小参数常微分方程的有限元格式

吴 启 光

（南京大学数学系，1982年2月10日收到）

摘 要

在这篇短文中作者构造了特殊的有限元格式，研究了此格式的收敛性。

一、微分方程问题和有限元格式的构造

考虑下列二阶微分方程边值问题

$$Lu \equiv \varepsilon u''(x)+au'(x)=f(x) \qquad x\in(0,1) \tag{1.1}$$

$$u(0)=0,\ u(1)=0 \tag{1.2}$$

其中 $a>0$，参数 ε 假定满足 $0<\varepsilon\ll 1$．

当 $\varepsilon=0$ 时，方程(1.1)退化为

$$au'(x)=f(x) \tag{1.3}$$

取步长 h 和自然数 M 使得 $Mh=1$．令 $I_i=[x_{i-1},x_i]$．对于每一个 $\varepsilon>0$ 确定唯一的参数 $\theta=\theta(\varepsilon)$ 满足

$$0\leqslant\theta\leqslant 1,\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\theta=1,\qquad \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{a\theta h}{2\varepsilon}=1 \tag{1.4}$$

于是对每一个子区间 I 我们有：

$$I_i^-=[x_{i-1},x_{i-\theta}],\quad I_i^+=[x_{i-\theta},\ x_i]$$

其中
$$x_{i-\theta}=x_i-\theta h$$

基函数 $\varphi_i(x)$ 由

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-\theta}}{x_i-x_{i-\theta}} & x\in I_i^+\\ 1 & x\in I_{i+1}^-\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_{i+1-\theta}-x_{i+1}} & x\in I_{i+1}^+\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{1.5}$$

给定．于是我们有

$$u^h(x)=\sum_{i=1}^{M-1}u_i\varphi_i(x) \tag{1.6}$$

因此，我们得到对应于微分方程(1.1)的有限元方程：

$$-\int_0^1 \varepsilon(u^h)_x(\varphi_i)_x dx+\int_0^1 a(u^h)_x\varphi_i dx=\int_0^1 f\varphi_i dx \tag{1.7}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ M-1)$$

由基函数的表达式可知

1）在 I_i^+ 上 $\qquad \varphi_i(x_i)=1 \qquad (1.8)$

2）在 I_{i+1}^- 上 $\qquad \varphi_i(x_i)=1 \qquad \varphi_i(x_{i+1-\theta})=1 \qquad (1.9)$

3）在 I_{i+1}^+ 上 $\qquad \varphi_i(x_{i+1-\theta})=1 \qquad (1.10)$

以及

$$\frac{d\varphi_i}{dx}=\begin{cases}\dfrac{1}{\theta h} & x\in I_i^+\\ 0 & x\in I_{i+1}^-\\ -\dfrac{1}{\theta h} & x\in I_{i+1}^+\\ 0 & \text{其它}\end{cases} \tag{1.11}$$

于是我们有

1）在 I_i^+ 上，

$$\left.\frac{d\varphi_i}{dx}\right|_{x=x_i}=\frac{1}{\theta h},\quad \left.\frac{d\varphi_i}{dx}\right|_{x=x_{i-\theta}}=\frac{1}{\theta h} \tag{1.12}$$

$$\left.\frac{d\varphi_{i-1}}{dx}\right|_{x=x_i}=-\frac{1}{\theta h},\quad \left.\frac{d\varphi_{i-1}}{dx}\right|_{x=x_{i-\theta}}=-\frac{1}{\theta h} \tag{1.13}$$

2）在 I_{i+1}^+ 上，

$$\left.\frac{d\varphi_i}{dx}\right|_{x=x_{i+1}}=-\frac{1}{\theta h},\quad \left.\frac{d\varphi_i}{dx}\right|_{x=x_{i+1-\theta}}=-\frac{1}{\theta h} \tag{1.14}$$

$$\left.\frac{d\varphi_{i+1}}{dx}\right|_{x=x_{i+1}}=\frac{1}{\theta h},\quad \left.\frac{d\varphi_{i+1}}{dx}\right|_{x=x_{i+1-\theta}}=\frac{1}{\theta h} \tag{1.15}$$

为了避免严格的积分计算利用梯形法则，首先，因为

$$-\int_{I_i^+}\varepsilon(u^h)_x(\varphi_i)_x dx=-\frac{\varepsilon(u_i-u_{i-1})}{\theta h} \tag{1.16}$$

$$-\int_{I_{i+1}^+}\varepsilon(u^h)_x(\varphi_i)_x dx=-\frac{\varepsilon(u_i-u_{i+1})}{\theta h} \tag{1.17}$$

所以

$$-\int_0^1\varepsilon(u^h)_x(\varphi_i)_x dx=\varepsilon\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\theta h} \tag{1.18}$$

其次，因为

$$\int_{I_i^+}a(u^h)_x\varphi_i dx=\frac{a}{2}(u_i-u_{i-1}) \tag{1.19}$$

$$\int_{I_{i+1}^+}a(u^h)_x\varphi_i dx=\frac{a}{2}(u_{i+1}-u_i) \tag{1.20}$$

所以

$$\int_0^1 a(u^h)_x \varphi_i dx=\frac{a}{2}(u_{i+1}-u_{i-1}) \tag{1.21}$$

最后，考虑积分$\int_0^1 f\varphi_i dx$，因为

$$\int_{I_i^+} f\varphi_i dx = \frac{1}{2}\theta h f_i \tag{1.22}$$

$$\int_{I_{i+1}^-} f\varphi_i dx = \frac{1}{2}(1-\theta)h\{f_i+f_{i+1-\theta}\} \tag{1.23}$$

$$\int_{I_{i+1}^+} f\varphi_i dx = \frac{1}{2}\theta h f_{i+1-\theta} \tag{1.24}$$

其中$f_i=f(x_i)$，$f_{i+1-\theta}=f(x_i+(1-\theta)h)$，综合以上结果可知有限元方程(1.7)化为

$$\varepsilon\frac{u_{i+1}-2u_i+u_{i-1}}{\theta h^2}+a\frac{u_{i+1}-u_{i-1}}{2h}=\frac{1}{2}\{f_i+f_{i+1-\theta}\} \tag{1.25}$$

$$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ M-1)$$

二、收 敛 性 和 误 差 估 计

取

$$\theta=\frac{\operatorname{th}\dfrac{ah}{2\varepsilon}}{\dfrac{ah}{2\varepsilon}} \tag{2.1}$$

易知θ满足(1.4)且(1.25)化为：

$$L^h u\equiv\frac{ah}{2}\operatorname{cth}\frac{ah}{2\varepsilon}u_{x\bar{x}}+au_{\hat{x}}=\frac{1}{2}\{f_i+f_{i+1-\theta}\} \tag{2.2}$$

其中$u_{x\bar{x}}$，$u_{\hat{x}}$分别是u关于x的二阶差商和一阶中心差商，容易验证当$\varepsilon\to0$时方程(2.2)趋向于

$$a\frac{u_{i+1}-u_i}{h}=\frac{1}{2}\{f_i+f_{i+1-\theta}\} \tag{2.3}$$

这是对应于退化方程(1.3)的差分方程.

首先让我们证明下列引理.

引理：令v^h是给定在网格区域S^h上的函数，则

$$|v^h(x)|\leqslant\max\{|v^h(0)|,\ |v^h(1)|\}+\frac{1}{a}\max_{S^h}|L^h v^h| \tag{2.4}$$

证明：假设不等式(2.4)右端第一项为K_1，第二项为K_2. 构造辅助函数

$$z^h(x)=K_1+K_2(1-x)\pm v^h(x) \tag{2.5}$$

因为$z^h(0)\geqslant0$，$z^h(1)\geqslant0$以及

$$L^h z^h=-aK_2\pm L^h v^h\leqslant0$$

所以由最大值原理有

$$z^h(x)\geqslant0$$

即 $$|v^h(x)|\leqslant K_1+K_2$$
因此引理的结论得证.

定理：假设右端函数$f(x)$有直到三阶为止的连续导数，微分问题的解 $u_\varepsilon(x)$ 有直到四阶为止的连续导数则对于固定的$\varepsilon>0$，差分方程(2.2)的解 $u_\varepsilon^h(x)$和微分方程(1.1)的解$u_\varepsilon(x)$在S^h上有下列估计：

$$|u_\varepsilon^h(x)-u_\varepsilon(x)|\leqslant c_\varepsilon h^2 \tag{2.6}$$

其中c_ε是与x无关的常数（当然依赖于ε）.

证明：*) 令$v^h(x)=u^h(x)-u(x)$

则

$$L^hv^h(x)=L^hu^h(x)-L^hu(x)=\frac{1}{2}\{f(x)+f(x+(1-\theta)h)\}-\frac{ah}{2}\operatorname{cth}\frac{ah}{2\varepsilon}u_{x\bar{x}}-au_{\hat{x}}$$

$$=\varepsilon u''+au'+\frac{1}{2}\{f(x+(1-\theta)h)-f(x)\}-\frac{ah}{2}\operatorname{cth}\frac{ah}{2\varepsilon}u_{x\bar{x}}-au_{\hat{x}}$$

$$=\varepsilon(u''-u_{x\bar{x}})+\left\{\varepsilon-\frac{ah}{2}\operatorname{cth}\frac{ah}{2\varepsilon}\right\}u_{x\bar{x}}+a(u'-u_{\hat{x}})+\frac{1}{2}\{f(x+(1-\theta)h)-f(x)\}$$

因此

$$|L^hv^h(x)|\leqslant\varepsilon|u''-u_{x\bar{x}}|+\frac{a^2h^2}{4\varepsilon}\left|\left(\frac{2\varepsilon}{ah}\right)^2-\frac{2\varepsilon}{ah}\operatorname{cth}\frac{ah}{2\varepsilon}\right|\cdot|u_{x\bar{x}}|$$

$$+a|u'-u_{\hat{x}}|+\frac{1}{2}|(1-\theta)hf'(\xi)|,\quad \xi\in(0,\ 1)$$

按照定理假设的条件有 $$|L^hv^h(x)|\leqslant c_1h^2$$
于是由上述引理得到定理的结论.

参 考 文 献

1. Il'in, A. M., Difference scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative, *Math. Notes*, 6(1969), 596—602.
2. John, J. H. Miller, Construction of a FEM for a singularly preturbed problem in 2 dimensions, *International Series of Numerical Mathematics*, 31, (1976), 165-169.
3. Su Yu-cheng and Wu Chi-kuang, The difference methods for the solution of singular-perturbation for the elliptic-parabolic differential equation, *Applied Mathematics and Mechanics*, (English Edition) 1, 2, (1980), 175-185.

The Finite Element Scheme for Ordinary Differential Equation with Small Parameter

Wu Chi-kuang
(Nanjing University, Nanjing)

Abstract

In this short paper the author constructed a special finite element scheme and investigated the convergence of this scheme.

*) 下标ε略去.