应用数学和力学，第3卷第5期（1982年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

多重子结构装配的若干问题

钟万勰　李锡夔

（大连工学院工程力学研究所，1982年2月1日收到）

摘　　要

本文讨论了多重子结构装配中的一些关键问题．其中包括：子结构模式中的超级单元调用及其表示，子结构模式的节点序列及其各节点位移特征的自动形成．文中论述的思想已在JIGFEX系统中实现．

多重子结构的装配策略是多重子结构分析程序中的一个实际问题，但本文所论述的仅局限于JIGFEX系统中多重子结构装配策略的某些理论基础，而不涉及到JIGFEX程序的实际使用问题．对于程序使用者，掌握“JIGFEX使用说明”就可以了．

一、概　　述

在一个实际结构的多重子结构分析中，可以定义一系列子结构模式，子结构模式具有确定的结构几何形状、结构拓扑以及出口条件（出口节点集及表示它们位移特征的各出口节点的复合位移规格数等），而结构刚性则可按任意比例，甚至一任意的负比例变化[1,2]．这些子结构模式之间具有某种确定了的调用与被调用关系．一个子结构模式SU被另一较之级别为高的子结构模式SB调用，即实现为后者中的一个超级单元，并以其出口节点与子结构模式SB中的结构其余部分相拼接．一般地，一个子结构模式可以看作由若干基本单元（通常意义下的有限元）和若干超级单元所组成．

在一个子结构模式SB的结构描述中，用以表示基本单元、以及为施加节点位移约束条件等用途而准备的节点，称之为SB的自身节点，必须在SB中加以描述，即作为SB的原始数据输入自身节点的几何位置和节点位移特征．然而，SB中的超级单元是作为一个整体拼装上去的，它在SB中的几何位置描述，并不需要输入一组自身节点以表示超级单元出口节点序列在SB中相应的一组接口节点，这组接口节点的位移特征也不需要通过自身节点来描述．可以通过一个子结构模式的装配过程，自动完成它的结构描述，特别是它的节点描述，这将在文中着重加以讨论．

首先按自身节点序号，将各自身节点逐一装入SB结构空间，它们在装配过程中将互不重合，因此，在此过程中它们的几何位置及节点位移特征完全由原始数据输入而确定．其次，按各超级单元序号，逐个地将各超级单元装入SB的结构空间．对于某一个超级单元，设它是

由调用子结构模式SU而实现的，可以将SU固接上它的全局坐标系，并令SB与SU的全局坐标系重合，以作为此超级单元在SB的结构空间中的装配运动初始位置.然后通过两个坐标系之间的一定的按旋转、镜射、平移次序的装配运动，将SU坐落到它作为SB的一个超级单元所应处的位置上去.这个装配运动将用 $\psi,\theta,\varphi',u_0,v_0,w_0$ 六个数据表示：ψ，θ，φ'，用以描述旋转与镜射；ψ，θ是进动角和章动角，φ'是广义自旋角，

$$\varphi'=\begin{cases}\varphi & (|\varphi'|<360^\circ，无镜射变换)\\ \varphi+360^\circ & (|\varphi'|\geqslant 360^\circ，有镜射变换)\end{cases} \tag{1.1}$$

式中φ是自旋角，$0^\circ\leqslant\varphi<360^\circ$.$\psi$，$\theta$，$\varphi$被称为欧拉角.由这六个超级单元结构调用数据，可以确定超级单元各出口节点在SB中的位置，然而，作为一个装配过程，需要各出口节点逐一进入SB的结构空间.当超级单元的一个出口节点进入SB的结构空间之后，要与已进入SB的结构空间的节点序列——已有节点序列——中各已有节点作逐一匹配，以判定正进入的节点将重合到已有节点序列中的某一个上，还是将在SB的结构空间中新形成一个节点.对这两种情况，分别要解决的两个问题是：

1） 对于第一种情况，新进入SB结构空间的一个节点与已有节点序列中一个节点相重合，简称它是重复节点，重复节点作为已有节点序列中的一个节点，称之为已有节点，它在SB结构空间中已有了一个节点位移特征；而重复节点作为新进入的节点，称之为后入节点，它又自SU中带入了一个节点位移特征.怎样由已有节点与后入节点的位移特征构成重复节点的位移特征？需要注意的，所谓重复节点是在这种情况下，后入节点刚刚进入SB结构空间之后而尚未完成与SB结构空间中一个已有节点的位移特征装配时的一个临时名称，当重复节点的位移特征形成后，对于以后陆续进入SB结构空间的各超级单元节点，它又仍将作为已有节点序列中的一个已有节点.以后继续进入SB结构空间的超级单元节点还可不断地与它重合，每重合一次，就重新构成一次它的节点位移特征，然后又作为已有节点序列中一个普通的已有节点.

2） 对于第二种情况，在SB的结构空间中将新形成一个节点，称之为新增节点.怎样由自SU中带入的节点位移特征构成新增节点的位移特征？同样需注意的，当新增节点的位移特征形成后，它对于以后继续进入SB结构空间的各超级单元节点来说，也将成为已有节点序列中的一个了.

二、新增节点的位移特征

作为一个新增节点，它在子结构模式SU中具有的节点位移特征 NE [1:6]，是参考节点在SU中的节点相对坐标系表示的相应空间六个自由度的六个位移特征数.0，1，2，3和4等特征数被分别用以表示几何可动位移、独立位移、从位移（相关位移）、指定零位移和指定非零位移特征；同时，若有指定非零位移，则可用DE[1:6]表示相应指定位移值.当超级单元完成装配运动，SU的全局坐标系及各节点的相对坐标系也与SU一起完成了同样的装配运动，此时新增节点的SU中节点相对坐标系对于处理它在SU中的节点位移约束往往是必不可少的.因此，凡一个新增节点，一个统一的处理方法是，它在SB中相对于SB全局坐标系的相对坐标系沿用上述它在SU中的装配运动后的相对坐标系.同时，新增节点的位移特征NB[1:6]，DB[1:6]也可沿用NE[1:6]及DE[1:6].但同一坐标系相对于SU全局坐标系及

SB全局坐标系的取向不一，这一点是应当注意的.

令新增节点参考SU中节点相对坐标系及SU全局坐标系的节点线位移表示分别为 $\{U\}_{u_r}=\{u\ v\ w\}_{u_r}$ 和 $\{U\}_u=\{u\ v\ w\}_u$，而它参考SB全局坐标系的节点线位移表示为 $\{U\}_b=\{u\ v\ w\}_b$.若SU被调用为SB的超级单元的过程中不存在镜射变换，那末

$$\{U\}_b=[TO]^T\{U\}_u \tag{2.1}$$

如果存在镜射变换，则有

$$\{U\}_b=[TO]^T\{U\}'_u \tag{2.2}$$

$\{U\}'_u$是新增节点参考经过镜射变换后的左旋的SU全局坐标系的节点线位移，式中$[TO]^T$是

$$[TO]=\begin{cases}[\Phi][\Theta][\Psi] & (\text{当}|\varphi'|<360°)\\ [\Phi][\Theta][\Psi][RF] & (\text{当}|\varphi'|\geqslant 360°)\end{cases} \tag{2.3}$$

的转置.$[\Psi]$，$[\Theta]$，$[\Phi]$是由欧拉角 ψ，θ，φ计算的坐标变换阵. 镜射变换阵

$$[RF]=\begin{vmatrix}-1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} \tag{2.4}$$

另一方面，若不存在镜射变换，

$$\{U\}_{u_r}=[TC]_u\{U\}_u \tag{2.5a}$$

$[TC]_u$是一坐标变换阵，是新增节点在SU中的属性.如果存在镜射变换，则

$$\{U\}'_{u_r}=[TC]_u\{U\}'_u \tag{2.5b}$$

$\{U\}'_{u_r}$是新增节点参考SU中左旋的节点相对坐标系的线位移表示.因此，对于不存在镜射变换的情况，

$$\{U\}_{b_r}=\{U\}_{u_r}=[TC]_u[TO]\{U\}_b \tag{2.6}$$

式中$\{U\}_{b_r}$是新增节点参考SB中节点相对坐标系的线位移表示.而对于存在镜射变换的情况，

$$\{U\}_{b_r}=\{U\}_{u_r}=[RF]\{U\}'_{u_r}=[RF][TC]_u[TO]\{U\}_b \tag{2.7}$$

即约定将左旋的SU中节点相对坐标系由式(2.7)所示改为右旋坐标系后作为新增节点在SB中的节点相对坐标系.可合并写得

$$\{U\}_{b_r}=[TC]_b\{U\}_b \tag{2.8}$$

式中

$$[TC]_b=\begin{cases}[TC]_u[TO] & (\text{当}|\varphi'|<360°)\\ [RF][TC]_u[TO] & (\text{当}|\varphi'|\geqslant 360°)\end{cases} \tag{2.9}$$

$[TC]_b$即可表示新增节点在SB中的相对坐标系.对于角位移的变换，类似于式(2.8)的关系及式(2.9)依然成立；但若存在镜射变换，则参考SU中右旋及左旋的节点相对坐标系的角位移表示之间的转换矩阵是$[RF\theta]$而不是$[RF]$，$[RF\theta]$形如：

$$[RF\theta]=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{vmatrix} \tag{2.10}$$

并且注意到此时$NE[1:6]$及相应$DE[1:6]$是参考SU中左旋的节点相对坐标系表示的，因此若有指定非零位移特征，对于线位移$DE[1:3]$和角位移$DE[4:6]$必须分别乘以$[RF]$和$[RF\theta]$阵后，才能用以表示$DB[1:6]$.即

$$\left.\begin{aligned}DB[1:3]&=[RF]*DE[1:3]\\ DB[4:6]&=[RF\theta]*DE[4:6]\end{aligned}\right\} \tag{2.11}$$

三、重复节点的位移特征

重复节点作为SB中已有节点序列中的一个已有节点，它在SB中的节点位移特征可表示为

i) $NB[1:6]$；

ii) $DB(i)$ $(i\in DDB)$；

$$DDB=\{i|满足NB(i)=3或4\}$$

iii) 已有节点在SB中节点相对坐标系的取向，用它相对于SB全局坐标系的坐标变换阵$[TC]_b$表示.

重复节点作为SB中一个后入节点，当超级单元装配运动结束后，它自SU带入SB的节点位移特征可表示为

i) $NE[1:6]$；

ii) $DE(i)$ $(i\in DDE)$；

iii) 后入节点在SU中的节点相对坐标系的取向，可用它相对于SU全局坐标系的坐标变换阵$[TC]_u$表示.

重复节点作为一个节点，它在SB中的位移特征应以一组参数唯一地表示.必须首先将后入节点的位移特征变换到参考已有节点的SB中节点相对坐标系表示，为此要建立重复节点$\{U\}_{ur}$和$\{U\}_{br}$之间，$\{\theta\}_{ur}$和$\{\theta\}_{br}$之间的变换关系.简单地表示，有

$$\{U\}_{br}=[TR]_{bu}\{U\}_{ur} \tag{3.1}$$

$$\{\theta\}_{br}=[TR]_{bu}\{\theta\}_{ur} \tag{3.2}$$

其中

$$[TR]_{bu}=\begin{cases}[TC]_b[TO]^T[TC]_u^T[RF] & (当|\varphi'|\geqslant 360^\circ及线位移)\\ [TC]_b[TO]^T[TC]_u^T[RF\theta] & (当|\varphi'|\geqslant 360^\circ及角位移)\\ [TC]_b[TO]^T[TC]_u^T & (当|\varphi'|<360^\circ)\end{cases} \tag{3.3}$$

这里，同样需要注意的一个问题是，当存在镜射变换时，$NE[1:6]$及$DE[1:6]$是参考SU中左旋的相对坐标系表示的，因此，对于$DE(i)$ $(i\in DDE)$必须首先作形如式(2.7)中第二个等式及(2.10)的变换，然后，才能执行式(3.1)，(3.2)的变换.

对于重复节点上的已有节点，可以定义这样一个线位移空间和一个角位移空间，它们分别是已有节点的位移特征参数$NB[1:6]$，$DB(i)$ $(i\in DDE)$允许的所有可能的节点线位移和节点角位移的集合，分别用集合L_b和A_b表示.L_b的基底是沿已有节点在SB中相对坐标系三坐标轴正向的单位线位移向量$E_u=\{\vec{e}(1),\ \vec{e}(2),\ \vec{e}(3)\}$，$A_b$也可同样地表示.

相应$NB[1:6]$中不同的位移特征数，已有节点的线位移空间L_b和角位移空间A_b可分别表示为

$$L_b=L_{bf}+L_{bi}+L_{bd}+L_{ba} \tag{3.4}$$

$$A_b=A_{bf}+A_{bi}+A_{bd}+A_{ba} \tag{3.5}$$

L_{bf}，L_{bi}，L_{bd}，L_{ba}和A_{bf}，A_{bi}，A_{bd}，A_{ba}分别表示已有节点线位移空间和角位移空间中的自由位移子空间、独立位移子空间、从位移子空间和指定位移子空间，它们分别是L_b或A_b的一个子集，并且L_{bf}，L_{bi}，L_{bd}，L_{ba}（A_{bf}，A_{bi}，A_{bd}，A_{ba}）是L_b（A_b）的互不相交的子集，因

此它们是$L_b(A_b)$的一个划分.

类似地，对于重复节点上的后入节点，也可定义一个为NE [1:6] 和 $DE(i)$ $(i\in DDE)$所允许的线位移空间L_u和角位移空间A_u，L_u的基底是沿后入节点在SU中的右旋相对坐标系的三坐标轴的单位线位移 $E'_u=\{\vec{e}'(1),\ \vec{e}'(2),\ \vec{e}'(3)\}$，$A_u$ 也可同样地表示，并且可类似式(3.4)、(3.5)，以相应各子空间表示它的一个划分如下：

$$L_u=L_{uf}+L_{ui}+L_{ud}+L_{ua} \tag{3.6}$$

$$A_u=A_{uf}+A_{ui}+A_{ud}+A_{ua} \tag{3.7}$$

由已有节点和后入节点的位移空间，可以形成重复节点的线位移空间L和角位移空间A，它们也可分别划分为

$$L=L_f+L_i+L_d+L_a \tag{3.8}$$

$$A=A_f+A_i+A_d+A_a \tag{3.9}$$

下面将分别讨论L_i，L_d，L_a的建立，而相应的角位移子空间的建立方式将是类同的，就不再赘述.

3.1 重复节点指定线位移子空间L_A的建立

重复节点上的已有节点的指定线位移子空间可表示为

$$L_{ba}=\{\vec{V}_{lba}\} \tag{3.10a}$$

$$\vec{V}_{lba}=\sum_{i\in G_b} DB(i)*\vec{e}(i) \tag{3.10b}$$

$$G_b=\{i\,|\,\text{满足}NB(i)=3\quad\text{且}1\leqslant i\leqslant 3\} \tag{3.10c}$$

为简化表示，当G_b是空集时，约定不对式(3.10b)中$\sum\limits_{i\in G_b}$符号下求和，L_{ba}是一个空集.此约定适合以下类似的所有表示.

对重复节点上的后入节点，其指定线位移子空间可同样表示为

$$L_{ua}=\{\vec{V}_{lua}\} \tag{3.11a}$$

$$\vec{V}_{lua}=\sum_{i\in G_u} DE(i)*\vec{e}'(i) \tag{3.11b}$$

$$G_u=\{i\,|\,\text{满足}NE(i)=3\quad\text{且}1\leqslant i\leqslant 3\} \tag{3.11c}$$

以TR_{ji}表示$[TR]_{bu}$的j行i列元素$(i,j=1\sim3)$，则有

$$TR_{ji}=\vec{e}(j)*\vec{e}'(i)\qquad (i,j=1\sim3) \tag{3.12}$$

由此可得：

$$\left.\begin{aligned}&D_{be}(j)=\vec{V}_{lua}*\vec{e}(j)=\sum_{i\in G_u} DE(i)*TR_{ji}\qquad (j\in G_{ub})\\&G_{ub}=\{j\,|\,\text{满足各}i\in G_u\text{的}TR_{ji}\text{不为零的}j\}\end{aligned}\right\} \tag{3.13}$$

式中$D_{be}(j)$是后入节点的指定线位移约束在已有节点线位移空间的$\vec{e}(j)$方向的等价表示，而后入节点的指定线位移空间在已有节点线位移空间的映象则有表示为

$$\left.\begin{aligned}&L_{bea}=\{\vec{V}_{bea}\}\\&\vec{V}_{bea}=\sum_{j\in G_{ub}} D_{be}(j)*\vec{e}(j)\end{aligned}\right\} \tag{3.14}$$

定义集合

$$\Pi_{1a}=G_b \cup G_{ub} \tag{3.15}$$

重复节点的指定线位移子空间L_A可表示为

$$L_a=L_{ba} \cup L_{ua} \tag{3.16}$$

$$L_a=\{\vec{V}_{1a}\} \tag{3.17}$$

作为一个约定，要求$\vec{V}_{1a}$必须以E_u的一个子集作为它的基底.因此，为使$L_{ba}\subseteq L_a$和L_{ua}，$\subseteq L_a$，L_a的维数必须要等于Π_{1a}的元素个数m_n，并可由Π_{1a}唯一地确定E_u的一个子集作为它的基底.

另一方面，L_{ba}和L_{ua}为L_a的基底所实际提供的向量数m.可计算如下.L_{ba}为L_a的基底所提供的向量数为G_b中元素个数m_b，而L_{ua}在此基础上进一步为L_a的基底提供的向量数m_u并不一定是G_u中元素个数.令$E=\{1\ 2\ 3\}$，是相应于节点线位移空间的一个完全集，则$\sim G_b=E-G_b$. m_u的计算可应用元语言表述如下：

```
{m_u ← 0 ，令W = G_b以及～W = ～G_b}
"FOR"i=1"STEP"1"UNTIL"3"DO"
    {L ← 0 }
    "FOR"j=1"STEP" 1 "UNTIL"3"DO"
    {如果i ∈G_u ∧ j ∈～W ∧ DABS(TR_ij) > 0 ,
      则{m_u ← m_u + 1, L ← 1, W ← {j} + W}}
    "TEST"(L·EQ·1)"EXIT"
    "ENDFOR"
"ENDFOR"
```

由此可得$m_r \leftarrow m_b+m_u$，显然，应该满足$m_n=m_r$，才有可能构造出一个以E_u的一个子集为基底的L_a，使$L_{ba}\subseteq L_a$和$L_{ua}\subseteq L_a$.现可进一步表示L_a如下：

$$L_a=\{\vec{V}_{1a}\}$$

$$\vec{V}_{1a}=\begin{cases}\sum\limits_{i\in G_b} DB(i)*\vec{e}(i) & (\text{当}G_b=\Pi_{1a})\\ \sum\limits_{i\in G_b} DB(i)*\vec{e}(i)+\sum\limits_{k\in G_{ub}-G_b} DB(k)*\vec{e}(k) & (\text{当}G_b\subset\Pi_{1a})\end{cases} \tag{3.18}$$

式中$\sum\limits_{k\in G_{ub}-G_b}$符号下各$DB(k)$是待定的.

L_a在L_{ua}上的映象可表示成

$$D_{ua}(j)=\begin{cases}\sum\limits_{i\in G_b} DB(i)*TR_{ij} & (\text{当}G_b=\Pi_{1a})\\ \sum\limits_{i\in G_b} DB(i)*TR_{ij}+\sum\limits_{k\in G_{ub}-G_b} DB(k)*TR_{kj} & (\text{当}G_b\supset\Pi_{1a})\end{cases} \quad (j\in G_u) \tag{3.19}$$

由此方程组我们能解出$DB(k)$ $(k\in G_{ub}-G_b)$和检查指定位移的相容性.

3.2 重复节点的从线位移子空间Ld的建立

重复节点的从线位移子空间L_d可表示为

$$L_d=L_{bd}\cup L_{ud} \tag{3.20}$$

同样约定，L_d将取E_u的一个子集作为它的基底.

对于重复节点上的已有节点，L_{bd}可表示为

$$\left.\begin{aligned}&L_{bd}=\{\vec{V}_{lbd}\}\\&\vec{V}_{lbd}=\sum_{i\in H_b}f_m(i)*\vec{e}(i)\\&H_b=\{i\,|\,满足NB(i)=2\quad 且1\leqslant i\leqslant 3\}\end{aligned}\right\} \tag{3.21}$$

式中$f_m(i)$表示已有节点在$\vec{e}(i)$方向的线位移对其主节点M的位移的依从关系，它实际上是主从控制阵的一行乘以主节点位移向量，其有关公式可见[4].

后入节点作为重复节点的另一侧面，若是从节点，则其主节点在子结构模式SB中必是节点M，L_{ud}可表示为

$$\left.\begin{aligned}&L_{ud}=\{\vec{V}_{lud}\}\\&\vec{V}_{lud}=\sum_{i\in H_u}f'_m(i)*\vec{e}'(i)\\&H_u=\{i\,|\,满足NE(i)=2\quad 且1\leqslant i\leqslant 3\}\end{aligned}\right\} \tag{3.22}$$

将它转换到基底向量$\vec{e}(i)$ ($i=1$, 2, 3)，则重复节点作为一个节点,其从线位移子空间是

$$\left.\begin{aligned}&L_d=\{\vec{V}_{ld}\}\\&\vec{V}_{ld}=\sum_{j\in H_{ld}}f_m(j)*\vec{e}(j)\\&H_{ld}=H_b\cup H_u\end{aligned}\right\} \tag{3.23}$$

指定线位移和从线位移这二个不同的位移特征分别由$NB(k)$ ($k=1$, 2, 3) 中不同的数码3或2表示.必定有

$$L_a\cap L_d=\phi \tag{3.24}$$

事实上，必须首先满足

$$\left.\begin{aligned}&L_{ba}\cap L_{ud}=\phi\\&L_{bd}\cap L_{ua}=\phi\end{aligned}\right\} \tag{3.25}$$

这意味着，由已有节点指定线位移子空间L_{ba}到重复节点指定线位移子空间L_a，若有扩展的话，不能扩展到已有节点的从线位移子空间L_{bd}中去；或者说，由L_{bd}到L_d，若有扩展的话，也不能扩展到L_{ba}中去；它们只能扩展到已有节点的独立线位移子空间L_{bi}和自由线位移子空间L_{bf}中去.

3.3 重复节点独立线位移子空间的建立

如上所述，独立位移子空间可以被指定或从位移子空间所覆盖.故仅当重复节点的指定和从位移子空间已被形成即$NB[1:3]$已被修改后才能再形成重复节点的独立位移子空间，其过程与重复节点的指定位移和从位移子空间形成几乎相同，同时，它只能扩展到自由位移子空间中去，所不同的是独立位移子空间的基向量将不再限于一定是$\vec{e}(i)$，但必定要与L_a和L_d的基底正交.

上述关于子空间的扩展是有其力学意义的.当刚性约束被违反时将产生无限大的应变能，而独立位移意味着它是弹性约束以及仅产生有限值的应变能，而自由位移表示变形能为零.

很自然地导致位移规格的如下优先序：刚性约束优于独立位移，而独立位移优于自由位移．指定位移和从位移均表示刚性约束，因而它们不能互相覆盖．

上述内容已完全在大连工学院发展的多级子结构结构分析通用程序JIGFEX中实现．

参 考 文 献

1. 钟万勰，一个多用途的结构分析程序JIGFEX，(一)、(二)，大连工学院学报，3，4，(1977)．
2. 钟万勰，李锡夔等，结构分析与结构化程序设计——介绍JIGFEX，全国计算力学会议论文集，(1980)．
3. 钟万勰，李锡夔，多重子结构分析中结构数据文件的自动形成．
4. 钟万勰，李锡夔，多重子结构分析中的位移约束处理，大连工学院学报，2，(1981)．
5. Tremblay, J. P. and Manohar, R.，离散数学结构及其在计算机科学中的应用，大连工学院数力系程序设计教研室译．

On Some Problems in the Assembling of Multilevel Substructuring

Zhong Wan-xie Li Xi-kui

(Research Institute of Engineering Mechanics,

Dalian Institute of Technology, Dalian)

Abstract

In this paper, some essential problems in the assembling of multilevel substructuring are discussed, which include the referencing of superelements in the substructural module and the respective expression; the automatic formation of the node sequence as well as the qunlification number of these nodes in the substructural modules.

All the ideas mentioned above have been implemented in the general purpose structural analysis program JIGFEX.