

小血管血流速度分布的一种计算方法*

林 撷 仙

(西北工业大学, 1981年9月2日收到)

摘 要

本文所提出的计算方法, 其基础是对血液流动微连续统模型作了一种边界条件的改进, 设想了血管内壁面上血细胞速度可能不为零. 对于由Eringen所提出的关于刚性圆管中稳态血液流动方程, 假设了血管内壁面上血细胞的旋转速度, 及血细胞旋转速度分布曲线在管轴处的斜率, 导出了计算血管中速度分布曲线的方法, 并将按此理论计算而得的曲线与Bugliarello和Hayden在实验中测得的分布曲线及由Turk, Sylvester和Ariman所提出的计算公式的结果相比较.

一、引 言

小血管介于毛细血管与大血管之间, 遍布人体, 主要起着输送血液的作用. 与其它血管一样, 管壁内外也存在着质量交换. 当血管中发生管壁血小板、脂肪沉积或管中形成血栓时, 与大血管相比, 发生在小血管中对人体健康将产生更严重的影响.

至今, 医学界仍然把血管中血液流动当作牛顿流, 认为血管中流速分布呈抛物线型. 近代研究表明如果用柱形管粘度计测量血液时, 则所测得的粘度与圆管直径有关: 当圆管直径大于1或2毫米时, 所测得的粘度与管径无关; 当管径小于1毫米时, 粘度随管径减小而减小^{[1][2]}. 事实上, 血液是一种在血浆中含有血球、蛋白质等粒子的悬浮液, 加上流动中血细胞的轴向集中, 管中质量分布极不均匀, 形成管内粘性系数的分布极不均匀. 这一点在小血管中尤为突出. 因而, 在小血管中的流动情况决不能按均匀粘性的牛顿流考虑, 必须提出小血管中相应的理想化的数学模型, 以便计算管中速度分布及其他.

经典的粘性流体动力学方程——Navier-Stokes方程是一组非线性偏微分方程. 应用时数学上困难极大, 更重要的是由于流动中血细胞的旋转和变形运动不可能用Navier-Stokes方程描述, 因而需要引入一种新的理论.

Eringen在1964年和1966年相继提出了一般微流体理论和微极流体理论^{[3][4]}. 一般微流体(simple micro-fluids)理论显示了由于流体微团的局部变形和微运动而出现的某种微观效应. 其中, 只呈现微旋效应和微旋惯性的流体叫做“微极流体”(micro-polar fluids)^[6]. 也即略去局部变形把血细胞看作刚性球形粒子, 而将血液看作含有刚性球形粒子的悬浮液. 由于在低剪切速率时红细胞的变形是可略的^[1], 因而微极流体理论可用于血液流动中. 这样应用的适用范围, 由Turk, Sylvester和Ariman根据Bugliarello和Sevilla实验结果计算后得出, 只要血管直径 d 与红血球直径之比大于5时(即血管直径为40微米以上时), 在血管中是可以应用微极流体理论进行计算的. 作者由于只看到Bugliarello的一组实验结果, 应用本

* 钱伟长推荐.

文计算方法, 所得结果与实验很符合^{*)}. 当血管直径与红血球直径之比小于 5 时, 此方法与实验结果能否很好符合还待进一步研究. Turk 等通过计算认为微极流体理论应用在血管直径为 100 微米左右 (约为血细胞直径的 12.5 倍) 中结果仍然良好^[6], 也即可用于人体小动脉和微小动脉中.

在经典的关于粘性流体的研究中, 常假设流体微团在固体壁面处的速度为零. Eringen 在将微极流体动力学方程应用于血管中时, 曾假设了管壁处流体微旋速度为零, 1962 年 Bugliarello 和 Hayden 利用微电影摄影机所摄的血管内血液流动情况, 证明了在血管内表面处红血球的自旋速度并不为零, 因而 Turk 等假设了血管内壁面上血流速度为零而微旋速度为常值 (等自旋条件) 的边界条件, 求出了刚性圆管中流体的速度分布和微旋速度分布.

Bugliarello 用血球比容为 $H=19.5\%$ 的血液在直径为 40 微米的刚性圆管中用电影测得血球速度分布如图 1 所示^[6]. 由于血液流动中血球的轴向集中, 实验中缺乏管壁附近的速度资料.

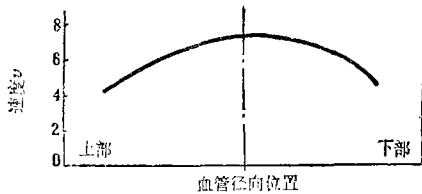


图 1 Bugliarello 和 Hayden 所测得的刚性血管流速分布曲线, 管径 $d=40$ 微米; 血球比容 $H=19.5\%$

从图中曲线的趋势, 对管壁处血球速度可以有两种猜想: 1. 设想血管中为湍流流动, 管壁附近为湍流附面层, 层内速度由零急速增加, 形成很陡的速度分布曲线. 但是, 在小血管中流动雷诺数很低, 正常人的血流与层流流动相近, 因而, 这种可能性较小; 2. 管壁处存在滑移, 即流速不为零. 由于血管壁面上只是在有破损时血小板、脂肪等物才容易在该处

沉积, 在一般情况下, 血细胞不易在血管壁面上停留, 加之血细胞和血管表面均带负电, 根据同性电荷的相斥性, 血细胞可能在血管壁面上不停留, 可见后一可能性较大. 假设壁面上速度不为零是可能比较实际的. 本文就是基于这种考虑提出相应的边界条件, 得到了新的计算方程.

二、刚性圆管中的血液流动

微极流体流场方程的矢量形式为:^{[4][5]}

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\begin{aligned} & (\lambda_s + 2\mu_s) \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{v} - (\mu_s + \mu_R) \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} + 2\mu_R \vec{\nabla} \times \vec{\omega} - \vec{\nabla} \pi_s + \rho \vec{f} \\ & = \rho \left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} - \vec{v} \times (\vec{\nabla} \times \vec{v}) + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (v^2) \right] \end{aligned} \quad (2.2)$$

$$(\alpha + \beta + \gamma) \vec{\nabla} \vec{\nabla} \cdot \vec{\omega} - \gamma \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{\omega} + 2\mu_R \vec{\nabla} \times \vec{v} - 4\mu_R \vec{\omega} + \rho \vec{l} = \rho j \vec{\omega} \quad (2.3)$$

其中: ρ ——流体质量密度;

\vec{v} ——流体速度矢量;

$\vec{\omega}$ ——流体微旋速度矢量;

π_s ——考虑了热运动的流体压力;

\vec{f} ——单位质量的体积力;

* 后来作者又对 Bugliarello 的其它实验结果进行计算, 其结果是令人满意的.

- \vec{l} ——单位质量的体积力偶;
 λ_s ——膨胀粘性系数;
 μ_s ——血浆粘性系数;
 μ_R ——旋转粘性系数;
 α, β, γ ——材料系数.

式中 ω 是 ω 按张量微分规则计算的.

为了求得血液稳定地流过刚性圆管时上述方程组的解, Eringen 作了如下假设:

1. 血液为不可压缩流体, $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$;
2. 略去体积力和体积力偶, 即 $\vec{f} = 0$, $l = 0$;
3. 流动为轴对称流动.

由此, 方程(2.1)自动满足, 通过整理和积分, 方程(2.2)和(2.3)分别化作:

$$v(\eta) = -\frac{2\mu_R R}{\lambda(\mu_s + \mu_R)} C_1 I_0(\lambda\eta) - \eta^2 v_c + C_2 \quad (2.4)$$

$$\omega(\eta) = C_1 I_1(\lambda\eta) + \eta \frac{v_c}{R} \quad (2.5)$$

其中: R ——圆管半径;

$\lambda = KR$ ——与血球比容 H 及旋转粘度有关的参量;

$\eta = \frac{r}{R}$ ——无量纲径向位置;

I_0 ——零阶第一类变型贝塞尔函数;

I_1 ——一阶第一类变型贝塞尔函数;

C_1, C_2 ——积分常数.

$$v_c = \frac{R^2}{4\mu_s} \left(-\frac{dP}{dz} \right) \quad (2.6)$$

在任一具体实验中 $\left(-\frac{dP}{dz} \right)$ 为沿管轴(z 向)的平均压力梯度, 它与管半径一样均为事先可测定的量, 所以, v_c 为一已知速度参数.

以上各式可详见文献[4]、[5].

为了得到适用于小血管中血液流动的解, 作者曾假设了各种边界条件, 通过具体计算, 发现选用下列形式的边界条件时, 对速度曲线的计算结果与实验测得的数据最符合.

自旋方程的边界条件为:

$$\omega(\eta) \Big|_{\eta=1} = a \frac{v_c}{R} \quad (2.7)$$

$$\frac{d\omega(\eta)}{d\eta} \Big|_{\eta=0} = b \frac{v_c}{R} \quad (2.8)$$

速度方程的边界条件为:

$$v(\eta) \Big|_{\eta=0} = A \quad (2.9)$$

其中, a 和 b 分别为小于1的两个正实常数, 而且 $a < b$; A 为管轴处实际速度值.

将边界条件(2.7)与(2.8)分别代入方程(2.5)及其导数式中, 可求得参数 λ 所应满足的方程式:

$$\frac{I_1(\lambda)}{\lambda} = \frac{1-a}{2(1-b)} \quad (2.10)$$

将求得的 λ 值代入边界条件(2.8)中, 得到:

$$C_1 = -\frac{2(1-b)}{\lambda} \frac{v_c}{R}$$

将所求得的 C_1 和 λ 值代入方程(2.5)中, 就得到了自旋速度的计算式 $\omega(\eta)$.

为了确定(2.4)式中的其余两个参数——旋转粘度系数 μ_R 和积分常数 C_2 , 现对速度在圆管截面上积分, 得出血液的体积流率:

$$Q = 2\pi R^2 \int_0^1 \eta v(\eta) d\eta$$

或写成平均速度形式:

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} = 2 \int_0^1 \eta v(\eta) d\eta$$

即得:

$$\bar{v} = C_2 - \frac{v_c}{2} - \frac{4\mu_R R}{\lambda^2(\mu_s + \mu_R)} C_1 I_1(\lambda) \quad (2.11)$$

如果血液具有表观粘度系数 μ_{app} , 在计算体积流率时, 可以把血液看作均匀牛顿流体, 体积流率可由下式计算:

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\mu_{app}} \left(-\frac{dP}{dz} \right)$$

而平均速度可由下式计算:

$$\bar{v} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{R^2}{8\mu_{app}} \left(-\frac{dP}{dz} \right)$$

由式(2.6)可知:

$$\bar{v} = \frac{\mu_s}{2\mu_{app}} v_c \quad (2.12)$$

所以, 若已知血液的表观粘度系数 μ_{app} , 就可由上式预知平均速度 \bar{v} .

将式(2.11)与边界条件(2.9)联立, 可求出 μ_R 和 C_2 .

$$\mu_R = \frac{\mu_s (\bar{v} + \frac{v_c}{2} - A)}{\frac{2RC_1}{\lambda} \left[1 - \frac{2}{\lambda} I_1(\lambda) \right] - \left(\bar{v} + \frac{v_c}{2} - A \right)} \quad (2.13)$$

$$C_2 = A + \frac{2\mu_R R}{\lambda(\mu_s + \mu_R)} C_1 \quad (2.14)$$

至此, 式(2.4)中所需要的参数 λ , C_1 , μ_R , C_2 已全部求出. 血浆粘度系数 μ_s 按 1.2 厘泊计算^{[11]51}. 将它们代入式(2.4)中即可得出血液流动速度计算公式, 据此, 即可计算出管内流速分布.

三、结果与讨论

图 2 表示了按上述计算方法所计算的曲线与 Bugliarello 在实验中所测得的速度分布曲线

的比较。由于血细胞在流动中的轴向集中，在血管壁面附近缺乏实验数据，故在图中用虚线表示。在Bugliarello的实验中，圆管是水平放置的，所测得的实验数据中，管的上半部速度分布与下半部略有不同，图中的实验曲线是按其上、下半部对应位置数据的平均值画出的。

由图2中可以看出，在离开管中心轴一段距离后，试验曲线与计算曲线基本上是平行的。在实测得试验数据的范围内平均误差约在4%左右。壁面上速度并不为零。壁面上速度按下式计算：

$$v(1) = -\frac{2\mu_R RC_1}{\lambda(\mu_s + \mu_R)} I_0(\lambda) - v_c + C_2 \quad (3.1)$$

由于在所看到的实验资料^[6]中没有具体说明该试验的体积流率或平均速度，本文计算中所需平均速度系根据了Bugliarello试验曲线推算而得。其中管壁附近缺乏试验数据处，假设了由壁面处速度为零开始线性地递增到最近的一个测试点。由于壁面附近速度较小，这种假设所造成的平均速度的误差可能是较小的。

本文中由平均速度计算 v_c 时，表观粘度系数 μ_{app} 是根据 Turk 等的文章中的 ν 值（一个与表观粘度有关的系数）推算后插值而得。

自旋速度 $\omega(\eta)$ 的边界条件取不同值时，对速度分布的影响很小。在对 a 分别等于0.1、0.2、0.3、0.4及 b 分别等于0.13、0.2、0.3、0.4、0.5、0.6、0.7的各种组合($a < b$)进行计算后发现，不论取哪一种组合，计算后的速度分布都比较接近。但是，与实验结果相比，所设之 a 越接近于 b ，则结果越好；反之， a 与 b 相差越大，结果越差。必须注意：所假设的 a 值必须小于 b ，否则就不可能求得 λ 值，这是由于一阶第一类贝塞尔函数的特性所决定。由此可知，自旋速度边界条件的选择须在今后从一系列对旋度测量的实验结果中，进一步研究找出规律。

重要的问题是要恰当选取速度式(2.4)的边界条件。

Turk 等选择了一般的粘性流体在固体壁面上速度为零的边界条件，在后面的讨论中可以看出，若按照Bugliarello试验曲线的平均速度，用 Turk 的方法所计算的速度分布曲线与试验曲线差距较大。为了找到适用的边界条件，作者分别选用了Bugliarello 实验曲线中的几个点分别作为方程(2.4)的边界条件，计算了速度分布曲线，发现以试验曲线中管轴上的速度作边界条件效果最好，误差最小。对于血球比容 H 较小的流动，管轴处的流速是可以测定的，如果有了几个试验资料时，可以根据各试验管轴处速度数据找出管轴处流速随血球比容 H 的变化规律，从而可以预测在新的血球比容时，管轴处的流速，进而计算管中速度的分布曲线。

Bugliarello 在试验中发现，当血球比容 H 较高时，由于血细胞的轴向集中，管轴处血细胞浓度高，实验中无法测得管轴处血流速度，此时，式(2.4)的边界条件可以用 $\eta = 0.4$ 处的数据（靠近管轴的第一个能测到的数据）代替，即

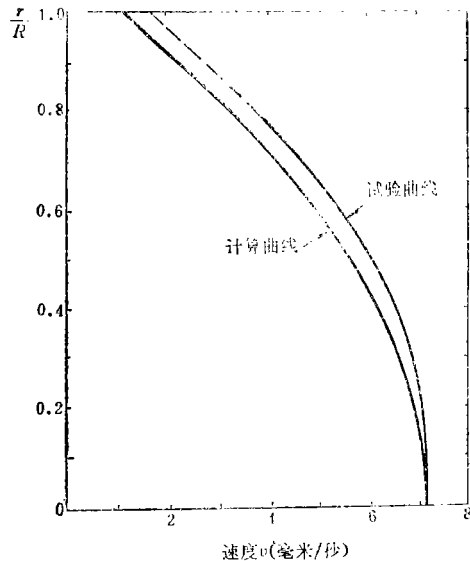


图2 计算结果与试验结果的比较
平均速度按 $\bar{v} = 4.22$ 毫米/秒计

$$v(\eta)|_{\eta=0.4}=B \quad (3.2)$$

其中: B 即 $\eta=0.4$ 处的速度值.

对于 $H=19.5\%$ 时, 应用条件(3.2)计算方程(2.4)所得的速度分布曲线示于图 3 中, 其平均误差约在 6% 左右.

以等自旋边界条件为基础的 Turk 等的方法, 从形式上看起来是稍许简单一些: 等自旋边界 ($-\frac{d\omega}{d\eta}|_{\eta=1} = 0$); 管壁处速度为零 ($v(1) = 0$). 但是如果用 Bugliarello 实验^[6] 加以检验时就会发现: (1) 若在 Turk 方法中使用与实验相同的平均速度 (按实验曲线推算的平均速度) 计算时, 速度分布曲线的平均误差将达 12.3%, 特别是在管轴处尤为显著, 见图 4, 管轴处误差可达 18%; (2) 若保留 Turk 等的方法中的等自旋边界条件及其所依据的在 $\eta=0.5$ 处自旋速度的值^[6], 而假设管轴处流速与实验值相等, 则在管壁处将得到负的速度

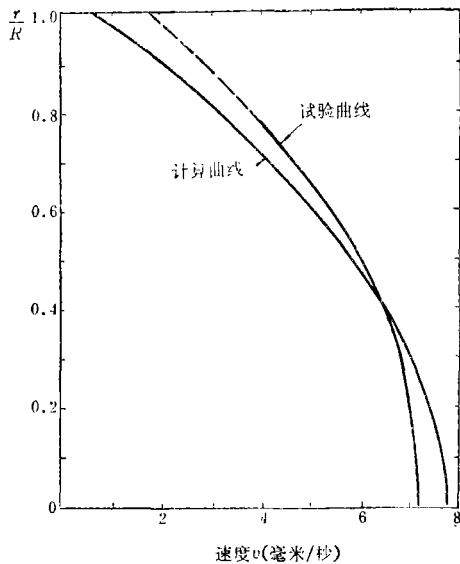


图 3 利用 $\eta=0.4$ 处实验数据计算的速度分布曲线与试验曲线的比较

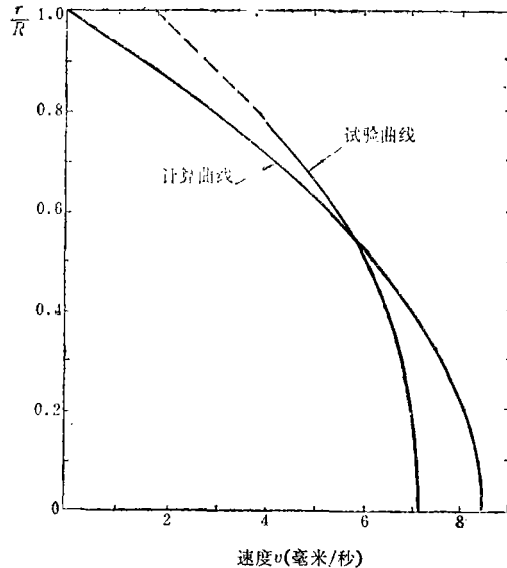


图 4 平均速度按 $\bar{v}=4.22$ 毫米/秒计时, 利用 Turk 等方法计算的结果与试验结果的比较

值, 这显然是不合理的; (3) 若用相同的平均速度 (指按 Bugliarello 实验所推算的平均速度)、相同的表观粘度 (指按 Turk 文中 ν 值所推算的表观粘度系数 μ_{app}) 分别用 Turk 方法和牛顿理论计算速度分布时, 发现两者几乎是全同的. 事实上, 计算表明, 在管轴处用 Turk 方法所算得的速度值 (最大速度) 比牛顿流的速度还略大一些. 由于两条曲线在管壁处速度值均为零, Turk 的速度分布曲线还略比牛顿速度分布曲线尖锐一些, 这种情况是与实际情况矛盾的^{[1][6]}.

本文所提出的方法, 其计算结果与 Bugliarello 实验结果很符合. 实际上, 作者根据实验曲线所算得的平均速度可能比实际平均速度小一些, 这是因为在计算时假设了管壁速度为零 (实际上可能并不为零), 及假设了壁面附近速度分布曲线呈直线形. 如果将所计算的平均速度再提高一些, 则所计算的速度分布曲线必将与实验结果符合得更好. 因此, 此方法在实际上是可行的. 问题是: (1) 旋度曲线尚未确定; (2) 管轴处速度值需预先确定. 但是, 这些问题都可以在今后有了几个实验的实验结果后, 设法找到它们的规律性, 从而可以预先确

定血液流过刚性小血管时的速度分布情况,为进一步研究弹性管壁中血液流动提供实际可用的基础。

参 考 文 献

1. Fung, Y. C., A Survey of the blood flow problem, *Advances in Applied Mechanics*, 11, (1971), 65-118.
2. Cokelet, G. R., The rheology of human blood, *Biomechanics, Its Foundations and Objectives*, (Editors Y. C. Fung, N. Perrone and M. Anliker) Prentice-Hall, New Jersey (1972), 63-104.
3. Eringen, A. C., Simple micro-fluids, *Int. J. Engng. Sci.*, 2(1964), 205-217.
4. Eringen, A. C., Theory of micro-polar fluids, *J. Math. Mech.*, 16(1966) 1-18.
5. Turk, M. A., N. D. Sylvester, and T. Ariman, An analysis of blood flow, *Development in Theoretical and Applied Mechanics*, 6(1972), 3-24.
6. Bugliarello, G. and J. W. Hayden, High-speed microcinematographic studies of blood flow in vitro, *Science*, 138(1962), 981-983.

A Calculation Method of Blood Flow Velocity Distribution in Smaller Blood Vessels

Lin Xie-xian

(Northwestern Polytechnical University, Xian)

Abstract

The calculation method presented in this paper is based on an improvement of boundary conditions for micro-continuum fluid model with blood flow assuming that the blood cell velocity at blood vessel wall is unequal to zero. As for steady state blood flow equation (flow in vitro—a rigid circular tube) presented by Eringen, the magnitude of the blood cell gyroscopic velocity at blood vessel wall and the slope of the blood cell gyroscopic velocity distribution curve at the axis of the blood vessel are assumed. From the above-mentioned assumptions the calculation method of velocity distribution curve in blood vessel is derived. The curve calculated by this method is compared with the test curve measured by Bugliarello and Hayden. The results were calculated by Turk, Sylvester, Ariman and this method is compared with each other, too.