文章编号:1000_0887(2004)12_1257_07

有限变形下的混凝土动态本构关系研究

陈书宇¹, 沈成康², 金吾根¹

(1.复旦大学力学与工程科学系,上海 200433;(2.同济大学结构工程与防灾研究所,上海 200092)

(我刊原编委吴家龙推荐)

摘要: 讨论有限变形和小变形假设下本构关系的区别,并将其运用于混凝土的弹_粘塑性本构关系研究,提出了一个应变率相关的动态力学模型• 模型基于 Ottosen 的 4 参数屈服准则,分别考虑 混凝土在硬化阶段和软化阶段加载面的不同变化规律,建立冲击荷载下的混凝土本构关系• 该模型可以应用于冲击载荷下混凝土材料响应的模拟• 引进 Green_Naghdi 客观率建立有限变形的混凝 土模型• 根据大量实验结果对应变率和材料强度的关系提出合理假设,使模型可以反映混凝土大 变形的动态力学行为,为相关工程问题的研究提供有益的思路和有效的工具•

关 键 词: 本构模型; 有限变形; 混凝土; 应变率效应; 冲击载荷 中图分类号: 0313 文献标识码: A

引 言

经典的小变形弹塑性问题的数学模型和数值分析已经比较完善地建立起来• 然而,有限 变形弹塑性,尤其是弹粘塑性力学问题的研究仍然是一个困难重重的,同时又是活跃的领域•

因为在有限变形的情况下,基于小变形条件所作的 大部分假设将不再成立,这时需要考虑物体在不同 坐标标架下的变形以及应力的定义及其关系•应 用在小变形情况下的一个关键假设是变形可以分 解为弹性部分和塑性部分的和•大量的基于中点 法则的算法,从完全显式的算法到完全隐式的算 法,都是在这一假设下进行积分运算的^[1]•由于 有限转动的影响不能忽略,导致了应力和应变率 定义的复杂性•另外,不同的参考系的选择也将 影响应力和应变的定义形式和广义变分原理的构造•



图1 使用小应变带来的误差^[1]

这里举一个简单的例子来说明有限变形和小变形情况下计算结果的差别• 两种情况下的 应变张量的定义为:

* 收稿日期: 2003_04_03; 修订日期: 2004_06_22

金吾根(联系人.Tel: + 86_21_65642741; Fax: + 86_21_65642742; E_mail:wg jin@263.net)•

(1)

 $E_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{i,j}u_{j,i}), \ \varepsilon_{ij} = 0.5(u_{i,j} + u_{j,i}),$

其中,前者为 Lagrange 应变张量,后者为小变形应变张量•显然,只有在非常小的变形下两者 才能近似相等•图1给出了一个正方形板受剪切的算例,显示使用小变形应变来代替有限变 形应变所造成的巨大偏差^[1]•进一步来说,只有 Lagrange 应变张量才具有刚体旋转下的不变 性,而小变形应变张量不是不变量•

关于小变形弹塑性问题的材料非线性有限元的理论和实践在上个世纪后期取得了很大的 进展• 同样地,符合 J₂ 塑性法则的材料(屈服面)的大变形理论和实践也发展迅速• 但是,混 凝土等岩土类材料的有限变形分析与静水压力以及应力角有关,同时应力和应变形式的选取, 本构方程的积分方法等一直处于争论之中• 为了数值模拟的方便,我们采用完全的拉格朗日 坐标系统(total Lagrange system)• 虽然在某种意义上说,使用逐步更新的拉格朗日系统(update Lagrange system)更有利于反映物体在有限变形时的本构关系,但是在包含应力集中的有限元 计算中 U. L. 法的网格敏感性更强 ——可能由于坐标变化引起网格的畸变 ——而使运算无法 继续进行• 解决这种现象经常需要采用网格的自适应技术,与之相伴的是程序复杂程度的增 加和计算量的增大• 正是基于以上的考虑,本文采用完全的拉格朗日系统下的变形描述(T. L. 法)来建立混凝土的力学模型•

1 小变形假设下的混凝土模型

为使叙述清晰, 这里首先简要介绍小变形假设下的混凝土粘塑性本构关系• 在以前的相关研究中, 应用改进的 Ottosen 4 参数模型^[2] 来计算混凝土的动态力学行为^[3]• 为了更好地反 映混凝土在实验中表现的性质, 尤其是动态实验结果, 这里采用非关联塑性、非线性硬化的粘塑性本构关系来建立模型• 在模型中, 体应变是一个关键参量, 因为它是导致内部损伤的量度• 在下面模型中的不同部分体现了静态三轴实验和动态 SHPB 实验的结果•

在这里,材料的失效和破坏是一个由变形历史驱动的连续的过程而不是一个个独立的事件• 与很多传统模型中使用单一的屈服面和破坏面而不考虑材料的状态所不同的是,这里假设屈服面和破坏面与材料的变形有关• 这样,存在有无限的屈服面,而加载过程理想化为从一个屈服面到下一个屈服面的转移^[4],其中每一步过程都包含着不可逆的塑性变形•

在加载时,这里使用等向硬化法则来描述屈服面和破坏面的变化规律•经过简单的修改, 模型中可以加入移动硬化的法则•以前的实验表明,即使在静水压力下,混凝土也会出现塑性 变形•这就需要模型中的屈服面和静水压力轴相交^[5]•从经验来看,这需要在原来的屈服函 数基础上加入修正项来实现•为了得到更为符合实际的计算结果,材料软化段(应力峰值以 后)的力学行为需要单独进行讨论•在达到最大应力前的材料屈服面采用以下形式:

$$f(\sigma) = A \frac{J_2}{k_{\rm c}} + \lambda(\cos 3\theta) \sqrt{J_2} + BkI_1 + h(k)I_1^2 - k_{\rm fc}f_1(p, D, \mathfrak{D}) = 0,$$
(2)

$$\lambda = \left\{ k_{1} \cos \left(\frac{\pi}{3} - \arccos(-k_{2} \cos 3\theta)/3 \right), \quad \cos 3\theta < 0, \right\}$$
(3)

其中 f_{c} 是混凝土的单轴抗压强度, I_{1} 是应力张量的第1不变量, J_{2} 和 J_{3} 分别是应力偏量的第2 不变量和第3不变量, θ 是应力角:

$$\theta = \frac{1}{3} \arccos\left[\frac{3\sqrt{3}J_3}{2J_2^{3/2}}\right],\tag{4}$$

 k_1 称为尺寸函数, k_2 称为形状函数, 其数值由受拉状态 $\lambda(\theta = 0)$ 、受压状态 $\lambda_c(\theta = \pi/3)$ 来确定• 在式(2) 中, A 和 B 与混凝土的物理性质相关• p 是混凝土的围压, 由体应变 μ 所决定, D 是标量损伤因子•

$$f_{1}(p, D, \mathfrak{D}) = \left(1 - D + B_{d} \frac{p}{f_{c}}\right) \left(1 + \ln\left(1 + \frac{\mathfrak{E}^{q}}{\mathfrak{E}_{0}}\right)\right), \tag{5}$$

其中 🖉 和 🛚 分别是等效应变率和参考应变率, Ba 是材料常数• 损伤的演化由下式控制:

$$D = \left(\bigotimes_{q}^{vp} + B^{vp} \right) / \mathop{\mathrm{E}}(p), \tag{6}$$

损伤变化率由等效粘塑性应变率 ॐ、粘塑性体应变率 ॐ 和断裂塑性应变 ε_r(*p*) 控制• 有关 损伤因子的详细介绍可以参考作者以前的工作^[6]•

在公式(2)中, k 是粘塑性应变的函数, 决定屈服面的大小• 该公式的最后一项控制加载 面和静水压力轴的相交情况• 当 k = 1时, 公式退化为以前的控制方程⁽⁶⁾• k 的取值范围从 刚进入屈服时的 $k = k_0$ 到破坏时的 k = 1• 公式(2) 中所有的具有相同 k 值的应力状态位于 相同的加载面上• h(k)为 k 的函数, 根据实验结果及 Imran(2001) 的研究^[4], 可以取为:

$$h(k) = \frac{\underline{E}h(1-k)}{\underline{k}f_{c}},\tag{7}$$

k 的具体表示式可以用等效粘塑性应变 ε^{vp} 来表示:

$$k = k(\varepsilon^{\rm vp}) = \frac{2\sqrt{\varepsilon^{\rm vp}\varepsilon^{\rm vp}_{\rm max}} - \varepsilon^{\rm vp}}{\varepsilon^{\rm vp}_{\rm max}}(1-k_0) + k_0, \tag{8}$$

 k_0 和 E_h 为材料参数,有关 k_0 和 E_h 的选取,可以使用塑性变形中的两个独立的状态来确定• 其具体方法将在后续的文章中讨论• ϵ_{max}^{sp} 是应力状态达到破坏面时的累积塑性变形•

上面的公式给出了在应力达到峰值前的混凝土力学行为,应力达到峰值之后,混凝土强度随着变形的增加而衰减,直到破坏•研究表明,其强度的衰减是由于材料中宏观裂纹的演化导致的•在达到峰值后混凝土的收缩面可以通过添加经验项表示为:

$$f(\sigma) = A \frac{J_2}{f_c} + \lambda(\cos 3\theta) \quad \sqrt{J_2} + BI_1 - (1 - r)f_c \frac{I_1}{I_1^{\text{trans}}} - f_c f_1(p, D, \aleph) = 0, \quad (9)$$

其中 I^{tans} 是在转变点时的体应力大小, r 是控制收缩面演化的软化参数, 其取值范围从在破坏 面上的 r = 1 到剩余强度面上的 r = 0 同样, 可以通过等效塑性应变将 r 定义为:

$$r = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(\pi \frac{\varepsilon^{\rm vp} / \varepsilon_{\rm max}^{\rm vp} - 1}{\varepsilon_{\rm ulv}^{\rm vp} / \varepsilon_{\rm max}^{\rm vp} - 1} \right), \tag{10}$$

其中 ε 建 是在剩余强度面上的累积等效粘塑性应变•

近来的实验数据表明在很多场合下, 混凝土表现出非关联塑性的性质• 关于混凝土的屈服面和移动面的形状是否相似一直是一个争论的热点• 这里使用 Drucker_Prager 形式的准则 来确定塑性流动面• 模型中的流动规律为:

$$g(\sigma) = aI_{1+} \quad \sqrt{J_{2-} c} = 0, \tag{11}$$

其中, c 是材料常数, a 由下面的比例所决定:

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{I^{\text{sp}}}{I^{\text{sp}}}$$
(12)

粘塑性应变率通常表示为:

$$\boldsymbol{\mathcal{S}}^{\mathrm{p}} = \boldsymbol{\mathcal{X}} \langle \boldsymbol{\boldsymbol{\phi}}(f) \rangle \frac{\partial \boldsymbol{g}(\sigma)}{\partial \sigma}, \tag{13}$$

式中 ¥ 为粘塑性流动因子,〈 〉是 McAuley 括号,当括号内部分的值大于零时有效,否则为 零•

在小应变的假设下,应变可以分解为弹性部分和塑性部分的和:

 $\mathcal{E} = \mathcal{E}^{e} + \mathcal{E}^{vp},$

弹性应变和应力通过胡克定律相联系:

 $\sigma = E \epsilon^{e_{\bullet}}$

(15)

(23)

(14)

材料的峰值应变,即应力达到最大值时的应变,也是随着应变率的变化而变化• 根据以前 的研究,把峰值应变和应变率的关系定为双参数形式:

$$\frac{\mathcal{E}_{d}}{\mathcal{E}_{0}} = \left[\frac{\mathcal{E}_{1} + \alpha}{\mathcal{E}_{0}} \right]^{\beta}, \qquad (16)$$

其中, α和β为参数,根据实验确定•这一小变形假设下的混凝土的本构模型可以方便地植入 有限元程序之中,进行混凝土的动态数值模拟•

2 有限变形分析基础

对于有限变形问题, 应力率和应变率之间的关系是必不可少的• 定义变形梯度为:

$$F_{ij} = \frac{\partial x_i}{\partial X_i},\tag{17}$$

其中 x_i 和 X_i 分别基于现时构形和初始构形的坐标• 变形梯度张量的右极分解可以写为:

 $F_{ij} = R_{ik}S_{lj} \bullet \tag{18}$

由连续介质力学可知 *S_i* 定义了伸缩张量, *R_i* 为正交的旋转张量•通过这样的分解可以 把物体的运动分为两个部分: 第一部分为物体质点变形的空间度量, 第二部分为物体自身标架 的转动•

速度梯度张量定义为:

$$L_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} = F_{ik} F_{ij}^{-1} \bullet$$
(19)

速度梯度张量的对称部分为空间的变形率张量,反对称部分为旋转速率张量,即有下面的分 解:

$$L_{ij} = D_{ij} + W_{ij}, \tag{20}$$

其中:

$$D_{ij} = R_{ik} d_{km} R_{jm}, \qquad (22)$$

$$d_{ij} = 0.5(S_{tk}S_{ij}^{-1} + S_{ik}^{-1}S_{kj}^{-1}),$$

显然, di 代表了无旋的变形率张量•

如果已知位移和速度的分布,从式(17)可以求出变形梯度 *F*,然后由式(18)确定伸缩张量 *S*和旋转张量 *R*• 这样,就可以由式(21)计算变形率张量 *D*和旋转速率张量 *W*•

本构方程需要建立应力_应变的关系或者应力率-应变率的关系,有限变形物体的本构模型需要适应空间或旋转的变形条件的设置•因此需要一个客观的应力率张量来消除总应力率 中刚体转动的影响•在笛卡儿坐标系中, Cauchy 应力率和刚体转动有关,不是客观的应力率张 量,需要使用其它的应力率张量来描述•以前经常采用 Jaumann 应力率来反映物体的大变形 问题,但是 Healy 和 Dodds(1992) 指出 Jaumann 应力率在反映大变形和类似混凝土的复杂材料的力学行为时有着严重的缺点^[7],在通常的加载路径下将给出物理上没有意义的材料响应• 相对而言,Green_Naghdi(1965) 给出的应力率定义可以给出大变形下更加合理的材料响应^[8],因此本文将采用 Green_Naghdi 应力率来建立材料的大变形的本构模型•

引进 Green_Naghdi 应力率^[9]后, 应力率和变形率由本构模量相联系:

$$\sigma_{ij}^{\cdot} = C_{ijkl} D_{kl} \bullet$$
(24)

Green_Naghdi 应力率 🖏 和 Cauchy 应力 🕫 的关系定义为:

$$\sigma_{ij} = \alpha_{ij} + \alpha_{ik} \ \Omega_{ij} - \Omega_{ik} \ \sigma_{kj}, \tag{25}$$

其中 σ_i 是 Cauchy 应力张量, Ω_i 是刚体旋转率张量, 和旋转张量相联系, 其定义为:

 $\Omega_{j} = R_{lk}R_{jk} \bullet \tag{26}$

这样,知道变形率张量后,Green_Naghdi 应力率可以从(24)式求出,然后积分(25)式就可以 得到 Cauchy 应力(真应力)• 但这个过程需要对旋转率张量进行积分,这是比较困难的• 一个 改进的方法是先求得不含转动部分的无旋 Cauchy 应力张量 τ,然后利用旋转张量 **R** 来计算 Cauchy 应力张量 σ:

$$\sigma_{j} = R_{ik} T_{kl} R_{jl} \bullet$$
⁽²⁷⁾

另一方面, Green_Naghdi 应力率可以表示为:

$$\sigma_{j}^{\cdot} = R_{ik} \mathcal{F}_{kl} R_{jl} \bullet \tag{28}$$

由以前各式经过推导可有:

$$\mathbf{F}_{\mathbf{J}} = C_{ijkl} d_{kl}, \tag{29}$$

$$d_{kl} = R_{pk} D_{pq} R_{ql} \bullet \tag{30}$$

这样,就能够从技术上避免积分等式(25)所带来的麻烦•进一步地讲,在小变形假设下建立本 构模型时使用的内变量都是基于无旋转的应力部分定义的,因此在有限变形的情况下不需要 做任何改动,也就是说本文前面建立的粘塑性本构模型可以在使用旋转张量后得到有限变形 情况下的全部性质•

3 混凝土的粘塑性模型

考虑在有限变形的情况下,弹性应变和塑性应变相比为小量,则变形率张量及其无旋转的 部分可以分解为弹性和粘塑性两个部分:

$$D_{ij} = D_{ij}^{e} + D_{ij}^{vp}, \ d_{ij} = d_{ij}^{e} + d_{ij}^{vp}$$
(31)

即有:

$$d_{j}^{e} = R_{ki} D_{kl}^{e} R_{j}, \quad d_{j}^{vp} = R_{ki} D_{kl}^{vp} R_{j} \bullet$$

$$\tag{32}$$

粘塑性流动法则的形式变为:

$$d_{ij}^{vp} = \gamma \langle \phi(F) \rangle \frac{\partial g(\tau_{ij})}{\partial \tau_{ij}},$$
(33)

其中: $T_{ij} = T_{ij} - \alpha_{ij}$ 为去除屈服面的刚性移动的无旋有效应力•

$$\dot{\tau}_{ij} = MH^{i}(\mathcal{E}_{vp}^{eq})d_{ij}^{vp}, \qquad (34)$$

$$\mathbf{Q} = c(1-M)H^{k}(\mathcal{E}_{vp}^{eq})d_{y}^{vp}, \qquad (35)$$

其中, H^i 和 H^k 分别为等向硬化和移动硬化的塑性模量• *M* 是混合硬化系数, 在完全等向硬化 时, M = 1, $T_i = T_i$ •

本构模型的其余部分均可以沿用前面的公式,只是把相应的变量进行替换,用变形率张量 代替应变率张量,用无旋转的应力张量代替应力张量等•下面给出改动后的公式,相同的符号 代表的意义是和前面相同的,此处不再重复•

屈服面(2)、(5) 变为以下形式:

$$f(\dot{\tau}) = A \frac{J_2}{k_c} + \lambda(\cos 3\theta) \sqrt{J_2} + BkI_1 + h(k)I_1^2 - k_cf_1(p, D, d) = 0,$$
(36)

$$f_{1}(p, D, d) = \left[1 - D + B_{d} \frac{p}{f_{c}}\right] \left[1 + \ln\left[1 + \frac{d^{eq}}{d_{0}}\right]\right], \qquad (37)$$

其中等效变形率 d^{eq} 可以从下式得到:

$$d^{\rm eq} = \sqrt{d_{ij} d_{ij}} \bullet \tag{38}$$

等效塑性变形率 d^{vp}_{eq} 为:

$$d_{\rm eq}^{\rm vp} = \sqrt{d_{ij}^{\rm vp} d_{ij}^{\rm vp}} \bullet$$
(39)

损伤的演化由下式控制:

$$\boldsymbol{D} = \left(\frac{d_{\text{eq}}^{\text{vp}} + d_{kk}^{\text{vp}}}{k} \right) / E_{\text{r}}(\boldsymbol{p}), \tag{40}$$

 $E_r(p)$ 为断裂塑性应变• k和粘塑性Green 应变 E^{vp} 的关系, 由(8)可得:

$$k = k(E^{vp}) = \frac{(2 \sqrt{E_{eq}^{vp} E_{eq}^{vp} |_{max} - E_{eq}^{vp}})}{E_{eq}^{vp} |_{max}} (1 - k_0) + k_0$$
(41)

相应地, 在软化阶段收缩面的控制函数可以写为:

$$f(\dot{\tau}) = A \frac{J_2}{f_c} + \lambda(\cos 3\theta) \sqrt{J_2} + BI_1 - (1 - r)f_c \frac{I_1}{I_1^{\text{trans}}} - f_c f_1(p, D, d) = 0^{\bullet}$$
(42)

r 的定义使用粘塑性 Green 应变表示:

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos \left(\pi \frac{E_{eq}^{vp} E_{eq}^{vp} |_{max} - 1}{E_{eq}^{vp} |_{ult} E_{eq}^{vp} |_{max} - 1} \right)$$
(43)

塑性流动面仍然取为以下的形式:

$$g(\dot{\tau}) = aI_1 + \sqrt{J_2} - c = 0^{\bullet}$$
 (44)

4 结 论

r

本文给出了描述混凝土动态力学行为的粘塑性本构模型的框架,包括塑性硬化和软化阶段,并且分别给出基于实验结果和经验项的模型修正•这些修正合适地应用到模型之中,并根据材料内部的损伤演化,对塑性变形的影响,选择不同的能够反映实验结果的硬化和软化面函数•模型将混凝土的失效和破坏作为连续的过程对待,屈服面和破坏面或者连续扩张,或者连续收缩•这样,对于不同程度的加载,会对材料产生一定的不可逆的粘塑性变形•塑性面的膨胀使用 Drucker_Prager 形式的准则来确定,并在以前的工作中根据实验结果进行校核^[3]•对于泥土、沙石以及水泥砂浆和混凝土等材料,应力状态中的静水压需要根据饱和材料孔洞中的水作校正•因此在下一步的研究中,需要考虑材料含水量等因素的影响•

文中着重讨论小变形和有限变形的区别点,使用 Green_Naghdi 应力率作为客观应力率的 表述• 通过对变形梯度作极分解来使用无旋正交框架,即变形和应力的无旋部分,来表述大变 形的问题• 由于在有限元的刚度矩阵中,所作的弹塑性变量的运算和模型中积分弹粘塑性本 构方程和应力率方程的过程是一致的,模型可以很容易结合到有限元的软件之中,这同样是我 们下一步所面临的工作•

[参考文献]

- Jeremic B, Runesson K. Sture S. Finite deformation analysis of geomaterials [J]. Internat J Numer Anal Methods Geomech, 2001, 25(4): 809-840.
- [2] Ottosen N S. A failure criterion for concrete[J]. J Engineering Mechanics Division, 1979, 105(1): 127-141.
- [3] CHEN Shuyu. Nonlinear elasto_viscoplastic model for concrete subject to impact loading [A]. In: CHIEN Wei_zang Ed the Fourth Internat Conf Nonlinear Mechanics [C]. Shanghai: Shanghai University Press, 2002, 197-199.
- [4] Imran I, Pantazopoulou S J. Plasticity model for concrete under triaxial compression [J]. J Eng Mech, 2001, 127(2): 281-290.
- [5] Lade P V. Effects of voids and volume changes on the behaviour of frictional materials[J]. Internat J Numer Anal Methods Geomech, 1988, 12(3): 351-370.
- [6] 陈书宇. 一种混凝土损伤模型和数值方法[J]. 爆炸与冲击, 1998, 18(4): 349-357.
- [7] Healy B E, Dodds R H. A large strain plasticity model for implicit finite element analyses[J]. Comput Mech, 1992, 10(1):95-112.
- [8] Green A E, Naghdi P M. A general theory of an elastic plastic continuum [J]. Arch Rational Mech Anal, 1965, 18(3): 251-257.
- [9] Arora J S, Dutta A. Explicit and implicit methods for design sensitivity analysis of nonlinear struetures under dynamic loads[J]. Appl Mech Review, 1997, **50**(1):11-19.

Study on Dynamic Constitutive Relations for Concrete With Finite Deformation

CHEN Shu_yu¹, SHEN Cheng_kang², JIN Wu_gen¹

(1. Department of Mechanics and Engineering Science, Fudan University, Shanghai 200433, P. R. China;

2. Institute of Structural Engineering and Disaster Reduction, Tongji University,

Shanghai 200092, P.R. China)

Abstract: The differences between finite deformation and infinitesimal deformation are discussed. They are exercised on elasto_viscoplastic constitutive relations of concrete. Then, a Rate_dependent mechanics model was presented on the basis of Ottosen's four_parameter yield criterion, where different loading surface transferring laws were taken into account, when material was in hardening stage or in softening stage, respectively. The model is well established, so that it can be applied to simulate the response of concrete subject to impact loading. Green_Naghdi stress rate was introduced as objective stress rate. Appropriate hypothesis was postulated in accordance with many experimental results, which could reflect the mechanical behaviour of concrete with large deformation. Available thoughts as well as effective methods are also provided for the research on related engineering problems.

Key words: constitutive model; finite deformation; concrete; strain_rate effect; impact loading