应用数学和力学, 第 25 卷 第 12 期(2004 年 12 月)
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
重 庆 出 版 社 出 版

文章编号: 1000_0887(2004) 12_1264_07

一类半线性反应扩散方程组的非平凡平衡解*

顾永耕[1,2], 孙文俊[2]

(1. 湖南师范大学 理学院, 长沙 410081;
2. 中国科学院 数学与系统科学研究院 系统科学研究所, 北京 100080)

(我刊原编委段祝平推荐)

摘要: 利用正锥上的度理论, 结合精细的先验估计技巧, 讨论了一类强非线性弱耦合的反应扩散方程组, 得到了其非平凡平衡解的存在性以及解的结构•

关 键 词: 半线性反应扩散方程组; 平衡解; 先验估计

中图分类号: O175.25 文献标识码: A

引 言

自然界的许多非线性现象可用一类弱耦合的反应扩散方程组来描述, 例如, 天体力学中星云的在重力作用下的运动以及气体的热燃烧问题等等, 在数学上都可归结为下述初边值问题:

$$\begin{cases} \partial u/\partial t - \Delta u = f(u, v),\ \partial v/\partial t - \Delta v = g(u, v), & \boldsymbol{x} \in \Omega, t > 0, \\ u = v = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega, \\ u(\boldsymbol{x}, 0) = u_0(\boldsymbol{x}),\ v(\boldsymbol{x}, 0) = v_0(\boldsymbol{x}), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $\Omega \subset R^N (N \geqslant 2)$ 为具光滑边界 $\partial\Omega$ 的有界区域, $u_0(\boldsymbol{x})$, $v_0(\boldsymbol{x})$ 是给定的初值, $f(u, v)$、$g(u, v)$ 是其变元的非线性函数• 众所周知, 非线性反应扩散方程组(1) 的研究中的一核心问题是讨论其平衡解, 特别是非平凡平衡解的存在性以及平衡解的结构, 所谓非平凡平衡解就是不恒等于常数的平衡解• 在实际问题中人们最关心的是问题(1) 正平衡解, 也即要讨论边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u, v),\ -\Delta v = g(u, v), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u > 0,\ v > 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u = v = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{2}$$

的可解性• 在此顺便指出, 量子力学中的Schrödinger 方程组平衡解也可归结为(2) •

由于我们在本文中所考虑的反应项是强非线性的情形, 即(2) 中的反应项 $f(t, s)$ 和 $g(t, s)$ 关于其变元呈幂指数形式快速增长的情形, 这对问题(2) 的可解性研究带来实质性的困难• 近几

* 收稿日期: 2003_02_25; 修订日期: 2004_07_15
基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171029)
作者简介: 顾永耕(1942—) , 男, 北京人, 教授, 博士生导师(Tel: + 86_10_68455172) ;
孙文俊(1974—) , 博士(联系人. 现在地址: 北京 8009 信箱(实验室) , 邮编: 100088; Tel: + 86_10_62014411_3191; E_mail: wjsun@amss.ac.cn)•

十年来,这类问题已经引起了广泛的兴趣,这在文献[1]中对此有详细的介绍• 为了完整起见,我们仅列举一些与本文有关的结果• 首先对于单个方程的情形,也即

$$-\Delta u = f(u),\quad u > 0,\quad \boldsymbol{x} \in \Omega;\ u = 0,\quad \boldsymbol{x} \in \partial\Omega• \tag{3}$$

在文献[2]中,对形如 $f(t) \cong O(t^p)$, $p \in (1, (N+2)/(N-2))$, $N \geqslant 3$ 的情形,利用先验估计和度理论的方法,给出了问题(3)正解的存在性结果• 随后,文[3]推广文[2]中的方法到如下特殊形式的半线性方程组的边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(v),\ -\Delta v = g(u), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u > 0,\ v > 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u = v = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega• \end{cases} \tag{4}$$

在本文中,我们将考虑另一类特殊形式的半线性反应扩散方程组,即对非线性项 $f(t,s)$ 和 $g(t,s)$ 具有变分结构的情形,为此我们假定非线性函数 $f(t,s)$ 和 $g(t,s)$ 满足如下条件:

(A_1) $f(t,s) = F_t(t,s)$, $g(t,s) = F_s(t,s)$,其中 $F(t,s)$: $\mathbf{R}^+ \times \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}^+$ 关于其变元是二次连续可微的• 函数 $f(t,s)$、$g(t,s)$ 是拟增的,也即 $f_s(t,s) \geqslant 0$, $g_t(t,s) \geqslant 0$ 对所有的 $s, t \geqslant 0$ 成立•

(A_2) 函数 $F(t,s)$ 是局部有界的,也即对任意的 $0 < s_0, t_0 < \infty$ 有

$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant s_0,\, 0 \leqslant t \leqslant t_0} F(t,s) \leqslant l,$$

其中 l 是与 s_0、t_0 有关的常数• 更进一步假设存在常数 $a \in (0, \infty)$ 使得对充分大的 t、s 成立

$$F(t,s) \leqslant a s^p t^q,$$

其中 $p, q \in (1, \infty)$ 并且满足

$$1/p + 1/q > (N-2)/N \qquad (N \geqslant 3, N = 2\ \text{时, 不受限制})•$$

(A_3) 存在常数 a_1、b_1、s_1、t_1 使得

$$\lim_{s \to +\infty} (f(t,s)/s) \geqslant a_1, \qquad \text{对 } t \geqslant t_1 \text{ 一致成立},$$

$$\lim_{t \to +\infty} (g(t,s)/t) \geqslant b_1, \qquad \text{对 } s \geqslant s_1 \text{ 一致成立},$$

且 $a_1 b_1 > \lambda_1^2$,其中 λ_1 为 $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ 的最小特征值•

(A_4) $f(0,0) = g(0,0) = 0$,并且存在常数 a_2、b_2、s_2、t_2 使得

$$\lim_{s \to 0} (f(t,s)/s) \leqslant a_2, \qquad \text{对 } t \leqslant t_2 \text{ 一致成立},$$

$$\lim_{t \to +0} (g(t,s)/t) \leqslant b_2, \qquad \text{对 } s \leqslant s_2 \text{ 一致成立},$$

且 $a_2 b_2 < \lambda_1^2$•

例如,对 $f(t,s) = |t|^{p-1} t |s|^{q-1} s$, $g(t,s) = |t|^{l-1} t |s|^{r-1} s$,其中 $q, l > 1$, $p, r \geqslant 0$ 的情形,则(A_1)~(A_4)满足•

由假设(A_4)可知 $u(\boldsymbol{x}) = v(\boldsymbol{x}) \equiv 0$ 满足(2),但这是平凡解,在实际问题中人们关心的是(2)的非平凡解的存在性,也就是非线性问题的多解性•

本文的主要结果是

定理 1　设 $\Omega \subset R^N (N \geqslant 2)$ 为有界区域,其边界 $\partial\Omega$ 充分光滑,假设(A_1)~(A_4)成立,则问题(2)至少存在一个正解 $(u,v) \in C^{2,\gamma}(\Omega)$, $\gamma \in (0,1)$,并且有先验估计 $\|u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c$,其中常数 c 仅依赖于 Ω 和假设(A_1)~(A_3)中出现的常数,而与解 (u,v) 无关•

本文安排是这样的,在第 1 节中我们对(2)的正解 (u,v) 做先验估计,也即证明定理 4• 在第 2 节中,我们利用第 1 节中的结果,再结合正锥上的度理论方法来建立(2)正解的存在性,

即定理 8•

1 先验估计

在本节中, 我们要对方程组(2)的正解做类似与[4]和[5]的先验估计, 为此需要以下几个引理•

引理 2 设 $F(t,s)$ 关于其变元是二次连续可微的, 并且 $F(0,0)=0$, $u,v\in C^2(\Omega)\cap C^1(\bar\Omega)$, 是方程组(2)的解, 则成立 Pohozaev 形式的恒等式:

$$\int_\Omega[|\nabla u|^2+|\nabla v|^2]\mathrm{d}\boldsymbol{x}-2^*\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{1}{N-2}\oint_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2+\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)(\boldsymbol{x}\cdot\nu)\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}=0, \tag{5}$$

其中 ν 为边界 $\partial\Omega$ 上的单位外法向量, $2^*=2N/(N-2)$ $(N\geqslant 3)$ 为 Sobolev 嵌入定理的临界指数•

证明 引理 2 的证明主要利用下面一些等式•

$$\Delta u(\boldsymbol{x}\cdot\nabla u)=\mathrm{div}\left((\boldsymbol{x}\cdot\nabla u)\nabla u-(|\nabla u|^2/2)\boldsymbol{x}\right)+((N-2)/2)|\nabla u|^2,$$
$$\Delta v(\boldsymbol{x}\cdot\nabla v)=\mathrm{div}\left((\boldsymbol{x}\cdot\nabla v)\nabla v-(|\nabla v|^2/2)\boldsymbol{x}\right)+((N-2)/2)|\nabla v|^2,$$
$$F_u(u,v)(\boldsymbol{x}\cdot\nabla u)=\mathrm{div}(\boldsymbol{x}\cdot F(u,v))-NF(u,v)-(\boldsymbol{x}\cdot\nabla v)F_v(u,v)\text{•}$$

然后在问题(2)中的方程两端分别同乘以 $(\boldsymbol{x}\cdot\nabla u)$ 和 $(\boldsymbol{x}\cdot\nabla v)$ 并在 Ω 上积分, 利用上述恒等式可得等式

$$\int_\Omega[\Delta u(\boldsymbol{x}\cdot\nabla u)+\Delta v(\boldsymbol{x}\cdot\nabla v)]\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\frac{N-2}{N}\int_\Omega[|\nabla u|^2+|\nabla v|^2]\mathrm{d}\boldsymbol{x}+\frac{1}{2}\oint_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2+\left|\frac{\partial v}{\partial\nu}\right|^2\right)(\boldsymbol{x}\cdot\nu)\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}}=N\int_\Omega F(u,v)\mathrm{d}\boldsymbol{x}\text{•}$$

经整理后可得(5)•

引理 3 如果 $\alpha+\beta\leqslant 2^*$, 则存在常数 $c>0$ 使得

$$\left(\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/(\alpha+\beta)}\leqslant c\,\|(u,v)\|_{(H_0^1(\Omega))^2},$$

其中 $\|(u,v)\|_{(H_0^1(\Omega))^2}=\|u\|_{H_0^1(\Omega)}+\|v\|_{H_0^1(\Omega)}$ 为 Sobolev 空间 $(H_0^1(\Omega))^2=H_0^1(\Omega)\times H_0^1(\Omega)$ 中的范数•

证明 令

$$S_{\alpha+\beta}(\Omega)=\inf_{u\in H_0^1(\Omega)/\{0\}}\left[\int_\Omega|\nabla u|^2\mathrm{d}\boldsymbol{x}\Big\backslash\left(\int_\Omega|u|^{\alpha+\beta}\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{2/(\alpha+\beta)}\right],$$

由 Sobolev 嵌入定理可知, $S_{\alpha+\beta}(\Omega)$ 为只与维数 N 及 Ω 有关的常数• 再由不等式 $|u|^\alpha|v|^\beta\leqslant|u|^{\alpha+\beta}+|v|^{\alpha+\beta}$ 可知, 引理 3 可直接由

$$\left(\int_\Omega|u|^\alpha|v|^\beta\mathrm{d}\boldsymbol{x}\right)^{1/(\alpha+\beta)}\leqslant\left(\int_\Omega|u|^{\alpha+\beta}|v|^{\alpha+\beta}\right)^{1/(\alpha+\beta)}\leqslant c(\|u\|_{H_0^1(\Omega)}+\|v\|_{H_0^1(\Omega)})=c\,\|(u,v)\|_{(H_0^1(\Omega))^2}$$

给出•

为了叙述的方便, 下面我们仅对 $\Omega\subset R^N(N\geqslant 2)$ 为有界凸区域的情形进行深入的讨论, 其结果对一般的有界光滑区域都成立• 本节的主要结果是:

定理 4 假设函数 $f(t,s)$、$g(t,s)$ 满足(A_1)、(A_2)、(A_3), 并且区域 Ω 是 R^N 中的有界凸区域, 其边界 $\partial\Omega$ 充分光滑• 则成立下述先验估计

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c, \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c,$$

其中常数 c 仅依赖于 Ω 和假设(A1)、(A2)、(A3) 中出现的常数有关而与 (u, v) 无关.

证明 分 4 步来证明定理 4. 不失一般性, 在证明过程中我们用 c 来统一表示与解 (u, v) 无关的常数.

第一步 证明 $u, v, f(u, v)$ 及 $g(u, v)$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中一致有界. 为此, 令 λ_1 和 $\varphi_1(\boldsymbol{x})$ 为下述特征值问题的第一特征值及对应的特征函数, 也即,

$$\begin{cases} -\Delta\varphi_1 = \lambda_1\varphi_1, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ \varphi_1 = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{6}$$

显然有 $\lambda_1 > 0$, $\varphi_1(\boldsymbol{x}) > 0$, $\forall \boldsymbol{x} \in \Omega$ 成立. 不失一般性我们可归一化 $\varphi_1(\boldsymbol{x})$ 使得

$$\int_\Omega \varphi_1(\boldsymbol{x}) = 1.$$

在方程(2)两端同乘以 $\varphi_1(\boldsymbol{x})$ 并在区域 Ω 上积分, 得

$$\lambda_1\int_\Omega u\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega f(u, v)\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

$$\lambda_1\int_\Omega v\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega g(u, v)\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由假设条件(A2)、(A3)知, 存在正常数 c 使得

$$f(t, s) \geqslant a_1 s - c, \quad g(t, s) \geqslant b_1 t - c, \qquad \text{对所有的 } s \geqslant 0,\ t \geqslant 0 \text{ 成立},$$

并且 $a_1 b_1 > \lambda_1^2$.

因此有

$$\lambda_1\int_\Omega u\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant a_1\int_\Omega v\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - c\int_\Omega \varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

$$\lambda_1\int_\Omega v\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \geqslant b_1\int_\Omega u\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} - c\int_\Omega \varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由上述式子可得

$$\int_\Omega u\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{(a_1 + \lambda_1)c}{a_1 b_1 - \lambda_1^2}\int_\Omega \varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{(a_1 + \lambda_1)c}{a_1 b_1 - \lambda_1^2},$$

$$\int_\Omega v\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant \frac{(b_1 + \lambda_1)c}{a_1 b_1 - \lambda_1^2}\int_\Omega \varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \frac{(b_1 + \lambda_1)c}{a_1 b_1 - \lambda_1^2}.$$

即得估计

$$\int_\Omega u\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} < c, \quad \int_\Omega v\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} < c,$$

对(2)的所有正解 (u, v) 成立. 再结合(2), 又可得估计

$$\int_\Omega f(u, v)\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} < c, \quad \int_\Omega g(u, v)\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x} < c.$$

鉴于 $\varphi_1(\boldsymbol{x}) > 0$ 对任意 $\boldsymbol{x} \in \Omega$ 成立, 因此有 u、v、$f(u, v)$ 和 $g(u, v)$ 在 $L^1_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ 中一致有界.

第二步 在此我们要得到解 (u, v) 及其梯度 $(\nabla u, \nabla v)$ 在边界 $\partial\Omega$ 附近的估计. 由假设条件(A1)知, 函数 $f(u, v)$ 和 $g(u, v)$ 关于 u, v 是拟增的, 从而对方程组(2), 极大值原理成立(参见[6]). 又因为区域 Ω 是凸的, 因此利用与[6]相同的方法, 利用第一步的结果可以断言存在 $\varepsilon > 0$ 使得

$$u(\boldsymbol{x}),\ v(\boldsymbol{x}) \leqslant c, \qquad \text{对任意的 } \boldsymbol{x} \in \Omega_\varepsilon = \{y \in \Omega : d(y, \partial\Omega) < \varepsilon\} \text{ 成立}.$$

再由椭圆方程组的正则性理论[7]可以得到估计

$$|\nabla u(\boldsymbol{x})|, \ |\nabla v(\boldsymbol{x})| \leqslant c,$$

对任意的 $\boldsymbol{x} \in \Omega_{\varepsilon/2} = \left\{ y \in \Omega: d(y, \partial\Omega) < \varepsilon/2 \right\}$ 成立•

第三步　在这一步中, 我们要得到估计

$$\|(u, v)\|_{(H_0^1(\Omega))^2} \equiv \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant c, \quad \int_\Omega F(u, v)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant c•$$

事实上, 利用恒等式(5) 和方程组(2) 可得

$$\int_\Omega [uF_u(u, v) + vF_v(u, v)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} - \frac{2N}{N-2}\int_\Omega F(u, v)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \\ -\frac{1}{N-2}\oint_{\partial\Omega}\left(\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 + \left|\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|^2\right)(\boldsymbol{x} \cdot \nu)\,\mathrm{d}S_{\boldsymbol{x}} = 0• \tag{7}$$

利用第二步的结果, 我们可以得到(7) 式右端边界积分估计, 再由假设条件(A_2) 知, 可以选择 $\theta \in [0, 1]$ 使得

$$\frac{\theta}{p} > \frac{N-2}{2N} = \frac{1}{2^*}, \quad \frac{1-\theta}{p} > \frac{N-2}{2N} = \frac{1}{2^*},$$

从而有

$$\left| \int_\Omega (2^*\theta F(u, v) - uF_u(u, v))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} + \int_\Omega (2^*(1-\theta)F(u, v) - uF_v(u, v))\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \right| \leqslant c•$$

再一次利用假设条件(A_2) , 可以得到

$$\int_\Omega F(u, v)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant c, \quad \int_\Omega uF_u(u, v)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant c, \quad \int_\Omega vF_v(u, v)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant c,$$

其中常数 $c > 0$ 仅依赖于 Ω 和函数 F 的性质(A_1)、(A_2)、(A_3) 中出现的常数•

由等式

$$\int_\Omega [uF_u(u, v) + vF_v(u, v)]\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} = \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

便可得到

$$\int_\Omega (|\nabla u|^2 + |\nabla v|^2)\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant c•$$

第四步　在这一步中, 我们要得到 (u, v) 在 Ω 上的整体估计

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c, \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c•$$

在假设条件(A_2) 下, 利用引理 3 以及第三步中得到的 $\|(u, v)\|_{(H_0^1(\Omega))^2}$ 的估计便可得

$$\int_\Omega u^{p+q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant c, \quad \int_\Omega v^{p+q}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} \leqslant c•$$

再结合"靴带"迭代技巧(参见文献[8]) 和椭圆方程组的正则性理论(参见文献[7]) 即可知第四步中的结论成立•

综上所述, 定理 4 得证•

注记 5　从上述证明过程中不难看出, 只要 $(-\Delta, H_0^1(\Omega))$ 的第一特征值 λ_1 为正的, 定理 4 的结论就成立• 因此对形如 $\Omega = (a, b) \times R^{N-1}$ 的无界窄长区域和 $\Omega = D \times \mathbf{R}$ 的无界柱形区域, 定理 4 成立•　其中常数 $a, b \in \mathbf{R}$, $D \subset R^{N-1}$ 为有界连通区域•

2　存在性结果

在本节中, 我们将利用正锥上的度理论来建立方程组(2) 的正解 (u, v) 的存在性•　为此, 先给出锥的定义•

定义 6　如果 K 为 Banach 空间 X 中的一闭子集, 且满足: (ⅰ) 如果对 $x, y \in K$, 及常数 $d_1, d_2 \geqslant 0$, 有 $d_1x + d_2y \in K$; (ⅱ) 如果 $x \in K$ 并且 $x \neq 0$, 有 $-x \notin K$•　则称 K 为空间 X 中

的一个锥.

现在让我们引入下面的不动点定理，这在存在性的证明过程中起着关键作用.

引理 7[2] 设 K 为 Banach 空间 X 中的锥，$U=\left\{x\in K: r<\|x\|<R\right\}$ 是 X 中的子集，其中常数 $R>r>0$. 映射 $\Phi: K\to K$ 是紧的，满足 $\Phi(0)=0$. 假设存在元素 $w\in K\setminus\{0\}$ 使得

(i) $x\neq\xi\Phi(x)$ 对 $0\leqslant\xi\leqslant 1$ 和 $\|x\|=r$ 成立；

(ii) $x\neq\xi w+\Phi(x)$ 对 $\xi\geqslant 0$ 和 $\|x\|=R$ 成立，

则映射 Φ 在 U 中至少有一个不动点.

本节的主要结果是

定理 8 假设 $f(t,s)$ 和 $g(t,s)$ 满足假设 $(A_1)\sim(A_4)$，Ω 是 $R^N(N\geqslant 2)$ 中的有界区域，其边界 $\partial\Omega$ 充分光滑，则问题 (2) 至少存在一个正解 $(u,v)\in C^{2,\alpha}(\Omega)$，$\alpha\in(0,1)$.

证明 首先定义 Banach 空间 $X=C(\Omega)\times C(\Omega)$，其范数为

$$\|(u,v)\|_X=\max\left\{\|u\|_{L^\infty(\Omega)}, \|v\|_{L^\infty(\Omega)}\right\}.$$

定义正锥 $K\subset X$ 为 $K=\left\{(u(\boldsymbol{x}),v(\boldsymbol{x}))\in X \mid u(\boldsymbol{x}),v(\boldsymbol{x})\geqslant 0, \boldsymbol{x}\in\Omega\right\}$. 对 $(u,v)\in K$，定义 $(u,v)=\Phi(u,v)$ 为下述线性边值问题的解，

$$\begin{cases}-\Delta u=F_u(u,v),\ -\Delta v=F_v(u,v), & \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ u>0,\ v>0, & \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ u=v=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{8}$$

显然映射 $\Phi: K\to K$ 为紧映射，并且 $\Phi(0)=0$. 因此，方程组 (2) 存在正解的存在性就等价于映射 Φ 在 K 存在非零不动点的存在性.

现在我们利用引理 7 来证明 Φ 在 U 中有不动点. 为此，只需验证引理 7 中的假设条件 (i)、(ii).

(i) 由条件 (A_4) 知，存在 $r>0$ 使得

$$F_t(t,s)\leqslant a_2 s,\quad F_s(t,s)\leqslant b_2 t$$

且 $a_2b_2<\lambda_1^2$ 对任意 $0\leqslant t,s\leqslant r$ 成立. 用反证法来证明引理 7 中的 (i)，假设存在 $(u,v)\in K$ 使得 $\|(u,v)\|_X=r$ 并且满足 $(u,v)=\lambda\Phi(u,v)$，其中 $\lambda\in[0,1]$，也即满足

$$\begin{cases}-\Delta u=\lambda F_u(u,v),\ -\Delta v=\lambda F_v(u,v), & \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ u>0,\ v>0, & \boldsymbol{x}\in\Omega,\\ u=v=0, & \boldsymbol{x}\in\partial\Omega.\end{cases}\tag{9}$$

在方程 (9) 的两端同乘以 $\varphi_1(\boldsymbol{x})$ 并在 Ω 上积分，得

$$\lambda_1\int_\Omega u\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\lambda\int_\Omega F_u(u,v)\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant a_2\int_\Omega v\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

$$\lambda_1\int_\Omega v\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}=\lambda\int_\Omega F_v(u,v)\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant b_2\int_\Omega u\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

由这两个等式，容易得到

$$\lambda_1^2\int_\Omega u\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant a_2b_2\int_\Omega u\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x},$$

$$\lambda_1^2\int_\Omega v\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}\leqslant a_2b_2\int_\Omega v\varphi_1(\boldsymbol{x})\mathrm{d}\boldsymbol{x}.$$

这显然与 $a_2b_2<\lambda_1^2$ 矛盾，因此定理 7 中的 (i) 成立.

(ii) 取 $w=(u,v)=(\varphi_1(\boldsymbol{x}),\varphi_1(\boldsymbol{x}))$ 只要证明存在 $R>0$，当 $\|(u,v)\|_X=R$ 时，$(u,v)\neq\xi w+\Phi(u,v)$，$\forall\xi>0$. 为此让我们来考虑下述问题

$$\begin{cases} -\Delta u = \xi\lambda_1\varphi_1(\boldsymbol{x}) + F_u(u, v), \quad -\Delta v = \xi\lambda_1\varphi_1(\boldsymbol{x}) + F_v(u, v), & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u > 0, \quad v > 0, & \boldsymbol{x} \in \Omega, \\ u = v = 0, & \boldsymbol{x} \in \partial\Omega \end{cases} \tag{10}$$

由假设(A_1)、(A_2)、(A_3)，如(u,v)是方程组(10)的正解，类似于定理4的证明过程可知存在不依赖(u,v)的常数$c>0$使得估计

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c, \quad \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant c \text{ 及 } \xi \leqslant c$$

成立• 由此可知，只要我们选择$R>c$，则问题(10)无解，亦即定理7中的(ii)成立• 这就证明了映射$\Phi(u,v)$在U中有一个不动点，于是知方程组(2)至少存在一个正解(u,v)并且满足

$$r < \|(u, v)\|_X < R,$$

定理8得证•

定理1的证明 结合定理4和定理8知定理1成立•

[参 考 文 献]

[1] Lions P L. On the existence of positive solutions of semilinear elliptic equations[J]. SIAM Review, 1982, **24**(2): 441—467.

[2] De Figueiredo D G, Lions P L, Nussbaum R D. A priori estimates and existence of positive solutions of semilinear elliptic equations[J]. J Math Pures Appl, 1982, **61**(1): 41—63.

[3] Cl ment Ph, Figueiredo D G, Mitidieri E. Positive solutions of semilinear elliptic systems[J]. Comm Partial Differential Equations, 1992, **17**(5): 923—940.

[4] Gidas B, Spruck J. A priori bounds for positives of nonlinear elliptic equations[J]. Comm Partial Differential Equations, 1981, **6**(4): 883—901.

[5] Gu Y G, Liu T. A priori estimate and existence of positive solutions of semilinear elliptic equation with the third boundary value problem[J]. J Systems Sci Comploxity, 2001, **14**(4): 388—398.

[6] Troy W C. Symmetry properties in systems of semilinear elliptic equations[J]. J Differential Equations, 1981, **42**(3): 400—413.

[7] Gilbarg D, Trudinger N S. Elliptic Partial Differential Equations of Second Order[M]. New York: Springer_Verlag, 1977.

[8] Ladyzhenskaya O, Uraltseva N. Linear and Quasilinear Elliptic Equations[M]. Scripta Technica Transl. New York: Academic Press, 1968. (English version)

Nontrivial Equilibrium Solutions for a Semilinear Reaction_Diffusion System

GU Yong_geng[1,2], SUN Wen_jun[2]

(1. Department of Mathematics, Hunan Normal University, Changsha 410081, P.R. China;

2. Academy of Mathematics and Systems Sciences, CAS, Beijing 100080, P.R.China)

Abstract: By the degree theory on positive cone together with the technique of a priori estimate, the nontrivial equilibrium solutions of a strong nonlinearity and weak coupling reaction diffusion system and the structure of the equilibrium solutions are discussed.

Key words: semilinear reaction_diffusion system; equilibrium solution; priori estimate