应用数学和力学，第3卷第6期（1982年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

# 加权残数法在固体力学中的应用
## ——我国近年来进展情况

徐 次 达

（同济大学，1982年2月1日收到）

**摘 要**

本文综述了我国近年来加权残数法用于固体力学的进展情况．加权残数法是一种解微分方程式的近似解法，广泛地用于流体力学、热交换问题等．于国内，由于需要，近年来发展此法用于固体力学问题，发现有较多优点．

文章简单地介绍此法之后，即综述此法用于杆、板、壳、网壳、弹性力学二维及三维问题，有关泛函研究，收敛性问题，配点地位问题，试函数研究，样条函数及梁函数的应用，非线性问题及于时间领域内的应用等．

作者总结过去，提出了几个加权残数法今后需要研究的课题的建议．

## 一、引 言

加权残数法（下简称MWR）是一种求微分方程近似解的数学方法，一直用于解流体力学、热交换及化工等问题[1][2][3]．国内由于寻求新的数值方法的需要于1978年开始研究用于固体力学[4][5]．由于这种方法具有方法原理的统一性、应用的广泛性、不依赖于变分原理、工作量小、程序简单、准确便捷及误差可知等优点，国内计算力学工作者予以研究开发，已在弹性力学、板壳结构、泛函研究、试函数及非线性问题、动力问题等方面有了广泛的成果．作者认为，及时总结，提出一些未来的课题的建议是需要的．

## 二、方 法 概 述

加权残数法是直接从应用科学中的控制微分方程式求得近似解的数学方法．如有某一工程科学问题的控制微分方程式及边界条件分别为：

$$Fu-f=0 \quad (V\text{域}) \tag{2.1}$$

$$Gu-g=0 \quad (S\text{边界面}) \tag{2.2}$$

$u$为待求函数，$F$及$G$为微分算子，$f$及$g$为不含$u$之项．我们假设一个试函数为：

$$\tilde{u}=\sum_{i=1}^{n} c_i N_i \tag{2.3}$$

其中$c_i$为待定系数，$N_i$为试函数项，将（2.3）引入(2.1)(2.2)之后，一般不会满足，于是分别出现了内部残数$R_i$及边界残数$R_b$：

$$R_i=F\tilde{u}-f\neq 0 \tag{2.4}$$

$$R_b=G\tilde{u}-g\neq 0 \tag{2.5}$$

为了消灭残数，我们应用了内部权函数$W_i$及边界权函数$W_b$，列出了消除内部残数的方程式及消除边界残数方程式：

$$\int_V R_i W_i dV=0 \tag{2.6}$$

$$\int_S R_b W_b dS=0 \tag{2.7}$$

据此得到代数方程组可以解求待定系数$c_i(i=1,2,\cdots,n)$，于是获得了近似解.

若(2.3)已满足(2.2)则仅须应用(2.6)以消灭残数，这种方法称为**内部法**. 若(2.3)已满足(2.1)则仅须用(2.7)消灭残数，这是**边界法**. 若(2.3)既不满足(2.1)又不满足(2.2)，这是**混合法**.

按权函数的形式分，加权残数法有五种基本方法[4]：

表1 加权残数法的基本方法

| 名 称 | 消除残数方程式 | 权函数 | 附 注 |
|---|---|---|---|
| 最小二乘法 | $\int_V R\dfrac{\partial R}{\partial c_i}dV=0$ | $\dfrac{\partial R}{\partial c_i}$ | $(i=1,2,\cdots,n)$ |
| 配点法 | $\int_V R\delta(x-x_i)dx=R\Big\|_{x_i}=0$ | $\delta(x-x_i)$* | *Dirac$\Delta$函数 $(i=1,2,\cdots,n)$ |
| 子域法 | $\int_{V_i} RdV_i=0\quad(i=1,2,\cdots,n)$ | $W=\begin{cases}1 & (V_i内)\\0 & (V_i外)\end{cases}$ | 将$V$分为$n$个子域 |
| 伽辽金法 | $\int_V RN_i dV=0$ | $N_i\ (i=1,2,\cdots,n)$ | $N_i$即试函数项 |
| 力矩法 | $\int_V Rx^i dV=0$ | $x^i\ (i=1,2,\cdots,n)$ | |

注：$x$可以是一维的或多维的.

上列基本方法可以组合使用如最小二乘配点法，子域伽辽金法等. 于最小二乘配点法中以域$V$中配点坐标代入，$R_i$见(2.4)，以边界配点坐标代入，$R_b$见(2.5)，列出矩阵方程式：

$$\mathbf{R}=\mathbf{BC}-\mathbf{e} \tag{2.8}$$

为其中$\mathbf{R}$为：

$$\mathbf{R}=\{R_i(c,x_1)\cdots R_i(c,x_k),WR_b(c,x_{k+1})\cdots WR_b(c,x_m)\}^T \tag{2.9}$$

$W=\dfrac{W_b}{W_i}$，$\mathbf{C}$为系数$c_i$的列矩阵，$\mathbf{B}$为其系数矩阵，$\mathbf{e}$为不含$\tilde{u}$的列矩阵. 组成$\mathbf{R}^T\mathbf{R}$式求其最小值可得：

$$\mathbf{B}^T\mathbf{BC}=\mathbf{B}^T\mathbf{e} \tag{2.10}$$

据此可以编程序计算得$c_i$. 此法称为**离散型最小二乘法**[3].

## 三、国内加权残数法研究工作的进展

### 1. 内部法及混合法计算杆、板问题

加权残数法用于杆件弯曲扭转稳定及应力波传播等问题见[4].

国内首次应用离散型最小二乘法分析薄板弯曲问题系混合法型[5]，试函数为一双重幂级

数：

$$\widetilde{w}=\sum_{m=0}^{s}\sum_{n=0}^{r}C_{mn}\widetilde{X}^{m}\widetilde{Y}^{n} \tag{3.1}$$

其中～符号表示无量纲量．具体计算了五种边界的矩形板，四边简支板、四边固定板、三边简支一边自由、三边固定一边自由、二对边简支另二对边自由．与解析解的结果[6]比较，板中点挠度及弯矩的误差依次为：0.0739%，0.0208%；0.237%，0.292%；1.55%，0.76%；0%，2.7%；0.76%，0%[6][7]．

## 2． 边界法及半混合法分析壳体

国内，北京中国建筑科学研究院何广乾及张维岳用最小二乘边界配点法分析板壳强度取得成功[8]．他们先求扁壳控制微分方程式：

$$\nabla^{8}\varphi+K^{2}\nabla_{k}^{2}\varphi=\frac{z}{D} \tag{3.2}$$

的齐次解及特解以满足内部，然后于边界上适当配点用最小二乘法解算，于(3.2)式中$\varphi$为应力函数，$K^{2}=\frac{12}{h^{2}}$，$\nabla_{k}^{2}$为一般扁壳中含常曲率$k_1$及$k_2$的算子，$z$为法向载荷集度而$D$为抗弯刚度．齐次解及特解为：

$$\varphi=\mathrm{Re}\sum_{m=1}^{m}\sum_{j=1}^{4}\varphi_{mj} \tag{3.3}$$

$$\varphi_{0}=\frac{q}{48DK}\left(\frac{x^{4}}{k_{2}^{2}}+\frac{y^{4}}{k_{1}^{2}}\right) \tag{3.4}$$

式中$\varphi_{mj}$是含$4m$个待定系数的复数形式的指数函数，于边界上配$32m$个点即可求出$32m$个实数系数．作者具体解算了扭壳及四坡顶扭壳问题．

浙江大学薛德明、唐锦春、郭鼎康应用了离散型最小二乘半混合法分析了圆柱形网壳的强度[9]，网壳的控制微分方程式已化为正交异性圆柱形薄壳的三个位移法微分方程式，他们用的试函数满足一部份边界条件：

$$\left.\begin{aligned}u&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1,3,\cdots}^{n}A_{ij}y^{i-1}\sin j\pi x/l,\\ v&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1,3,\cdots}^{n}B_{ij}y^{i-1}\cos j\pi x/l\\ w&=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1,3,\cdots}^{n}C_{ij}y^{i-1}\cos j\pi x/l\end{aligned}\right\} \tag{3.5}$$

其中$l$为壳的长度．由于对称，他们编制了TQ16-BCY语言程序计算了1/4壳体，计算结果与铁氏[6]的解较为接近．

## 3． 弹性力学二维问题及三维问题

西南交通大学徐文焕及陈虬用离散型最小二乘边界法分析弹性力学平面问题[10]，用于

问题的控制微分方程式$\nabla^4\phi=0$的试函数为：

$$
\begin{aligned}
\tilde{\phi}=\sum_{i=1}^{n}\Big\{&(C_{i1}e^{\alpha_1 y}+C_{i2}e^{-\alpha_1 y}+C_{i3}ye^{\alpha_1 y}+C_{i4}ye^{-\alpha_1 y})\sin\alpha_1 x\\
&+(C_{i5}e^{\alpha_1 y}+C_{i6}e^{-\alpha_1 y}+C_{i7}ye^{\alpha_1 y}+C_{i8}ye^{-\alpha_1 y})\cos\alpha_1 x\\
&+(C_{i9}e^{\alpha_2 x}+C_{i10}e^{-\alpha_2 x}+C_{i11}xe^{\alpha_2 x}+C_{i12}e^{-\alpha_2 x})\sin\alpha_2 y\\
&+(C_{i13}e^{\alpha_2 x}+C_{i14}e^{-\alpha_2 x}+C_{i15}xe^{\alpha_2 y}+C_{i16}e^{-\alpha_2 x})\cos\alpha_2 y
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

式中$\alpha_1=n\pi/a$，$\alpha_2=n\pi/b$，$a$及$b$为平面体$x$及$y$方向的尺寸．具体计算了矩形板及三角板的平面问题，$n=3$即已准确．

陈虬曾应用离散型最小二乘法解弹性力学三维问题[11]．

### 4. 方差泛函理论探讨及最小二乘法收敛问题

最小二乘法虽然回避了泛函变分问题，然而根据后者的概念去探讨方法的基础理论实质是很有裨益的．Finlayson于[1]中已研究了方差泛函：

$$I(u)=\int_V(Fu-f)^2dV \tag{3.7}$$

并建立起收敛性定理．我国七机部邱吉宝[12]扩大了(3.7)的概念形成了较为广泛的方差泛函：

$$I(u)=\int_V R_i^2W_i\ dV+\sum_{i=1}^{r}\int_S R_b^2W_b\ dS \tag{3.8}$$

式中$R_i$及$R_b$见(2.6)，(2.7)．

经过探讨，得出结论：(1) $I(u)$有极小值；极值条件也是$\delta I(u)=0$，极小值为零；(2)取$I(u)$极小值等价于解控制微分方程式；(3)方差泛函系二次正定；(4)构成方差泛函时未限制微分方程，因此线性及非线性微分方程都可解；(5) 将里兹法用于方差泛函即得到最小二乘法，于是关于里兹法的收敛性结论也适用于最小二乘法．

### 5. 配点地位问题

邱吉宝于[12]中提出高斯配点离散型最小二乘法．这种方法如果任意配点即有一定的盲目性，计算结果即散漫无定．如果按高斯配点则可以提高计算精度，还可以减少配点数．他将试函数$\tilde{u}=\mathbf{NC}$引入 (3.8) 式得 $\mathrm{I}(c)=\mathbf{C}^T\mathbf{KC}-2\mathbf{C}^T\mathbf{P}+\mathbf{d}$ 由极值条件$\delta I=0$可得：

$$\mathbf{KC}=\mathbf{P} \tag{3.9}$$

$\mathbf{K}$，$\mathbf{P}$，$\mathbf{d}$都是积分式可以应用二维高斯积分式处理．

### 6. 试函数的选择

作者认为MWR的试函数有三类：（1）内部法试函数（满足边界条件），（2）边界法试函数（满足内部微分方程），（3）混合法试函数（两者都不满足）．

湖南大学王磊提出四种内部法试函数：梁振动函数，样条函数，柱稳定函数及三角级数多项式[13]，前二种国内已经在应用．

边界法试函数最好从控制微分方程解析解中得到如[8][10]，混合法试函数有双重幂级数[6][7]及幂级数项与三角级数的乘积[9]等．

### 7. 样条函数及梁函数的应用，板非线性问题

广西大学秦荣于1981年春写成资料："样条加权残数法"及"样条能量配点法"是国内外首先研究样条函数用于MWR比较全面系统的工作[4][5]，用于薄板弯曲问题的挠度试函数是：

$$w=\sum_{i=-1}^{n+1}\sum_{j=-1}^{m+1}\gamma_{ij}\phi_i(x)\psi_j(y) \tag{3.10}$$

式中$\gamma_{ij}$为待定系数，$\phi_i(x)$及$\psi_j(y)$是五次$B$样条函数，也可以换成为梁函数．他又发展了加权残数法的类型及将能量原理引入MWR方法中．

合肥大学焦兆平[16]也以梁函数及样条函数用于板弯问题．

同济大单陈子栄[17]应用了梁函数于离散型最小二乘法中解薄板线性及非线性弯曲问题获得成功，薄板的挠度试函数表示为：

$$\bar{w}=\sum_{m=1}^{r}\sum_{n=1}^{s}A_{mn}X_m(\bar{x})Y_n(\bar{y}) \tag{3.11}$$

其中$A_{mn}$为待定系数，$X_m(\bar{x})$及$Y_n(\bar{y})$是梁函数．于几何非线性板弯曲问题中，他用了Levenbery-Marguardt法求解与Levy的解很为接近[18]．

### 8. 加权残数法有限元问题

有限元法的长处在于能解形体复杂的结构问题．然而在连续体应力变化剧烈处只能采取细化网格的做法，导致众多自由度及巨大工作量．于MWR中试函数可以参考已有解析解选取可以应用于应力剧烈变化处，但方法往往限于形状简单的结构物．二者方法相互结合可以相互弥补，扬长避短．

邱吉宝于[12]中将连续体分为若干分块，然后在分块邻边之间消灭残差．他已编就板弯曲通用程序，效果良好．

二机部谷芬毓[19]应用最小二乘法配置有限元，用节点参数法解算了一维及二维问题，效果良好．

### 9. 加权残数法用于时间领域及有限条法

同济大学金瑞椿[20]应用MWR的概念统一处理解决结构物动力响应问题的逐步积分法单步格式，提出一种新的积分格式具有改进精度及无条件稳定等优点，已用于非线性地震响应问题，这是首次将MWR用于时间领域．

天津大学总祖武将MWR用于从有限条法解薄板弯曲及柱体扭转问题的微分方程中得到较好的刚度矩阵[21]．

## 四、结　　论

国内固体力学加权残数法研究自1978年以来发展较多，已逐渐形成一个新的计算力学领域．过去的大部份研究工作系在连续体线性平衡问题方面，个别工作已有深入研究方法本质，接触到非线性问题及动力学问题等．结合到"四化"需要，个人认为如果加权残数法能在下列几方面进行研究作出成绩是很有裨益的：（1）复杂几何形状弹性体的平衡问题，

（2）几何的及物理的非线性问题，（3）MWR有限元问题，（4）弹性体动力学问题，（5）弹性力学奇异性问题，（6）流体及固体相互作用问题.

文中收集情况限于1981年为止，有不全面处及欠妥之处，请提出批评指正.

## 参 考 文 献


1. Finlayson, B. A., The Method of Weighted Residuals and Variational Principles with Application in Fluid Mechanics, Heat and Mass Transfer, Academic Press,(1972).
2. Finlayson, B. A. and L. E. Serven, The method of weighted residuals—a review, *Applied Mechanics Review*, 19, 9, (1966).
3. Eason, E. D., A review of least-squares methods for solving partial differential equations, *Inter Jour. of Numerical Methods in Engg*, 10, (1976), 1021—1046.
4. 徐次达，加权残数法解固体力学问题，力学与实践，2，4，(1980).
5. 徐次达，施德芳，离散型最小二乘法分析薄板强度，力学学报，4，(1981,7).
6. Timoshenko, S. P. and S. Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, McGraw-Hill Book, Comp. Inc., (1959).
7. 徐次达，郑瑞芳，施德芳，最小二乘配点法解薄板弯曲问题，上海力学，1，2，(1980).
8. 何广乾，张维岳，用最小二乘边界配点法按有矩理论分析双曲抛物面扭壳，土木工程学报，13，1，(1980.9) 1—22.
9. 薛德明，唐锦春，郭鼎康，加权残值法分析圆柱网壳内力，1980 年全国计算力学学术交流会会议论文.
10. 徐文焕，陈虬，最小二乘边界配点法解平面问题，1980年全国计算力学学术交流会会议论文。
11. 陈虬，弹性力学三维问题的最小二乘解法，1980年全国计算力学学术交流会会议论文。
12. 邱吉宝，方差泛函变分与高斯配点离散型最小二乘法，1980 年全国计算力学学术交流会会议论文.
13. 王磊，加权残数法及试函数，湖南大学学报，3，(1981)，1—22.
14. 秦荣，样条加权残数法，广西力学学会(1981，3).
15. 秦荣，样条能量配点法，广西力学学会(1981，3).
16. 焦兆平，解弹性薄板弯曲方程的样条函数最小二乘配点法，合肥工业大学硕士学位论文(1981，9).
17. 陈子桑，梁函数用于加权残数法解薄板小挠度及大挠度弯曲问题，同济大学硕士学位论文，(1981，10).
18. A. C.，沃耳密尔，《柔韧板与柔韧壳》，科学出版社 (1963).(原著为Волмир, A. C., Гибкие Пластиики и Оболочки, Гостехиздат Масква(1956).)
19. 谷芬毓，用最小二乘法配置有限元，二机部一院二所，1980年全国计算力学学术交流会会议论文.
20. 金瑞椿，加权余量法和一种高精度逐步积分格式，同济大学硕士学位论文，(1981，6).
21. 赵祖武，加权余量法在有限条元法中的应用，天津大学，1980年全国计算力学学术交流会会议论文.


# Recent Advances in the Method of Weighted Residuals on Solid Mechanics in China


Xu Ci-da

*(Dept. of Math. and Mech., Tongji Univ., Shanghai)*



### Abstract

This paper presents a review of research works in recent years of the method of weighted residuals(MWR) on solid mechanics in the People's Republic of China. MWR, being a kind of mathematical method by which approximate solutions of differential equations may be obtained. It is being applied extensively in the fields of fluid mechanics, heat transfer, etc., too. and it has also been recognized as having merits over other methods.