应用数学和力学，第3卷第6期（1982年11月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

关于最小余能原理的一个注记*

付 宝 连

（黑龙江齐齐哈尔市东北重型机械学院，1981年11月10日收到）

摘 要

本文给出一个非常简明的方法，这个方法能够证明最小余能原理等价于变形体的应移单值条件和位移边界条件.

最小余能原理等价于变形体的协调方程是早已解决了的弹性力学中的经典问题. von Kármán 和 Haar 曾有过不完整的证明；Hilbert 和Southwell 曾给出了完整的证明，但是证明过程比较冗长. 文献[1]、[3]叙述了利用Lagrange 乘子法的证明过程，这一过程比较简单.

本文给出一个新的证明方法，这一方法的过程简单、明瞭.

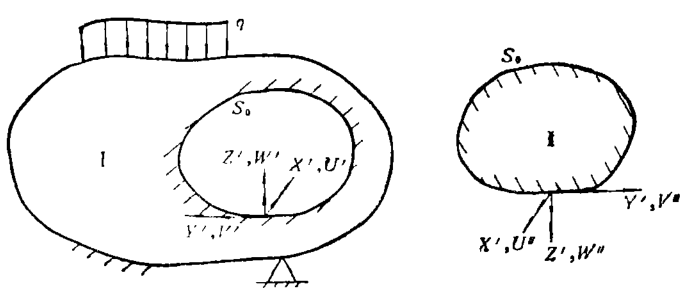
在小变形情况，对于满足平衡方程和静力边界条件的应力状态，我们有最小余能原理

$$\delta\left\{ \iiint_V V_c dV - \iint_{S_u} (\bar{U}X+\bar{V}Y+\bar{W}Z)d\Omega \right\} = 0 \qquad (1)$$

图1(a) 表示一实际受力情况的变形体，从中剖出一部分Ⅱ示于图1(b)；余留下的部分Ⅰ示于图1(a). 余留部分Ⅰ被剖表面上任意一点P处的表面力为X'，Y'，Z'；相应的位移分量为u'，v'，w'. 被剖出部分Ⅱ表面上同一点P处的表面力为$-X'$，$-Y'$，$-Z'$；相应的位移为u''，v''，w''. 于此两部分分别应用最小余能原理(1)，则有

$$\delta\iiint_{V_1} V_{1c}dV - \iint_{S_u}(\bar{U}\delta X+\bar{V}\delta Y+\bar{W}\delta Z)d\Omega + \iint_{S_0}(u'\delta X'+v'\delta Y'+w'\delta Z')d\Omega = 0 \qquad (2)$$

$$\delta\iiint_{V_2} V_{2c}dV - \iint_{S_0}(u''\delta X'+v''\delta Y'+w''\delta Z')d\Omega = 0 \qquad (3)$$



(a) (b)

图 1

* 钱伟长推荐.

将式(2),(3)相加，则有

$$\iint_{S_u}[(u''-u')\delta X'+(v''-v')\delta Y'+(w''-w')\delta Z']d\Omega=\delta\left\{\iiint_V V_c dV-\iint_{S_u}(\bar{U}X+\bar{V}Y+\bar{W}Z)d\Omega\right\} \tag{4}$$

若式(1)成立，则由于$\delta X'$，$\delta Y'$，$\delta Z'$是任意的和彼此独立的，于是有

$$\left.\begin{aligned} u'&=u'' \\ v'&=v'' \\ w'&=w'' \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

由于在变形体内的剖面是任意剖取的，而且剖面上的点P也是任意的，所以变形体内任意一点的位移都是单值的.

如取变形体表面的极薄层为部分Ⅰ，且令其最大厚度趋于零，则由式(2)可得

$$u'=\bar{U},\quad v'=\bar{V},\quad w'=\bar{W} \tag{6}$$

于是最小余能原理在变形体内等价于单值位移条件(5)及在表面上等价于位移边界条件(6)的等价性即被证明.

Southwell等证明的是最小余能原理等价于协调方程，过程要长一些；Lagrange乘子法证明的是最小余能原理等价于位移应变关系及位移边界条件，过程要简短一些. 本文则直接证明最小余能原理等价于位移单值条件而且过程很是简明.

协调方程是单值位移的要充条件（对于单连通体而言）. 位移的单值条件是问题最直接的提法，而本文直接证明的是位移的单值条件.

参 考 文 献

1. 钱伟长，《变分法及有限元》（上册），科学出版社，(1980).
2. 钱伟长、叶开沅，《弹性力学》，科学出版社，(1980).
3. 鹫津久一郎，《能量原理》（尹泽勇、江伯南译），中国工业出版社.

A Note on the Minimum Complementary Energy Theorem

Fu Bao-lian

(*Northeast Heavy Machinery Institute, Heilongjiang*)

Abstract

In this paper we give a very simple and clear method, which can prove that the minimum complementary energy theorem is equivalent to the condition of single-valued displacements and displacement boundary codition of the deformable body.