应用数学和力学，第3卷第6期（1982年11月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

关于非协调位移元与杂交应力元的对应性

卞 学 镄

（美国麻省理工学院，1982年7月28日收到）

摘 要

本文阐明了E．L．Wilson[3]等的非协调移位元与卞学镄[2]的杂交应力元之间所存在的对应性．

M．J．Turner 等[1]、卞学镄[2]、E．L．Wilson 等[3]曾分别研究过矩形平面元．M．Frõier 等[4]曾指出：以上学者们所得到的刚度矩阵，其分析形式是完全相同的．Turner 与卞学镄的单元是以同样五个应力参数为出发点的．因之，不难证明这两种方法的对应性．本文拟阐明 Wilson 等的非协调位移元与卞学镄的杂交应力元的对应性．

近来，卞学镄与陈大鹏[5]指出了建立杂交应力元的另一途径．事实说明，由 Hellinger-Reissner 变分原理出发，对应力假设不加约束，但却采用附加内部位移以补行满足应力平衡条件，亦能建立杂交应力元．实际上，这一做法已经把假设位移法与假设应力法联系起来．再者，由 Hellinger-Reissner 变分原理出发，若能恰当地引用充足而又无约束的应力，由此得到的应力分布规律，自然会与该变分原理引用的位移对应．

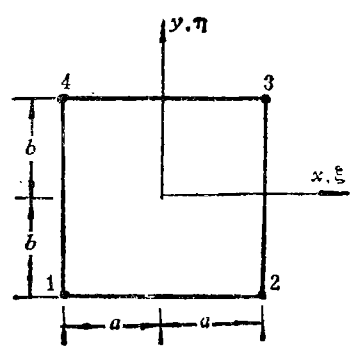

图 1

（图1）示一 $2a\times 2b$ 的矩形单元，其无因次坐标为 $\xi=x/a$，$\eta=y/b$．对此单元，Wilson 等人建议的位移为：

$$\left.\begin{aligned}u&=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)u_i+\lambda_1(1-\xi^2)+\lambda_2(1-\eta^2)\\v&=\frac{1}{4}\sum_{i=1}^{4}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)v_i+\lambda_3(1-\xi^2)+\lambda_4(1-\eta^2)\end{aligned}\right\}\tag{1}$$

式中，u，v 的第一部分为协调位移，而含有 λ_i 的其它部分，即是非协调位移．式（1）亦可写成：

$$\mathbf{u}=\{u,\ v\}=\mathbf{u}_q+\mathbf{u}_\lambda\tag{2}$$

其中，

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{u}_q&=\mathbf{N}\mathbf{q}\\\mathbf{u}_\lambda&=\mathbf{M}\boldsymbol{\lambda}\end{aligned}\right\}\tag{3}$$

且有

q——节点位移，

λ——位移内部参量.

对应的应变 ε_x, ε_y, γ_{xy} 具有线性完整性．由是，若引用 Hellinger-Reissner 变分原理时，采用式（1）的位移函数，且使应力函数具有线性完整性，则所得到的单元将与势能变分原理的结果相同．这里，若单元的边界位移给定为 $\bar{\mathbf{u}}$，则 Hellinger-Reissner 变分原理的泛函为

$$\pi_R=\int_V\left[-\frac{1}{2}\sigma^T s\sigma+\sigma^T(\mathbf{D}\mathbf{u})\right]dV-\int_{\partial V}\mathbf{T}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})ds \tag{4}$$

式中，应变位移关系为

$$\varepsilon=(\mathbf{D}\mathbf{u})$$

而位移函数 u 由式（2）定义．另外，由于 u 与 $\bar{\mathbf{u}}$ 并不协调，故必须引用在边界 ∂V 上含有

$$\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}}=\mathbf{u}_\lambda$$

的积分项．但是，

$$\int_V\sigma^T(\mathbf{D}\mathbf{u}_\lambda)dV=\int_V-(\mathbf{D}^T\sigma)^T\mathbf{u}dV+\int_{\partial V}\mathbf{T}^T(\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}})dV \tag{5}$$

而且，在边界 ∂V 上 $\mathbf{u}-\bar{\mathbf{u}}=\mathbf{u}_\lambda$，从而

$$\pi_R=\int_V\left[-\frac{1}{2}\sigma^T s\sigma+\sigma^T(\mathbf{D}\mathbf{u}_q)-(\mathbf{D}^T\sigma)^T\mathbf{u}_\lambda\right]dV \tag{6}$$

式内，

$$\mathbf{D}^T\sigma=0$$

为齐次平衡方程式；又上式的最后一项系由拉氏乘子导入的约束．

设

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\beta_1+\beta_2\xi+\beta_3\eta\\ \sigma_y&=\beta_4+\beta_5\xi+\beta_6\eta\\ \sigma_{xy}&=\beta_7+\beta_8\xi+\beta_9\eta\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

故有平衡方程式

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial y}&=\frac{1}{a}\beta_2+\frac{1}{b}\beta_9=0\\ \frac{\partial\sigma_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}&=\frac{1}{a}\beta_8+\frac{1}{b}\beta_6=0\end{aligned}\right\} \tag{8}$$

由此，拉氏乘子项为：

$$\begin{aligned}\int_V(\mathbf{D}^T\sigma)^T\mathbf{u}_\lambda dV&=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left\{\left(\frac{1}{a}\beta_2+\frac{1}{b}\beta_9\right)\left[\lambda_1(1-\xi^2)+\lambda_2(1-\eta^2)\right]\right.\\ &\quad\left.+\left(\frac{1}{a}\beta_8+\frac{1}{b}\beta_6\right)\left[\lambda_3(1-\xi^2)+\lambda_4(1-\eta^2)\right]\right\}ab\,d\xi\,d\eta\\ &=\frac{8}{3}ab\left[\left(\frac{1}{a}\beta_2+\frac{1}{b}\beta_9\right)\left(\lambda_1+\lambda_2\right)+\left(\frac{1}{a}\beta_8+\frac{1}{b}\beta_6\right)\left(\lambda_3+\lambda_4\right)\right]\end{aligned} \tag{9}$$

由 $(\partial\pi_R/\partial\lambda)=0$，仅可得出两个方程式，从而有

$$\beta_9=-\frac{b}{a}\beta_2$$

$$\beta_8=-\frac{a}{b}\beta_6$$

但另一方面、却有四个λ，我们希望能得出四个关于参量β的约束方程。

为此，我们来讨论一个略有变形的单元，其坐标为

$$\left.\begin{aligned}x&=a\xi(1+e\eta^2)\\ y&=b\eta\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

式中，e为一个小量。

且有

$$[J]=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial\xi} & \dfrac{\partial y}{\partial\xi}\\[2ex] \dfrac{\partial x}{\partial\eta} & \dfrac{\partial y}{\partial\eta}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(1+e\eta^2) & 0\\[2ex] 2ae\xi\eta & b\end{bmatrix}\tag{11}$$

$$[J]^{-1}=\frac{1}{ab(1+e\eta^2)}\begin{bmatrix}b & 0\\ -2ae\xi\eta & a(1+e\eta^2)\end{bmatrix}\tag{12}$$

平衡方程式

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{ab(1+e\eta^2)}[b\beta_2-2ae\xi\eta\beta_8+a(1+e\eta^2)\beta_9]=0\\ &\frac{1}{ab(1+e\eta^2)}[b\beta_8-2ae\xi\eta\beta_6+a(1+e\eta^2)\beta_6]=0\end{aligned}\right\}\tag{13}$$

有关的拉氏乘子项为：

$$\int_V(\mathbf{D}^T\boldsymbol{\sigma})^T\mathbf{u}_\lambda dV=\frac{8}{3}\left[(b\beta_2+a\beta_9)\lambda_1+\left\{b\beta_2+a\left(1+\frac{1}{5}e\right)\beta_9\right\}\lambda_2\right]$$
$$+\frac{8}{3}\left[(b\beta_8+a\beta_6)\lambda_3+\left\{b\beta_8+a\left(1+\frac{1}{5}e\right)\beta_6\right\}\lambda_4\right]\tag{14}$$

于是，得到四个关于参量β的约束方程式：

$$\left.\begin{aligned}&b\beta_2+a\beta_9=0\\ &b\beta_2+a\left(1+\frac{1}{5}e\right)\beta_9=0\\ &b\beta_8+a\beta_6=0\\ &b\beta_8+a\left(1+\frac{1}{5}e\right)\beta_6=0\end{aligned}\right\}\tag{15}$$

由此得到

$$\beta_2=\beta_6=\beta_8=\beta_9=0$$

此即予期的结果。

对于$2a\times2b\times2c$的8节点正六面体单元，可采用ξ，η，ζ坐标来建立杂交元。这里

$$\xi=x/a$$
$$\eta=y/b$$
$$\zeta=z/c$$

我们已知，若假设应力函数为

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_x &= \beta_1+\beta_2\eta+\beta_3\zeta+\beta_4\eta\zeta\\
\sigma_y &= \beta_5+\beta_6\xi+\beta_7\zeta+\beta_8\xi\zeta\\
\sigma_z &= \beta_9+\beta_{10}\xi+\beta_{11}\eta+\beta_{12}\xi\eta\\
\sigma_{xy} &= \beta_{13}+\beta_{14}\zeta\\
\sigma_{yz} &= \beta_{15}+\beta_{16}\xi\\
\sigma_{xz} &= \beta_{17}+\beta_{18}\eta
\end{aligned}\right\}\tag{16}$$

而位移由下列三线性形函数表示

$$\mathbf{u}=\{u, v, w\}=\frac{1}{8}\sum_{i=1}^{8}(1+\xi_i\xi)(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)\mathbf{u}_i \tag{17}$$

则可以形成性质良好的杂交应力元．为了得到式(17)内的全部位移项，应力函数除含有(16)式的各项外，尚应具有

$$\begin{array}{llll}
\sigma_x: & \xi, & \xi\eta, & \xi\zeta \\
\sigma_y: & \eta, & \xi\eta, & \eta\zeta \\
\sigma_z: & \zeta, & \xi\zeta, & \eta\zeta \\
\sigma_{xy}: & \xi, & \eta, & \xi\zeta, \quad \eta\zeta \\
\sigma_{yz}: & \eta, & \zeta, & \xi\eta, \quad \xi\zeta \\
\sigma_{xz}: & \xi, & \zeta, & \xi\eta, \quad \eta\zeta
\end{array}$$

Wilson等[8]提议用下列附加位移项来建立非协调元：

$$\left.\begin{aligned}
u &= \lambda_1(1-\xi^2)+\lambda_2(1-\eta^2)+\lambda_3(1-\zeta^2)\\
v &= \lambda_4(1-\xi^2)+\lambda_5(1-\eta^2)+\lambda_6(1-\zeta^2)\\
w &= \lambda_7(1-\xi^2)+\lambda_8(1-\eta^2)+\lambda_9(1-\zeta^2)
\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

显然，要消去前文提到的21个赘余应力项，这些位移项还不够用．我们希望能有一个合适的、由21个非协调位移项构成的位移集合，如把此集合附加到式(17)的位移上，即能和式(16)的杂交应力元产生同样的刚度矩阵．事实上，此种位移集合并不存在．

参 考 文 献

1. Turner, M. J., R. J. Clough, H. C. Martin, Jr. and L. J. Topp, 复合结构的刚度分析与挠度分析, *J. Aero. Sci.*, 23, (1956), 805—823.
2. Pian, T. H. H., (卞学鐄), 由假设应力分布规律出发建立单元刚度矩阵, *AIAA Journal*, 2, (1964), 1333—1336.
3. Wilson, E. L., R. L. Taylor, W. Doherty and J. Ghaboussi, 非协调位移模型, *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, S. J. Fenves et al (Eds.), Academic Press, (1973), 43—57.
4. Fröier, M., L. Nilsson and A. Samuelsson, 对 Turner, 卞学鐄, Wilson 矩形平面元的看法, *Int. J. Num. Math. Eng.*, 8, (1974), 433—437.
5. 卞学鐄, 陈大鹏, 建立杂交应力元的另一途径, 即将在 *Int. J. Num. Math. Eng.* 发表.
6. Fraeijs de Veubeke, B. M., 有限元方法中的位移模型与平衡模型, 载 *Stress Analysis*, O. C. Zienkiewicz 与 G. S. Hollister(Eds.), Wiley, (1965), 145—197.

On the Equivalence of Non-Conforming Element and Hybrid Stress Element

Theodore Hsueh-huang Pian

(Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, Mass., U. S. A.)

Abstract

This paper is to show that the non-conforming element by Wilson[3] et al and the hybrid stress element by Pian[2] are equivalent.