}{2} (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n) \quad (2.18)$$

在(2.16)、(2.18)基础上, 进一步可建立混合格式, 并可引入滤波函数和进行滤波计算。

三、NS方程的显、隐式求解方法

1. 基本方程、边界条件和起始条件

现在来研究图1, 2所示三维及二维压缩拐角的绕流, 由于三维拐角具有对称面, 所以图1只给出了外形的右半部分(沿来流方向看). 设 x' , y' , z' 是图1, 2所示坐标系的坐标, t' 表示时间, u' , v' , w' 是气体运动速度在 x' , y' , z' 上的分量, p' , ρ' , T' , μ' 是气体的压力、密度、温度和粘性系数, γ 是绝热指数, $e' = \frac{1}{\gamma-1} \frac{p'}{\rho'} + \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2 + w'^2)$, L' 是



$$\begin{cases} \xi = x \sec \alpha & \alpha = 0 \quad x \leq 0 \\ \zeta = z - x \tan \alpha & \alpha = \omega \quad x > 0 \end{cases}$$

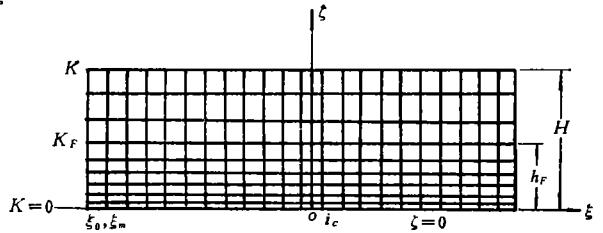
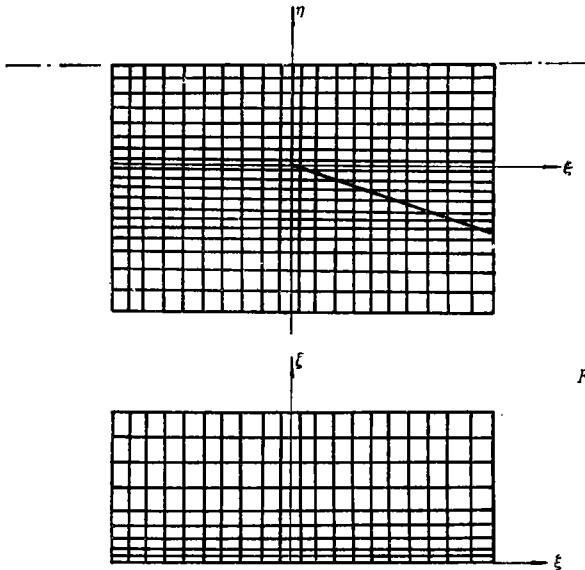


图 1 三维拐角的外形, 求解域及网格

图 2 二维拐角的外形, 求解域及网格

图 1, 2 所示的特征长度, 引入如下无量纲量:

$$\left. \begin{aligned} \rho &= \rho' / \rho'_{\infty}, \quad p = p' / \rho'_{\infty} u'^2_{\infty}, \quad u = u' / u'_{\infty} \\ v &= v' / u'_{\infty}, \quad w = w' / u'_{\infty}, \quad e = e' / u'^2_{\infty} \\ T &= \frac{RT'}{u'^2_{\infty}}, \quad \mu = \mu' / \mu'_{\infty}, \\ x &= x' / L', \quad y = y' / L', \quad z = z' / L' \\ t &= t' u'_{\infty} / L' \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

这里 R 是气体常数, 下标“ ∞ ”表示来流条件。

对于三维绕流, 采用物面坐标系 ξ, η, ζ , 它和直角坐标系 x, y, z 的关系是:

$$\left. \begin{aligned} \xi &= x \\ \eta &= y \\ \zeta &= z - f_0(x, y) = f(x, y, z) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

其中 $z = f_0(x, y)$ 是物面方程, 由下式给定:

$$z = f_0(x, y) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \text{ 或 } x \geq 0 \text{ 且 } y < -x \operatorname{tg} \varphi \\ x \operatorname{tg} \omega, & x > 0 \text{ 且 } y > 0 \\ x \operatorname{tg} \omega + y \operatorname{tg} \psi, & x > 0 \text{ 且 } -x \operatorname{tg} \varphi \leq y \leq 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

这里 $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \omega / \operatorname{tg} \psi$, ω, ψ 的意义见图 1. 于是在 ξ, η, ζ 坐标系内, 常比热完全气体三维层流运动的 NS 方程是:

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} + \frac{\partial G}{\partial \eta} + \frac{\partial H}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.4)$$

式中

$$U = \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho w \\ \rho e \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

$$F = \begin{pmatrix} \rho u \\ \rho u^2 + p \\ \rho uv \\ \rho uw \\ \rho u \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{p}_{xx} \\ -p_{xy} \\ -p_{xz} \\ -u\bar{p}_{xx} - v p_{xy} - w p_{xz} - \theta_x \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

$$G = \begin{pmatrix} \rho v \\ \rho v u \\ \rho v^2 + p \\ \rho v w \\ \rho v \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 \\ -p_{yx} \\ -\bar{p}_{yy} \\ -p_{yz} \\ -v\bar{p}_{yy} - u p_{yz} - w p_{yz} - \theta_y \end{pmatrix} \quad (3.7)$$

$$H = H_h + H_p \quad (3.8)$$

$$H_h = \begin{pmatrix} \rho \tilde{w} \\ \rho u \tilde{w} + p f_x \\ \rho v \tilde{w} + p f_y \\ \rho w \tilde{w} + p \\ \rho \tilde{w} \left(e + \frac{p}{\rho} \right) \end{pmatrix} \quad (3.8a)$$

对于简化的 NS 方程组⁽¹⁾

$$H_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{Re_t} K^2 \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ 0 \\ \frac{1}{Re_t} K^2 f_x \mu \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ -\frac{1}{Re_t} K^2 \mu \frac{\partial}{\partial \xi} \left[\left(e + \frac{p}{\rho} \right) + \left(\frac{1}{Pr} - 1 \right) h \right] \end{pmatrix} \quad (3.8b)$$

对于完全的 NS 方程:

$$H_p = \begin{pmatrix} 0 \\ -p_{zx} - f_x \bar{p}_{zx} - f_y p_{yx} \\ -p_{zy} - f_x p_{xy} - f_y \bar{p}_{yy} \\ -\bar{p}_{zz} - f_x p_{zx} - f_y p_{yz} \\ -w \bar{p}_{zz} - u p_{zx} - v p_{zy} - \theta_z + f_x (-u \bar{p}_{zx} - v p_{xy} - w p_{xz} - \theta_x) \\ + f_y (-v \bar{p}_{yy} - u p_{yx} - w p_{yz} - \theta_y) \end{pmatrix} \quad (3.8c)$$

此外,

$$\left. \begin{aligned} \bar{p}_{zx} = p_{zx} + p &= \frac{2}{3} \frac{\mu}{Re_L} \left[2 \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + f_x \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) - \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + f_y \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right] \\ \bar{p}_{yy} = p_{yy} + p &= \frac{2}{3} \frac{\mu}{Re_L} \left[2 \left(\frac{\partial v}{\partial \eta} + f_y \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + f_x \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial w}{\partial \xi} \right) \right] \\ \bar{p}_{zz} = p_{zz} + p &= \frac{2}{3} \frac{\mu}{Re_L} \left[2 \frac{\partial w}{\partial \xi} - \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} + f_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + f_y \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \right] \\ p_{xy} = p_{yx} &= \frac{\mu}{Re_L} \left(\frac{\partial v}{\partial \xi} + f_x \frac{\partial v}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} + f_y \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \\ p_{xz} = p_{zx} &= \frac{\mu}{Re_L} \left(\frac{\partial w}{\partial \xi} + f_x \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \right) \\ p_{zy} = p_{yz} &= \frac{\mu}{Re_L} \left(\frac{\partial w}{\partial \eta} + f_y \frac{\partial w}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \xi} \right) \\ \theta_x &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{Pr} \frac{\mu}{Re_L} \left(\frac{\partial T}{\partial \xi} + f_x \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \\ \theta_y &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{Pr} \frac{\mu}{Re_L} \left(\frac{\partial T}{\partial \eta} + f_y \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \\ \theta_z &= \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{1}{Pr} \frac{\mu}{Re_L} \frac{\partial T}{\partial \xi} \\ \mu &= (\gamma M_\infty^2 T)^{3/2} \frac{1 + \frac{S_1}{T_\infty}}{\gamma M_\infty^2 T + \frac{S_1}{T_\infty}} \\ K &= (1 + f_x^2 + f_y^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

在(3.6), (3.7)中, $\epsilon=0, 1$ 分别表示简化的和完全的NS方程, 在(3.9)中, M_∞ 表示来流马赫数, $Re_L = \rho_\infty u_\infty L' / \mu_\infty$ 表示来流雷诺数, Pr 表示普朗特数(空气取0.72)。在 μ 的表达式中 $S_1 = 114^\circ K$, 在(3.8a)中, $\bar{w} = w + u f_x + v f_y$ 。

对于图2所示的二维流动, 由于问题与 y 无关, $f_0 = f_0(x) = x \tan \omega$, $v = p_{xy} = p_{yx} = \theta_y = \frac{\partial}{\partial \eta} = 0$, 于是由(3.4)–(3.9)可以给出二维情况下简化和完全的NS方程组。

如果在上述方程组中, μ 用 $\mu_L + \mu_t$ 代替, 其中 μ_L 为层流粘性系数, 可用(3.9)倒数第二式计算, μ_t 是湍流粘性系数, 可采用零方程、一方程或两方程模型计算(见文献[2])。那么上述方程组亦可用来计算湍流运动。

图1, 2所示的区域为求解域。物体表面置于该区的下边界, 壁上满足无滑流条件,

壁面温度是已知的。对于图 1 的三维流动，由于拐角对上游的影响限于拐角上游某一很小的有限区域内，在这个影响区的上游，流动是二维的，因而在入口剖面，流动参量已知，可采用二维平板的结果。在出口边界面，我们将其分成二个区域：在主翼面上，认为流动沿 ξ 方向变化不大，因此对任一流动参量 φ ，将有 $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$ ；在副翼面和底板上，认为流动具有锥型特性，气流沿着 o 点发出的射线上，物理量分别相等。在对称面上，满足对称条件。在侧边界上，认为流动沿 η 方向变化不大，于是有 $\frac{\partial \varphi}{\partial \eta} = 0$ 。在上边界，认为离壁面较远，因而有 $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0$ 。对于图 2 的二维绕流，入口边界可在前缘上游或下游，其上流动参数是给定的^[1]，在出口边界，由于它离拐角较远，取 $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = 0$ 。上边界可用 $\frac{\partial \varphi}{\partial \zeta} = 0$ ，亦可用单波运动条件。

关于起始条件，可以是无粘性气体绕拐角定常运动的流场，亦可取均匀流场。

2. 网格划分

网格划分可见图 1, 2。顺流方向取等距网格，近壁 ζ 方向取密网格，远壁区取稀网格，对于三维情况，为了更好描述三维效应，在副翼面上沿横向加密网格。

3. 差分格式

根据时间分裂理论，方程 (3.4) 的求解问题，等价于求解以下三个方程：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial \xi} = 0 \quad (3.10)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial G}{\partial \eta} = 0 \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.12)$$

在靠近壁面的区域，方程 (3.12) 可进一步分裂成：

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial H_h}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.12a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial H_p}{\partial \zeta} = 0 \quad (3.12b)$$

求解方程 (3.10) — (3.12) 时，采用显、隐式混合差分方法，其差分方程为：

$$\begin{aligned} U_{i,j,k}^{n+1} &= \mathcal{L}(\Delta t) \bar{U}_{i,j,k}^n \\ &= \mathcal{L}_\xi \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \mathcal{L}_\eta \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \left\{ \mathcal{L}_\zeta(\Delta t) \right. \\ &\quad \left. \mathcal{L}_{\zeta p}(\Delta t) \mathcal{L}_{\zeta h}(\Delta t) \right\} \mathcal{L}_\eta \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \mathcal{L}_\xi \left(\frac{\Delta t}{2} \right) \bar{U}_{i,j,k}^n \end{aligned} \quad (3.13)$$

这里 $\bar{U}_{i,j,k}^n$ 为滤波函数，它与 $U_{i,j,k}^n$ 的关系为：

$$\bar{U}_{i,j,k}^n = U_{i,j,k}^{*} + \frac{1}{2} Q_\zeta (U_{i,j,k+1}^{*} - 2U_{i,j,k}^{*} + U_{i,j,k-1}^{*}) \quad (3.14a)$$

$$U_{i,j,k}^{*} = U_{i,j,k}^{**} + \frac{1}{2} Q_\eta (U_{i,j+1,k}^{**} - 2U_{i,j,k}^{**} + U_{i,j-1,k}^{**}) \quad (3.14b)$$

$$U_{i,j,k}^{**} = U_{i,j,k}^n + \frac{1}{2} Q_\xi (U_{i+1,j,k}^n - 2U_{i,j,k}^n + U_{i-1,j,k}^n) \quad (3.14c)$$

Q_ξ, Q_η, Q_ζ 的意义可参见[1]. 而 $\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta, \mathcal{L}_\zeta, \mathcal{L}_{\zeta p}, \mathcal{L}_{\zeta h}$ 的意义为:

(1) $\mathcal{L}_\xi, \mathcal{L}_\eta$ 是对应于(3.10)、(3.11)的差分算子, 它的定义域为整个计算域的内点. \mathcal{L}_ζ 是对应于(3.12)的差分算子, 它的定义域为外部稀网格区的内点. 这三个差分算子是由上节模型方程的显式格式推广而得.

(2) $\mathcal{L}_{\zeta h}, \mathcal{L}_{\zeta p}$ 是方程(3.12a)、(3.12b)的差分算子, 定义域为近壁密网格区的内点. 这里采用的是隐式格式, 它们可由上节的隐式反扩散格式推广而得. 对于 $\mathcal{L}_{\zeta h}$, 其差分方程可用三对角块矩阵追赶法计算. 但对于 $\mathcal{L}_{\zeta p}$, 由于(3.12b)是抛物型的, 可令其 $Q_1=0$, 此时差分方程可用标量追赶法计算.

4. 稳定条件

$\mathcal{L}_\xi(\Delta t_\xi), \mathcal{L}_\eta(\Delta t_\eta), \mathcal{L}_\zeta(\Delta t_\zeta)$ 的稳定时间步长是:

$$\left. \begin{aligned} \Delta t_\xi &= \min_{\Omega} \frac{\Delta \xi}{|u| + a + \epsilon \frac{\mu}{\rho Re_L} \left(\frac{A_\xi}{\Delta \xi} + \frac{B_\xi}{\Delta \zeta} + \frac{C_\xi}{\Delta \eta} \right)} \\ \Delta t_\eta &= \min_{\Omega} \frac{\Delta \eta}{|v| + a + \epsilon \frac{\mu}{\rho Re_L} \left(\frac{A_\eta}{\Delta \eta} + \frac{B_\eta}{\Delta \xi} + \frac{C_\eta}{\Delta \zeta} \right)} \\ \Delta t_\zeta &= \min_{\Omega} \frac{\Delta \zeta}{|\bar{\omega}| + Ka + (1-\epsilon) \frac{\mu}{\rho Re_L} \frac{2\gamma}{Pr} \frac{K^2}{\Delta \zeta} + \epsilon \frac{\mu}{\rho Re_L} \left(\frac{A_\zeta}{\Delta \zeta} + \frac{B_\zeta}{\Delta \xi} + \frac{C_\zeta}{\Delta \eta} \right)} \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

式中:

$$\begin{aligned} A_\xi &= A_\eta = \frac{2\gamma}{Pr} \\ B_\xi &= B_\eta = \sqrt{\frac{2}{3}} \\ C_\xi &= \frac{2}{3} \operatorname{tg} \omega + \sqrt{\frac{2}{3} \sec^2 \psi - \frac{1}{36} \operatorname{tg}^2 \omega} \\ C_\eta &= \max \left(\frac{\gamma}{Pr} \operatorname{tg} \psi, \sqrt{\frac{2}{3} \sec \omega}, \left| \frac{\lambda + 2\mu}{2\mu} \operatorname{tg} \psi + \sqrt{\frac{2}{3} \sec^2 \omega - \frac{1}{36} \operatorname{tg}^2 \psi} \right| \right) \\ A_\zeta &= \frac{2\gamma}{Pr} K^2 \\ B_\zeta &= \left[\frac{25}{18} f_x^2 + \frac{2}{3} (1 + f_x^2) \right]^{1/2} \\ C_\zeta &= \left[\frac{25}{18} f_y^2 + \frac{2}{3} (1 + f_y^2) \right]^{1/2} \\ a &= \left(\gamma \frac{p}{\rho} \right)^{1/2} \\ \lambda &= -\frac{2}{3} \mu \end{aligned}$$

另外, Ω 为求解域的内点, Ω_e 为外部稀网格区的内点.

由于 $\mathcal{L}_{\zeta h}, \mathcal{L}_{\zeta p}$ 是无条件稳定的, 因此整个差分运算的稳定时间步长是:

$$\Delta t = \min(2\Delta t_\xi, 2\Delta t_\eta, \Delta t_\zeta) \quad (3.16)$$

显然，它比显式格式^[1,3]的稳定时间步长大很多，尤其计算湍流时，可提高1~2个量级。

如果在(3.15)、(3.16)中，令 $\psi=0$ ， $\Delta\eta\rightarrow\infty$ ，则可给出二维绕流的稳定条件。

四、计算结果

本文给出了五个计算例题。前三个是二维压缩拐角的层流分离流动；第四个是二维压缩拐角的湍流分离流动；第五个是三维压缩拐角的层流分离流动。其计算条件和计算结果可见图3, 4, 5, 6, 7. 为了便于比较，图3, 4, 5, 6中还画出了文献[1, 3, 4, 5]给出的NS方程数值解的结果以及实验结果^[6, 7]。可以看出，本文方法的结果是满意的。和显式算法比较，计算时间分别缩小了4, 13, 9, 20, 5倍，因此具有省机时的优点。

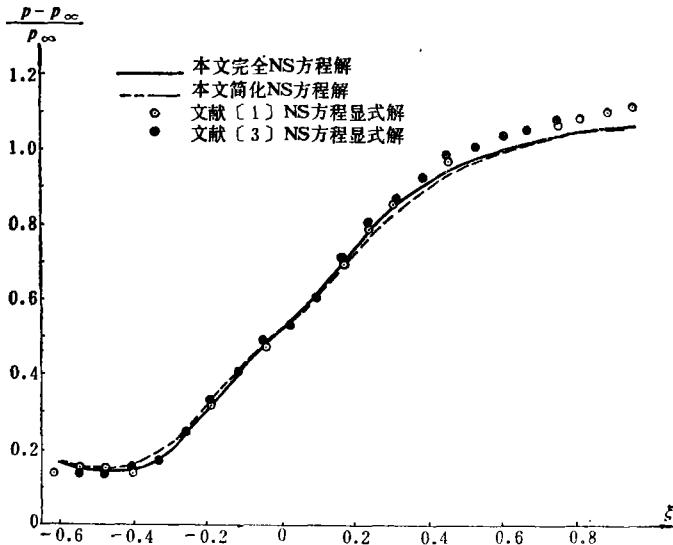


图3(a) $M_\infty = 3$ 二维压缩拐角层流情况表面压力分布
 $Re_L = 1.68 \times 10^4$, $\omega = 10^\circ$, $T_\infty = 216.65^\circ\text{K}$, $T_w = 606.62^\circ\text{K}$

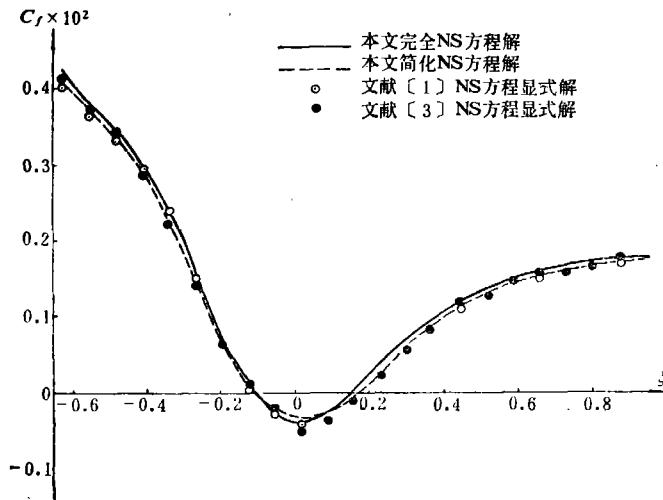


图3(b) $M_\infty = 3$ 二维压缩拐角层流情况表面摩擦分布
 $Re_L = 1.68 \times 10^4$, $\omega = 10^\circ$, $T_\infty = 216.65^\circ\text{K}$, $T_w = 606.62^\circ\text{K}$

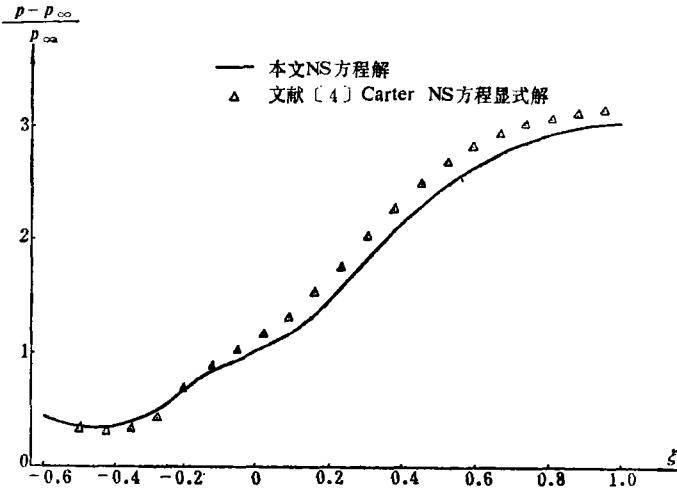


图4(a) $M_\infty = 6.06$ 二维拐角层流情况表面压力分布
 $Re_L = 1.5 \times 10^5$, $\omega = 10.25^\circ$, $T'_\infty = 48.889^\circ\text{K}$, 绝热壁

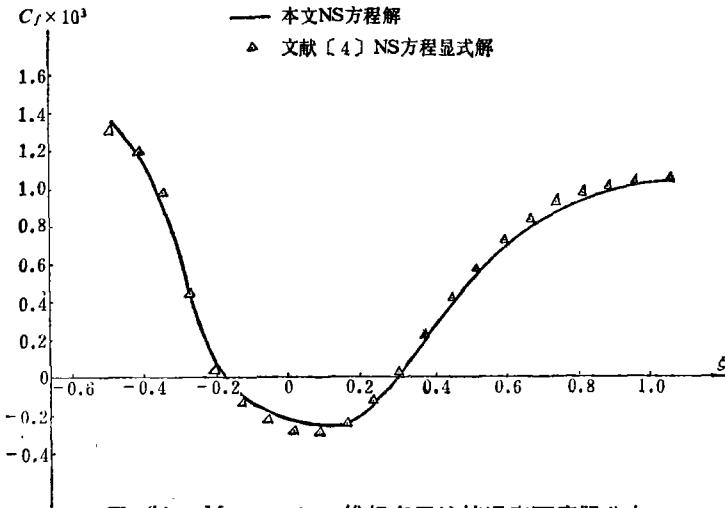


图4(b) $M_\infty = 6.06$ 二维拐角层流情况表面摩擦分布
 $Re_L = 1.5 \times 10^5$, $\omega = 10.25^\circ$, $T'_\infty = 48.889^\circ\text{K}$, 绝热壁

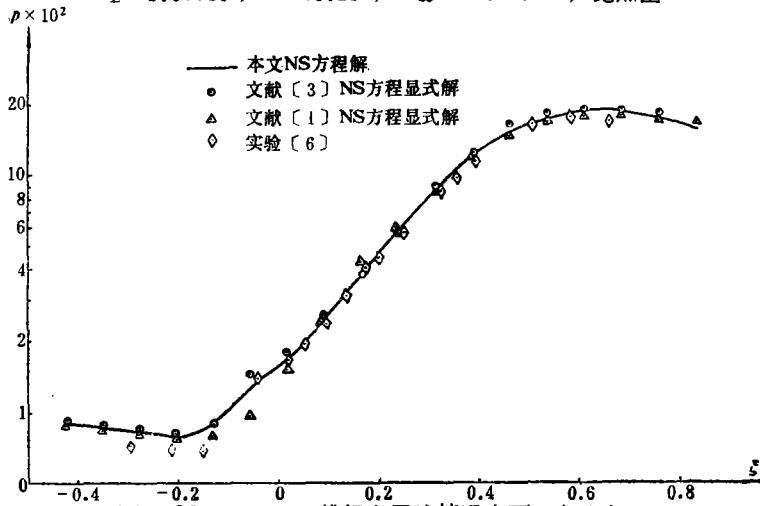


图5(a) $M_\infty = 14.1$ 二维拐角层流情况表面压力分布
 $Re_L = 1.04 \times 10^5$, $\omega = 18^\circ$, $T'_\infty = 72.222^\circ\text{K}$, $T'_w = 237.22^\circ\text{K}$

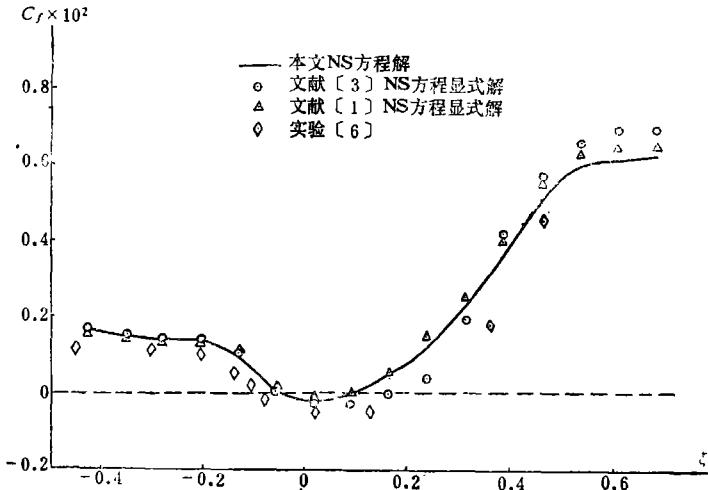


图5(b) $M_\infty = 14.1$ 二维拐角层流情况表面摩擦分布
 $Re_L = 1.04 \times 10^5$, $\omega = 18^\circ$, $T'_\infty = 72.222^\circ\text{K}$, $T'_w = 297.22^\circ\text{K}$

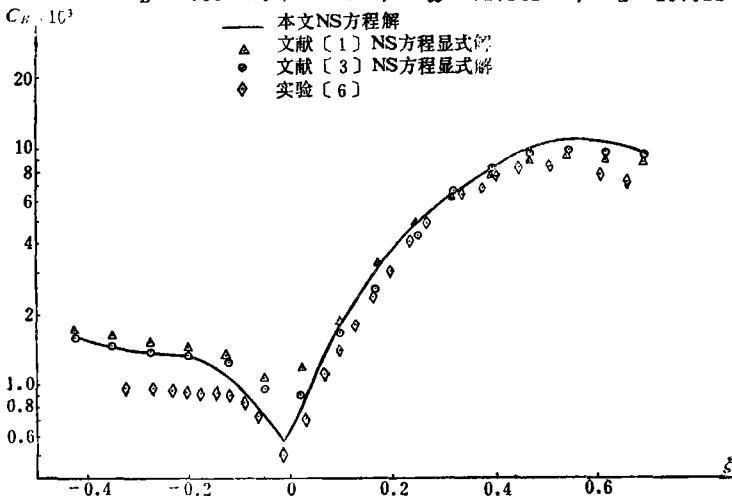


图5(c) $M_\infty = 14.1$ 二维拐角层流情况表面热流分布
 $Re_L = 1.04 \times 10^5$, $\omega = 18^\circ$, $T'_\infty = 72.222^\circ\text{K}$, $T'_w = 297.22^\circ\text{K}$

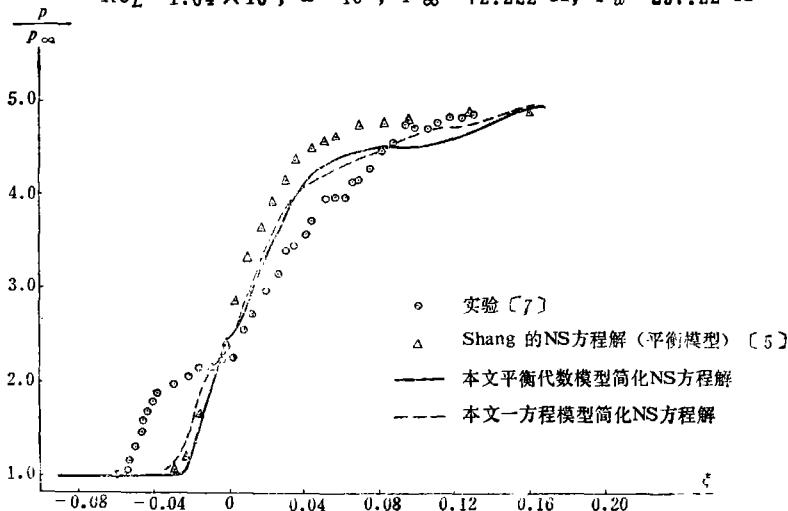


图6(a) $M_\infty = 2.96$ 二维拐角湍流情况表面力压分布
 $Re_L = 10^7$, $\omega = 25^\circ$, $T'_\infty = 98.33^\circ\text{K}$, 绝热壁

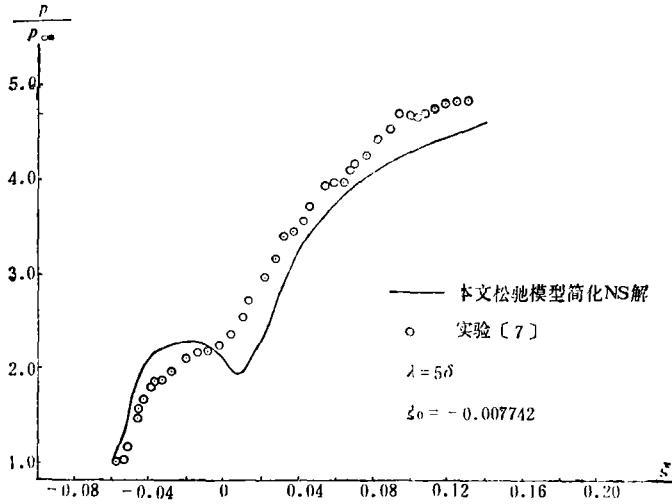


图6(b) $M_\infty = 2.96$ 二维拐角湍流情况表面压力分布
 $Re_L = 10^7$, $\omega = 25^\circ$, $T'_\infty = 98.333^\circ\text{K}$, 绝热壁

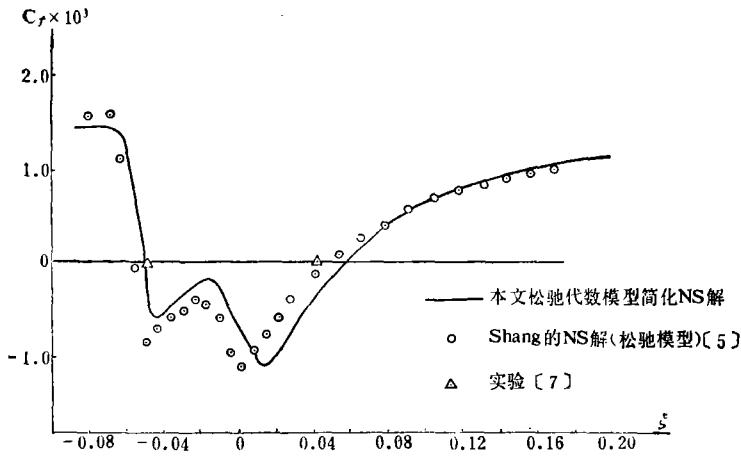


图6(c) $M_\infty = 2.96$ 二维拐角湍流情况表面摩擦分布
 $Re_L = 10^7$, $\omega = 25^\circ$, $T'_\infty = 98.333^\circ\text{K}$, 绝热壁

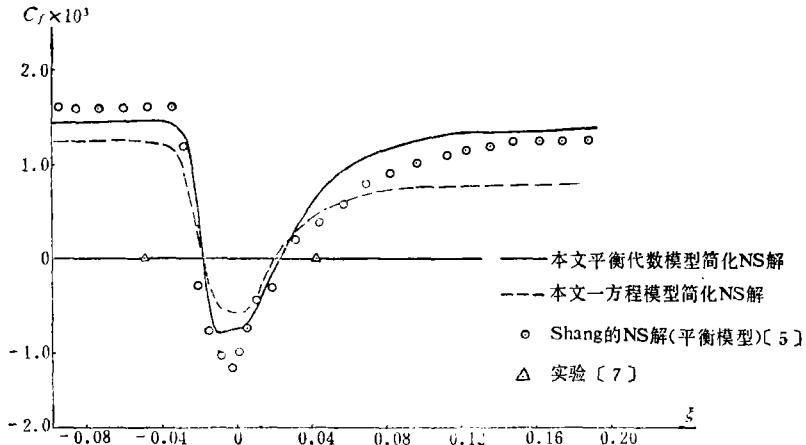


图6(d) $M_\infty = 2.96$ 二维拐角湍流情况壁面摩擦分布
 $Re_L = 10^7$, $\omega = 25^\circ$, $T'_\infty = 98.333^\circ\text{K}$, 绝热壁

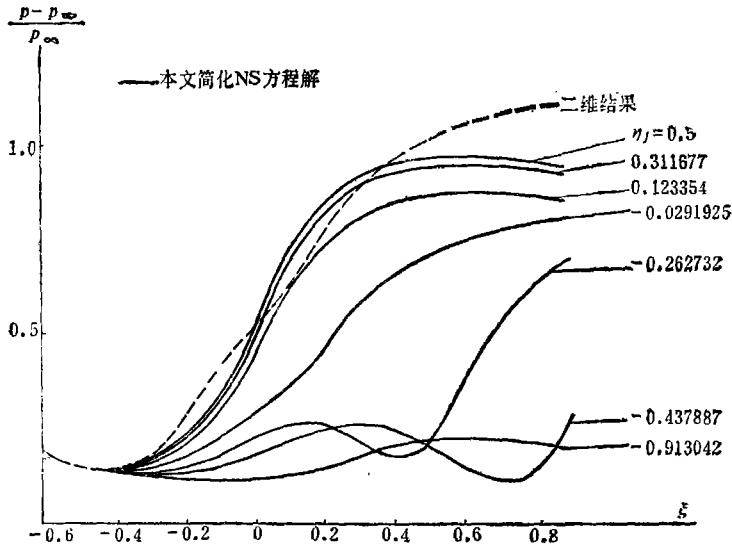


图7(a) $M_\infty = 3$ 三维拐角层流情况表面压力分布
 $Re_L = 1.68 \times 10^4$, $\omega = 10^\circ$, $\psi = 20^\circ$, $T'_\infty = 216.65^\circ\text{K}$, 绝热壁

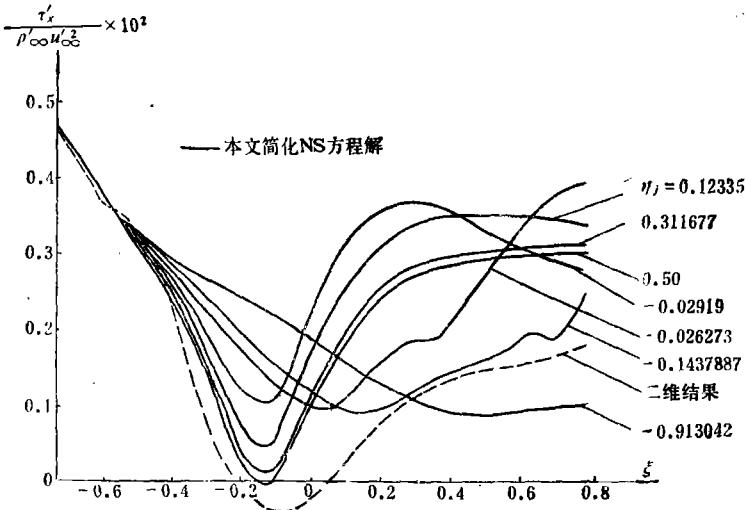


图7(b) $M_\infty = 3$ 三维拐角层流情况表面摩擦分布
 $Re_L = 1.68 \times 10^4$, $\omega = 10^\circ$, $\psi = 20^\circ$, $T'_\infty = 216.65^\circ\text{K}$, 绝热壁

参 考 文 献

- [1] 张涵信, 余泽楚, 陆林生, 马占奎, 力学学报, 7, 4, (1981).
- [2] 张涵信, 湍流模型概论, 中国气动力研究与发展中心, (1981).
- [3] Hung, C. M. and R. W. McCormack, *AIAA paper*, 75-2, (1975).
- [4] Carter, J. E., *NASA TR R-385*, (1972).
- [5] Shang, J. S. and W. L. Hanrey, Jr., *AIAA paper*, 75-3, (1975).
- [6] Holden, M. S. and J. R. Mosell, *CALSPAN Report*, № AF-2410-A-1, (1969).
- [7] Law, C. Herbert, *AIAA J.*, 12, 7, (1974).

A Mixed Explicit-Implicit Antidiffusive Method of Navier-Stokes Equations for Supersonic and Hypersonic Separated Flow

Zhang Han-xin Lu Lin-sheng

Yu Zen-chu Ma Zhan-kui

(Chinese Aerodynamic Research and Development Center, Sichuan)

Abstract

In this paper, a mixed explicit-implicit scheme based on an antidiffusive method is used to solve the Navier-Stokes equations for the supersonic and hypersonic separated flows. The computations are performed for laminar and turbulent flows over the two- and three-dimensional compression corners. The obtained results are compared with the results of numerically computing NS equations^(1,3-5) and these results of the experiments^(6,7). The computations show that the numerical scheme in this paper is satisfactory.