

两层流体界面上的孤立波

戴世强

(中国科学院力学研究所, 1982年2月1日收到)

摘 要

本文讨论两水平固壁间两层不可压无粘流体界面上的孤立波, 计及界面上的表面张力效应. 首先建立了适用于这种模型的基本方程组, 并在弱色散近似下应用约化摄动法, 导得了一阶界面升高所满足的 Korteweg-de Vries 方程, 指出了按该方程系数 α 和 μ 的符号的异同. KdV 孤立波可能凸向上或凸向下. 然后详细讨论了原有近似下非线性效应与色散效应不能平衡的两种临界情形. 在采用了适当的近似之后, 对第一种临界情形 ($\alpha=0$) 得到了修正的 KdV 方程, 并指出, 在所考虑的情形中, 当 $\mu>0$ 时孤立波不存在, 当 $\mu<0$ 时, 孤立波仍可能存在, 其形式与 KdV 孤立波不同; 对第二种临界情形 ($\mu=0$), 导得了推广的 KdV 方程, 这时存在振荡型孤立波. 文中还对近临界情形作了讨论. 本文结果与一些经典结果完全一致, 并把它们作了推广.

一、引 言

近年来, 由于海洋科学、大气科学等方面的需要, 内孤立波引起了广泛的注意 (参看文献 [1]—[3] 的评述). 对于内孤立波的简单模型——两层流体界面上的孤立波, 已有许多人作了研究, Keulegan^[4] 首先考虑了两水平固壁间密度略有间断的两层流体界面上的孤立波, Long^[5] 把他的结果推广到上下两层流体密度比 σ ($\sigma<1$) 为任意的情形, 他们都采用了 Boussinesq 的方法. Benjamin^[6] 利用积分方程法重新处理了这一问题. Perters and Stoker^[7] 和 Kakutani and Yamasaki^[8] 等人讨论了上边界面为自由面的情形.

本文在弱色散近似下重新系统研究了 Long 所提出的模型, 其中还计及了表面张力效应. 首先建立适于讨论这一模型的基本方程组, 然后在 Boussinesq 假定下, 采用约化摄动法^{[9][10]}, 导出了一阶界面升高所满足的 KdV 方程, 并发现当上下两层流体的密度比 σ 、深度比 r 和无量纲表面张力系数 T 取不同的值时, KdV 方程非线性项的系数 α 和色散项的系数 μ 的符号会有变化, 当 α, μ 为同号时, KdV 孤立波凸向上, 当 α, μ 异号时, 则凸向下. 在

$$r=r_1=\sqrt{\sigma} \quad (1.1)$$

的情况下, $\alpha=0$, 我们称此为第一种临界情形; 在

$$r=r_2=\frac{1}{2\sigma(1-\sigma)}[\sqrt{(1-\sigma-3T)^2+12T\sigma^2(1-\sigma)}-(1-\sigma-3T)] \quad (1.2)$$

的情况下, $\mu=0$, 我们称此为第二种临界情形. 在这两种临界情形中, 若继续采用 Boussinesq 假定, 亦即 Ursell 数 $U=O(1)$ 的假定, 非线性效应与色散效应就不再平衡, 因而不会出现 KdV 孤立波. 那么是否有可能存在其它形式的孤立波呢? 经采取其它适当的近似, 对上述两

种效应的大小加以调整,我们对第一种临界情形导出了修正的 KdV 方程,并得出结论:在无穷远处流体静止的条件下,当 $\mu > 0$ (即 $r_1 > r_2$) 时不存在孤立波,当 $\mu < 0$ (即 $r_1 < r_2$) 时仍存在孤立波,波形取 Sech 形式;对于 $r \approx r_1$ 的近临界情形导出了 KdV 方程和修正的 KdV 方程的混合形式,有可能出现另一种形状的孤立波解.在第二种临界情形下,我们导出了推广的 KdV 方程,其中五阶色散项代替了三阶色散项,这时存在振荡型孤立波;在 $r \approx r_2$ 的近临界情形下,导出了兼有三阶和五阶色散项的推广的 KdV 方程,这时可能出现寻常的孤立波,也可能出现振荡型孤立波,取决于三阶色散项与五阶色散项的相对大小.

必须指出,第一种临界深度比 $r_1 = \sqrt{\sigma}$ 可由 Long^[6] 和 Benjamin^[6] 的结果导出,但他们没有讨论过临界情形.对单层流体,桥本英典^[11] 导出过类似于本文(5.14)的方程,但他未曾发表过推导过程,他的方程用本文的方法很容易导出.

二、基本方程

我们讨论两层不可溶混流体在两水平固壁间的不可压无旋无粘流动,所考虑的位形如图 1 所示,它处于静力学稳定状态,即 $\sigma = \rho_2/\rho_1 < 1$, ρ_1 和 ρ_2 为下层和上层流体的密度,并假设无穷远处流体是静止的.为简单起见,仅考虑二维情形.

引进上、下层流体的速度势 φ 、 Φ , 设界面的方程为 $z = \xi(x, t)$, 可得熟知的控制方程和边界条件.以下层流体深度 h_1 为特征长度、

$\sqrt{gh_1}$ 为特征速度 (g 为重力加速度)、 $\sqrt{h_1/g}$ 为特征时间对它们进行无量纲化,并保持原来的记号,得到方程

$$\varphi_{xx} + \varphi_{zz} = 0 \quad r = \frac{h_2}{h_1} > z > \xi \quad (2.1)$$

$$\Phi_{xx} + \Phi_{zz} = 0 \quad \xi > z > -1 \quad (2.2)$$

固壁上的边界条件

$$\varphi_z = 0 \quad z = r \quad (2.3)$$

$$\Phi_z = 0 \quad z = -1 \quad (2.4)$$

以及界面上的衔接条件

$$\left. \begin{aligned} \varphi_z &= \xi_x + \varphi_x \xi_x \\ \Phi_z &= \xi_x + \Phi_x \xi_x \\ \left\{ \Phi_x + \frac{1}{2} (\Phi_x^2 + \Phi_z^2) + \xi \right\} - \sigma \left\{ \varphi_x + \frac{1}{2} (\varphi_x^2 + \varphi_z^2) + \xi \right\} \\ -T \xi_{xx} / (1 + \xi_x^2)^{3/2} &= 0 \end{aligned} \right\} z = \xi \quad (2.5)$$

其中, T 为表面张力系数,已用特征量 $\rho_1 gh_1^2$ 无量纲化了.

采用类似于单层流体情形的做法(参看[12] § 13.11),作如下展开:

$$\varphi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z-r)^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n} \psi}{\partial x^{2n}} \quad (2.6)$$

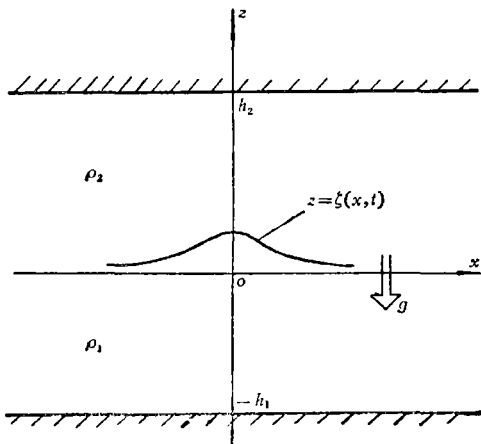


图 1

$$\Phi = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(z+1)^{2n}}{(2n)!} \frac{\partial^{2n}\Psi}{\partial x^{2n}} \quad (2.7)$$

其中, ψ 和 Ψ 为上、下面壁上的速度势, 即

$$\psi(x, t) = \varphi(x, r, t), \quad \Psi(x, t) = \Phi(x, -1, t) \quad (2.8)$$

容易验证, (2.6)、(2.7)中的 φ 和 Φ 分别满足(2.1)–(2.4), 把它们代入(2.5), 并引进沿固壁的水平速度

$$w = \psi_x(x, t), \quad W = \Psi_x(x, t) \quad (2.9)$$

我们得到基本方程

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\xi+1)W + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\xi+1)^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n}W}{\partial x^{2n}}] = 0 \quad (2.10)$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} [(\xi-r)w + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\xi-r)^{2n+1}}{(2n+1)!} \frac{\partial^{2n}w}{\partial x^{2n}}] = 0 \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\xi + \frac{1}{2}W^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\xi+1)^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{\partial^{2n}W}{\partial t \partial x^{2n-1}} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2n} (-1)^m \binom{2n}{m} \frac{\partial^m W}{\partial x^m} \frac{\partial^{2n-m}W}{\partial x^{2n-m}} \right) \right] \right\} - \sigma \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left[\xi + \frac{1}{2}w^2 \right. \right. \\ & \quad \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(\xi-r)^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{\partial^{2n}w}{\partial t \partial x^{2n-1}} + \frac{1}{2} \sum_{m=0}^{2n} (-1)^m \binom{2n}{m} \frac{\partial^m w}{\partial x^m} \frac{\partial^{2n-m}w}{\partial x^{2n-m}} \right) \right] \right\} \\ & - T \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n+1)!}{2^n (n-1)!} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{2n} \right] = 0 \quad (2.12) \end{aligned}$$

方程(2.10)–(2.12)适宜于作各种摄动展开, 是下面讨论的出发点. 容易看到, 上述方程中若只保留一阶导数线性项, 则有

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial W}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial \xi}{\partial t} - r \frac{\partial w}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial W}{\partial t} - \sigma \frac{\partial w}{\partial t} + (1-\sigma) \frac{\partial \xi}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

这是描述两层流体界面上线性重力波的方程, 相应的波速 (本征值) 为 $\pm c, 0$, 其中

$$c = \sqrt{\frac{(1-\sigma)r}{\sigma+r}} \quad (2.14)$$

三、KdV 孤立波解

现在我们采用 Boussinesq 浅水波假定 (参看[13]) 和弱色散近似, 借助于约化摄动法,

来寻求方程(2.10)–(2.12)的孤立波解. 设波的振幅为 A 、波长为 λ , 引进小参数 $\varepsilon = O(A/h_1)$, 其中 $0 < \varepsilon \ll 1$, 并假设 $\lambda/h_1 = O(\varepsilon^{-1/2})$, 即假设 Ursell 数 $U_r = A\lambda^2/h_1^3 = O(1)$. 引进 Gardner-Morikawa 变换^[9]

$$\xi = \varepsilon^{1/2}(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^{3/2}t \quad (3.1)$$

令列向量 U 为

$$U(\xi, \tau) = \begin{pmatrix} \zeta \\ W \\ w \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

作展开

$$U = \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^2 U^{(2)} + \dots = \varepsilon \begin{pmatrix} \zeta^{(1)} \\ W^{(1)} \\ w^{(1)} \end{pmatrix} + \varepsilon^2 \begin{pmatrix} \zeta^{(2)} \\ W^{(2)} \\ w^{(2)} \end{pmatrix} + \dots \quad (3.3)$$

把(3.1)和(3.3)代入(2.10)–(2.12), 取到 $O(\varepsilon^{3/2})$, 得

$$M_0 \frac{\partial U^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \quad (3.4)$$

其中

$$M_0 = \begin{pmatrix} -c & 1 & 0 \\ -c & 0 & -r \\ 1 - \sigma & -c & \sigma c \end{pmatrix} \quad (3.5)$$

本征值 c 由(2.14)给出, 对应的左右本征向量为 L, R , 分别取作

$$L = \left(1, \frac{\sigma}{r}, \frac{1}{c} \right), \quad R = \begin{pmatrix} 1 \\ c \\ -\frac{c}{r} \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

于是可把(3.4)的解写成

$$U^{(1)} = \zeta^{(1)}(\xi, \tau) R \quad (3.7)$$

这里利用了无穷远处流体静止的假定.

由 $\varepsilon^{5/2}$ 阶的方程以及(3.6)、(3.7)得到

$$M_0 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi} + S_1 \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \tau} + S_2 \zeta^{(1)} \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \xi} + S_3 \frac{\partial^3 \zeta^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.8)$$

其中

$$S_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \left(1 + \frac{\sigma}{r}\right)c \end{pmatrix}, \quad S_2 = \begin{pmatrix} 2c \\ -\frac{2c}{r} \\ \left(1 - \frac{\sigma}{r^2}\right)c^2 \end{pmatrix}, \quad S_3 = \begin{pmatrix} -\frac{c}{6} \\ -\frac{cr^2}{6} \\ \frac{1}{2}(1 + \sigma r)c^2 - T \end{pmatrix} \quad (3.9)$$

以 L 左乘(3.8), 得到(3.8)的可解性条件

$$\frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \tau} + a \zeta^{(1)} \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial^3 \zeta^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (3.10)$$

其中

$$\alpha = \frac{LS_2}{LS_1} = \frac{3c}{2} \frac{r^2 - \sigma}{r(\sigma + r)} \quad (3.11)$$

$$\mu = \frac{LS_2}{LS_1} = \frac{r}{6c(\sigma + r)} [c^2(1 + \sigma r) - 3T] \quad (3.12)$$

当 $\alpha \neq 0$ 且 $\mu \neq 0$ 时, (3.10) 为经典的 KdV 方程, 当 $\sigma = 0$ 时,

$$\alpha = \frac{3}{2}, \quad \mu = \frac{1}{6}(1 - 3T) \quad (3.13)$$

正是单层流体的情形^[2].

容易看到, KdV 方程 (3.10) 有稳恒孤立波解

$$\xi^{(1)} = a \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\alpha a}{12\mu}} \left(\xi - \frac{\alpha a}{3} \tau \right) \right\} \quad (3.14)$$

其中, 根据前面的假定, $a = O(1)$. 由 (3.14) 可见, 当 $\alpha\mu > 0$ 时, 应有 $a > 0$, 孤立波为凸向上的; 当 $\alpha\mu < 0$ 时, 应有 $a < 0$, 孤立波为凸向下的. 不计表面张力时, 恒有 $\mu > 0$, 因而, 若 $\alpha > 0$, 即 $r > r_1 = \sqrt{\sigma}$, 则孤立波凸向上; 若 $\alpha < 0$, 即 $r < r_1$, 则孤立波凸向下, 与经典结果一致^{[6][10]}. 代回原变数, 得到界面的一阶升高

$$Z^{(1)} = \varepsilon a \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\alpha \varepsilon a}{12\mu}} \left[x - \left(c + \frac{\alpha \varepsilon}{3} \right) t \right] \right\} \quad (3.15)$$

因此, 一阶近似下, 界面孤立波的传播速度为

$$c_1 = c + \frac{\alpha a}{3} \varepsilon \quad (3.16)$$

与 Long^[6]的结果一致.

如果 $\alpha = 0$ 或 $\mu = 0$, 则上述方法失效. 下面对这两种临界情形分别予以讨论.

四、第一种临界情形: $\alpha = 0$

先考察 $\alpha = 0$ 的情形. 如前所述, 若

$$r = r_1 = \sqrt{\sigma} \quad (4.1)$$

则有 $\alpha = LS_2 = 0$ (4.2)

我们称 r_1 为第一种临界深度比, $r_1 \propto \sigma$ 曲线如图 2 所示. 这时, 在上节所采取的近似下, 非线性效应太弱, 不足以与色散效应相平衡, 因此, 我们在保持波幅量级不变的情况下, 考虑波长较大的波, 亦即假设 $A/h_1 = O(\varepsilon)$, $\lambda/h_1 = O(\varepsilon^{-1})$, 这意味着 $U_1 = O(\varepsilon^{-1})$. 于是, 我们采用如下的 Gardner-Morikawa 变换:

$$\xi = \varepsilon(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^2 t \quad (4.3)$$

对 U 仍作展开 (3.3), 把 (3.3)、(4.3) 代入基本方程 (2.10) — (2.12), 对 ε^2 阶, 仍有

$$M_0 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi} = 0, \quad U^{(1)} = \xi^{(1)}(\xi, \tau) R \quad (4.4)$$

对 ε^3 阶, 有

$$M_0 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi} + S_2 \xi^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \xi} = 0 \quad (4.5)$$

鉴于(4.2), 方程(4.5)的可解性条件自动满足, 其通解为

$$U^{(2)} = \xi^{(2)}(\xi, \tau)R + [\xi^{(1)}]^2 R_1 \quad (4.6)$$

其中

$$R_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ -\frac{c}{r^2} \end{pmatrix} \quad (4.7)$$

由 ε^4 阶方程以及(4.6)、(4.7), 得到

$$M_0 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi} + S_1 \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \tau} + S_2 [\xi^{(1)}]^2 \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \xi} + S_2 \frac{\partial}{\partial \xi} (\xi^{(1)} \xi^{(2)}) + S_3 \frac{\partial^3 \xi^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (4.8)$$

其中, S_1, S_2, S_3 , 由(3.9)中代入 $r = r = \sqrt{\sigma}$ 得到, 而

$$S_i = \begin{pmatrix} -3c \\ -\frac{3c}{r_1} \\ -3c^2 \left(1 + \frac{\sigma}{r_1^2}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3\sqrt{1-\sqrt{\sigma}} \\ -\frac{3}{\sqrt{\sigma}}\sqrt{1-\sqrt{\sigma}} \\ -3(1-\sqrt{\sigma}) \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\right) \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

以 L 左乘(4.8), 利用(4.2), 得到修正的 KdV 方程

$$\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \tau} + \alpha' [\xi^{(1)}]^2 \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial^3 \xi^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (4.10)$$

式中

$$\alpha' = -\frac{3c}{\sqrt{\sigma}} = -3\sqrt{\frac{1-\sqrt{\sigma}}{\sigma}} \quad (4.11)$$

$$\mu = \frac{1}{6(1-\sigma)} [(1-\sqrt{\sigma})(1+\sigma^{3/2}) - 3T] \quad (4.12)$$

显而易见, $\alpha' < 0$; 而当

$$3T < (1-\sqrt{\sigma})(1+\sigma^{3/2}) \quad (4.13)$$

时, $\mu > 0$; 当

$$3T > (1-\sqrt{\sigma})(1+\sigma^{3/2}) \quad (4.14)$$

时, $\mu < 0$. 如所周知⁽⁸⁾⁽¹⁴⁾, 当(4.13)成立时, 对于无穷远处流体静止的情形, (4.10)没有孤立波解; 当(4.14)成立时, (4.10)有如下的孤立波解

$$\xi^{(1)} = a \operatorname{sech} \left[\sqrt{\frac{a^2 \alpha'}{6\mu}} \left(\xi - \frac{a^2 \alpha'}{6} \tau \right) \right] \quad (4.15)$$

这种孤立波的振幅可正可负, 因而可以是凸向上的, 也可以是凸向下的, 由初始条件决定. 代回原变数, 得界面的一阶升高为

$$Z^{(1)} = \varepsilon a \operatorname{sech} \left\{ \sqrt{\frac{\varepsilon^2 a^2 \alpha'}{6\mu}} \left[x - \left(c + \frac{\alpha' \varepsilon^2 a^2}{6} \right) t \right] \right\} \quad (4.16)$$

因此在一阶近似下, 孤立波的传播速度为

$$c_1 = c + \frac{\alpha'}{6} a^2 \varepsilon^2 \quad (4.17)$$

与 KdV 孤立波(3.15)相比, 振幅相同的情况下, 孤立波(4.16)要平坦一些. 由上述分析可见, 表面张力所产生的色散效应对临界孤立波的存在起了重要作用.

下面考察深度比接近于第一种临界深度比(即 $r \approx r_1$) 的情形. 设

$$r - r_1 = \varepsilon \delta_1, \quad \delta_1 = O(1) \tag{4.18}$$

采用与前面相类似的步骤, 得到 $\xi^{(1)}$ 应满足的方程

$$\frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \tau} + \alpha_1 \xi^{(1)} \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \xi} + \alpha' [\xi^{(1)}]^2 \frac{\partial \xi^{(1)}}{\partial \xi} + \mu \frac{\partial^3 \xi^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \tag{4.19}$$

其中 α' 和 μ 仍由(4.11)、(4.12)给出, 而 α_1 为

$$\alpha_1 = \delta_1 \left(\frac{\partial \alpha}{\partial r} \right)_{r=r_1} = \delta_1 \frac{3\sqrt{1-\sqrt{\sigma}}}{\sqrt{\sigma} + \sigma} \tag{4.20}$$

方程(4.19)具有 KdV 方程与修正的 KdV 方程的混合形式. 显然, $|\alpha_1|$ 与 $|\alpha'|$ 的量级相同, α_1 与 δ_1 的符号相同. 容易证实, (4.19) 有如下的孤立波解^[8]

$$\xi^{(1)} = \frac{a \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{4\mu}} (\xi - \lambda\tau) \right\}}{1 + \frac{a}{a + \frac{2\alpha_1}{\alpha'}} \tanh^2 \left\{ \sqrt{\frac{\lambda}{4\mu}} (\xi - \lambda\tau) \right\}} \tag{4.21}$$

其中,

$$\lambda = \frac{a\alpha'}{6} \left(a + \frac{2\alpha_1}{\alpha'} \right) \tag{4.22}$$

随着 α_1, μ 的符号的变化, (4.21) 中的 a 可取表 1 中的值. 由此可见, 在第一种临界深度比附近, 当 $\mu > 0$ 时, $r > r_1$, $r = r_1$ 和 $r < r_1$ 分别对应于凸向上的、零振幅的和凸向下的孤立波;

表 1

α_1	μ	a	孤立波指向
$+(r > r_1)$	$+(r_1 > r_2)$	$(0, -\alpha_1/\alpha')$	凸向上
$-(r < r_1)$	$+(r_1 > r_2)$	$(-\alpha_1/\alpha', 0)$	凸向下
$+(r > r_1)$	$-(r_1 < r_2)$	$a > -2\alpha_1/\alpha' > 0$ 或 $a < 0$	凸向上或凸向下
$-(r < r_1)$	$-(r_1 < r_2)$	$a < -2\alpha_1/\alpha' < 0$ 或 $a > 0$	凸向下或凸向上

当 $\mu < 0$ 时, 则可能存在凸向上或凸向下的孤立波, 视初始条件而定.

五、第二种临界情形: $\mu = 0$

最后, 我们来考察一下第二种临界情形. 由 μ 的表达式(3.12)可见, 仅当计及表面张力时才会出现这种情形, 而在某些场合下, 表面张力确是不可忽略的(例如参看文献[15]). 由

$$\mu = LS_3 = 0 \tag{5.1}$$

解得 ($\sigma \neq 0$ 或 1)

$$r_2 = \frac{1}{2\sigma(1-\sigma)} [\sqrt{(1-\sigma-3T)^2 + 12T\sigma^2(1-\sigma)} - (1-\sigma-3T)] \tag{5.2}$$

我们称 r_2 为第二种临界深度比, 对几种不同的 T 值, $r_2 \propto \sigma$ 的曲线如图 2 所示. 当 $r = r_2, \mu = 0$ 时, 在 Boussinesq 假定下, 色散效应不足以与非线性效应相平衡, 因此需要考虑波长较短的波. 在 $A/h_1 = O(\varepsilon)$ 的假定下, 假设 $\lambda/h_1 = O(\varepsilon^{-1/4})$, 这意味着 Ursell 数 $U_r = O(\varepsilon^{1/2})$. 引此

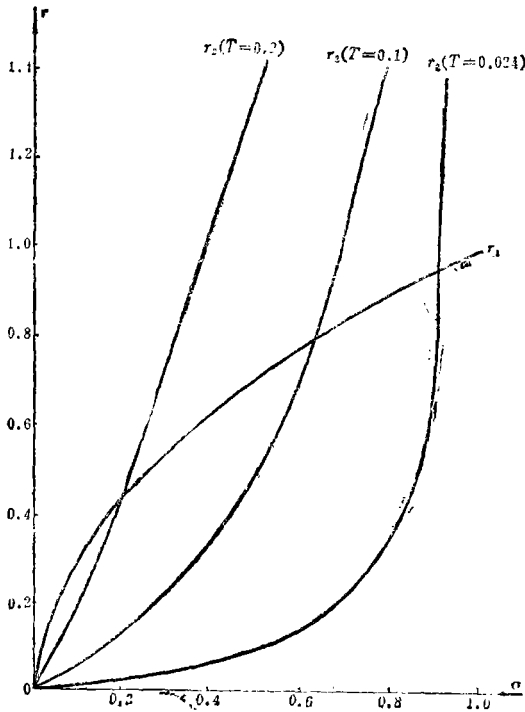


图 2

如下的 Gardner-Morikawa 变换

$$\xi = \varepsilon^{1/4}(x - ct), \quad \tau = \varepsilon^{5/4}t \quad (5.3)$$

作展开

$$U = \varepsilon U^{(1)} + \varepsilon^{3/2} U^{(2)} + \varepsilon^2 U^{(3)} + \dots \quad (5.4)$$

采取与前面类似的步骤, 由 $\varepsilon^{5/4}$ 阶的方程得到

$$U^{(1)} = \zeta^{(1)}(\xi, \tau) R \quad (5.5)$$

取到 $O(\varepsilon^{7/4})$, 有

$$M_0 \frac{\partial U^{(2)}}{\partial \xi} + S_3 \frac{\partial^3 \zeta^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (5.6)$$

根据 (5.1), 方程 (5.6) 的可解性条件自动满足, 从而解得

$$U^{(2)} = \zeta^{(2)} R + \frac{\partial^2 \zeta^{(1)}}{\partial \xi^2} R_2 \quad (5.7)$$

其中

$$R_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{c}{6} \\ -\frac{c}{6} r_2 \end{pmatrix}, \quad c = \sqrt{\frac{3T}{1 + \sigma r_2}} \quad (5.8)$$

由 $\varepsilon^{9/4}$ 阶的方程得到

$$M_0 \frac{\partial U^{(3)}}{\partial \xi} + S_1 \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \tau} + S_2 \zeta^{(1)} \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \xi} + S_3 \frac{\partial^3 \zeta^{(2)}}{\partial \xi^3} + S_4 \frac{\partial^5 \zeta^{(1)}}{\partial \xi^5} = 0 \quad (5.9)$$

其中, S_1, S_2, S_3 由 (3.9) 中取 $r = r_2$ 得到, 而 S_4 为

$$S_4 = \begin{pmatrix} -\frac{7}{360}c \\ -\frac{7}{360}cr_2 \\ \frac{1}{24}c^2(1 + \sigma r_2^3) \end{pmatrix}, \quad c = \sqrt{\frac{3T}{1 + \sigma r_2}} \quad (5.10)$$

由 (5.9) 的可解性条件得到推广的 KdV 方程

$$\frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \tau} + \alpha \zeta^{(1)} \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \xi} + \nu \frac{\partial^3 \zeta^{(1)}}{\partial \xi^3} = 0 \quad (5.11)$$

其中 α 由 (3.11) 给出 (取 $r = r_2$), 而

$$\nu = \frac{c}{90} \frac{r_2(1 + \sigma r_2^3)}{\sigma + r_2} \quad (5.12)$$

显见, $\nu > 0$.

对于近临界情形 $r \approx r_2$, 设

$$r - r_2 = \delta_2 e^{1/2}, \quad \delta_2 = O(1) \quad (5.13)$$

可类似地导得推广的 KdV 方程

$$\frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \tau} + \alpha \zeta^{(1)} \frac{\partial \zeta^{(1)}}{\partial \xi} + \mu_2 \frac{\partial^3 \zeta^{(1)}}{\partial \xi^3} + \nu \frac{\partial^5 \zeta^{(1)}}{\partial \xi^5} = 0 \quad (5.14)$$

其中

$$\mu_2 = \delta_2 \left[\frac{\partial \mu}{\partial r} \right]_{r=r_2} = \frac{\delta_2 r_2}{6c(\sigma+r_2)^2} [2\sigma(1-\sigma)r_2 + (1-\sigma-3T)] \quad (5.15)$$

方程(5.14)中兼有三阶和五阶色散项。很明显， μ_2 与 δ_2 同号，而方程(5.11)为(5.14)的特殊形式。这类方程最早由 Kakutani 和 Ono^[16] 在研究无碰撞冷等离子体中磁声波的传播时得到。桥本英典^[11] 对于单层流体情形给出过类似于(5.14)的方程，但他没有发表过推导过程。利用本节的方法很容易得到他的方程。

求方程(5.11)或(5.14)的解析解是困难的，Kawahara^[17] 通过数值求解发现，方程(5.11)有振荡型孤立波解(参看图3)，而方程(5.14)则可能存在寻常的“单调”孤立波解或振荡型孤立波解，取决于三阶和五阶色散项系数的相对大小，求解过程可参阅文献[17]。

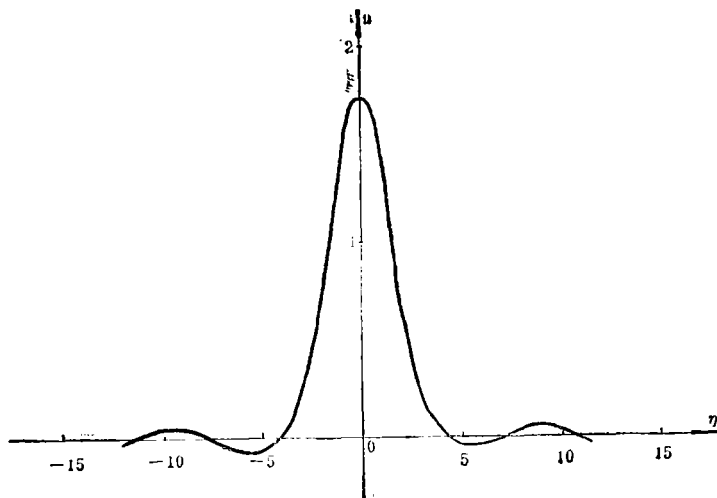


图 3

现在考虑一个特殊情形。取文献[15]中的参数： $\sigma=0.784$ ， $T=0.024$ ，从而有 $r_1=0.885$ ， $r_2=0.292$ ， $c=0.242$ ，对于临界情形来说，令 $\alpha = \frac{3}{2} \alpha_2$ ，算得 $\alpha_2 = -0.539$ ， $\nu = 7.44 \times 10^{-4}$ ，一阶界面升高为

$$Z^{(1)} = \varepsilon a u \left\{ \sqrt{\frac{|\alpha_2 \varepsilon a|}{\nu}} [x - (c - \alpha_2 a \varepsilon) t] \right\} \quad (5.16)$$

其中， $u = u(\eta)$ 如图3所示。这种振荡型孤立波的传播速度为

$$c_2 = c - \alpha_2 a \varepsilon \quad (5.17)$$

换算到物理坐标，主峰宽度约为

$$b = (\varepsilon a)^{-\frac{1}{2}} h_1 \quad (5.18)$$

由此可见，与振幅相同的 KdV 孤立波相比，这种孤立波要窄一些。

六、讨 论

从本文的分析可以看到：

(1) 界面孤立波是一种普遍存在的现象,即使在临界情形下,仍可能出现各种孤立波.目前已在大气、海洋、湖泊和实验室中观测到了包括界面孤立波在内的各种孤立波(参看文献[1]—[3]),值得对它们作进一步研究.

(2) 本文所讨论的临界情形和近临界情形可能在实践中遇到,这时观测到的孤立波可望与 KdV 孤立波有所区别. Walker^[15] 在实验中发现孤立波窄于理论值,波速大于理论值,作者猜测,这可能是由第二种近临界效应引起的;由于本文的模型与 Walker 的实验略有区别,在定量证实方面有待于进一步考察.

(3) 约化摄动法在处理弱非线性波时有很大的灵活性,采用适当的坐标变形和摄动展开后,可讨论各种特定的问题.

(4) 本文的基本方程和方法可用来研究界面孤立波的高阶近似和它们的相互作用,详见另文.

(5) 当 α 和 μ 同时为零,即 $r=r_1=r_2$ 时,可类似于前面进行讨论,但这种情形较为罕见,本文不予赘述.

对于谈镐生教授的鼓励和指导,作者深表谢意.在1981年科学院主办的《流体力学与应用数学》讲习班上,作者曾得到易家训、吴耀祖、梅强中教授的启示和引导,谨向他们致谢.

参 考 文 献

1. Yih, C. S., *Stratified Flow*, Chap. 3., Academic Press, New York (1980) 或易家训(李家春整理), 分层流, 《流体力学与应用数学讲座》之一, 科学出版社(1982).
2. Miles, J. W., Solitary waves, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 12(1980), 11—43.
3. Miles, J. W., On internal solitary waves, *Tellus*, 31(1979), 456—462.
4. Keulegan, G. H., Characteristics of internal solitary waves, *J. Res. Natl. Bur. Stand.*, 51(1953), 133—140.
5. Long, R. R., Solitary waves in one-and two-fluid systems, *Tellus*, 8(1956), 460—471.
6. Benjamin, T. B., Internal waves of finite amplitude and permanent form, *J. Fluid Mech.*, 25(1966), 241—270.
7. Perters, A. S. and J. J. Stoker, Solitary waves in liquid having nonconstant density, *Comm. Pure Appl. Math.*, 13(1960), 115—164.
8. Kakutani, T. and N. Yamasaki, Solitary waves on a two-layer fluid, *J. Phys. Soc. Japan*, 45(1978), 674—679.
9. 戴世强, 约化摄动法和非线性波远场分析, 力学进展, 12(1982).
10. Taniuti, T., et al, Reductive Perturbation Method for Nonlinear Wave Propagation, *Suppl. Progr. Theor. Phys.*, 55(1974), 1—306.
11. 桥本英典, 水の波——えの分散と集まり, 科学, 40(1970), 401—408.
12. Whitham, G. B., *Linear and Nonlinear Waves*, Chap. 13., Wiley-Interscience, New York(1974).
13. Mei, C. C., *The Applied Dynamics of Ocean Surface Waves*, Chap. 11., Wiley-Interscience, New York (1982) 或梅强中(戴世强、周显初整理), 水波动力学, 第七章, 《流体力学与应用数学讲座》之二, 科学出版社(1982).
14. Jeffrey, A. and T. Kakutani, Weak nonlinear waves: a discussion centered around

- the Korteweg-de Vries equation, *SIAM Rev.*, 14(1972), 582—643.
15. Walker, L. R., Interfacial solitary waves in a two-fluid medium, *Phys. Fluids*, 16 (1973), 1794—1804.
16. Kakutani, T. and H. Ono, Weak nonlinear hydromagnetic waves in a cold collision-free plasma, *J. Phys. Soc. Japan*, 26(1969), 1305—1318.
17. Kawahara, T., Oscillatory solitary waves in dispersive media, *J. Phys. Soc. Japan*, 33(1972), 260—264.

Solitary Waves at the Interface of a Two-Layer Fluid

Dai Shi-qi

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

Abstract

In this paper, we discuss the solitary waves at the interface of a two-layer incompressible inviscid fluid confined by two horizontal rigid walls, taking the effect of surface tension into account. First we establish the basic equations suitable for the model considered, and hence we derive the Korteweg-de Vries equation satisfied by the first-order elevation of the interface with the aid of the reductive perturbation method under the approximation of weak dispersion. It is found that the KdV solitary waves may be convex upward or downward, according to the signs of the coefficients α and μ of the KdV equation are the same or not. Then we examine in detail two critical cases, in which the nonlinear effect and dispersion effect could not balance under the original approximation. Applying other appropriate approximation, we obtain the modified KdV equation for the critical case of first kind ($\alpha=0$), and conclude that solitary waves can not exist in the considered case as $\mu>0$, but may still occur as $\mu<0$, being in the form other than the KdV ones. As for the critical case of second kind ($\mu=0$), we deduce the generalized KdV equation, for which a kind of oscillatory solitary waves may occur. In addition, we discuss briefly the near-critical cases. The conclusions in this paper are in good agreement with some classical results which are extended considerably.