应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

论非线性弹性理论的各种变分原理

戴 天 民

（西南交通大学和辽宁大学，1982年1月5日收到）

摘 要

本文从“全能量原理”出发推导出非线性弹性理论中各种可能的主要的变分原理的泛函，其中有几个是在我们所能见到的文献中还没有的．通过本文的推导过程，我们提出了胡海昌的专著［1］中表6.1的第11类和第6类变分原理不存在的猜想．

一、非线性弹性理论的完全的广义变分原理

本文采用郭仲衡[2][3]所用的记法和符号，必要时另作说明．本文以推导非线性弹性理论的各种可能的主要变分原理为主，并且为节省篇幅起见，这里只给出相应的变分泛函形式．线性弹性理论是其特殊情形，只在需要时提一下，不另写出相应的变分泛函形式．

设弹性体的区域为V，边界为A；在边界的A_u部分上给定位移：$\mathbf{u}|_{A_u}=\mathring{\mathbf{u}}$；在边界的另一部分上给定每单位面积的面力：$\mathbf{TN}|_{A_t}=\check{\mathbf{T}}\mathbf{N}$；每单位质量的体力为$\mathbf{f}$；$\rho_0$为质量密度；$\mathbf{F}$为变形梯度；$\mathbf{T}$为Kirchhoff应力张量；$\boldsymbol{\tau}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$为Piola应力张量；$\mathbf{E}$为应变张量．

现在定义弹性体的全能量泛函Φ如下：

$$\Phi=\int_V(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}):(\mathbf{u}\nabla)dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}\mathbf{N}dA \tag{1.1}$$

设应力张量$\mathbf{T}$和应变张量$\mathbf{E}$的关系是可逆的并引进应变能密度$\Sigma^r(\mathbf{E})$和余应变能密度$\Sigma(\mathbf{T})$，使得

$$\Sigma^r(\mathbf{E})+\Sigma(\mathbf{T})=\mathbf{T}:\mathbf{E} \tag{1.2}$$

已知[3]

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}):(\mathbf{u}\nabla)=\mathbf{E}:\mathbf{T}+\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T} \tag{1.3}$$

故由(1.2)可把上式写成下列形式：

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}):(\mathbf{u}\nabla)=\Sigma^r(\mathbf{E})+\Sigma(\mathbf{T})+\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T} \tag{1.4}$$

或写成下列推广的形式：

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}):(\mathbf{u}\nabla)=\mathbf{E}:\mathbf{T}-\Sigma(\mathbf{T})+\mathbf{T}:\mathbf{E}-\Sigma^r(\mathbf{E})+\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T} \tag{1.5}$$

把(1.5)代入(1.1)，则可把全能量泛函Φ改写成下列形式：

$$\Phi_0=\left\{\int_V[\mathbf{E}:\mathbf{T}-\Sigma^c(\mathbf{T})]dV-\int_V \mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}}dA\right\}$$
$$+\left\{\int_V[\mathbf{T}:\mathbf{E}-\Sigma^p(\mathbf{E})]dV+\int_V\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}dV\right.$$
$$\left.-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA\right\}=\Phi_0^p+\Phi_0^c \tag{1.6}$$

这便是本文的出发点．以后将会看到这样写法的目的．这里我们有意识地把全能量泛函Φ_0用花括弧分成Φ_0^p和Φ_0^c两部分，即

$$\Phi_0^p=\int_V[\mathbf{E}:\mathbf{T}-\Sigma\ (\mathbf{T})]dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}}dA \tag{1.7a}$$

$$\Phi_0^c=\int_V[\mathbf{T}:\mathbf{E}-\Sigma^p(\mathbf{E})]dV+\int_V\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}dV-\int_{A_t}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\ \mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA \tag{1.7b}$$

它俩分别表示弹性理论古典变分原理的总位能泛函和总余能泛函的推广形式．

下面列出非线性弹性理论的基本关系式和边界条件：

平衡条件：

平衡方程

$$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0=0\quad(\text{在}V\text{内}) \tag{1.8}$$

力边界条件

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}=\mathring{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}}\quad(\text{在}A_t\text{上}) \tag{1.9}$$

连续条件：

应变位移关系

$$\mathbf{E}=\frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]\quad(\text{在}V\text{内}) \tag{1.10}$$

位移边界条件

$$\mathbf{u}=\mathring{\mathbf{u}}\quad(\text{在}A_u\text{上}) \tag{1.11}$$

本构关系：

应变能形式

$$\mathbf{T}=\frac{d\Sigma^p(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}\quad(\text{在}V\text{内}) \tag{1.12a}$$

余应变能形式

$$\mathbf{E}=\frac{d\Sigma^c(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}\quad(\text{在}V\text{内}) \tag{1.12b}$$

现从弹性体的全能量泛函Φ_0推导广义全能量泛函$\overset{*}{\Phi}_0$．此时广义全能量泛函的独立变量是$\mathbf{u}$，$\mathbf{E}$，$\mathbf{T}$，它们共有15个分量．它们必须满足上列基本关系式和边界条件(1.8)—(1.12)．这是一个在15个约束条件下的条件极值问题．为此可以采用钱伟长[4]于1964年提出的拉格朗日乘子法．引入待定的拉格朗日乘子：$\boldsymbol{\sigma}$（定义在V内的对称张量场），$\boldsymbol{\xi}$（定义在A_u上的向量场），$\boldsymbol{\eta}$（定义在V内的向量场）和$\boldsymbol{\zeta}$（定义在A_t上的向量场），它们也共有15个分量．

把平衡条件(1.8)和(1.9)及连续条件(1.10)和(1.11)合并到弹性体的全能量泛函Φ_0以后，则得广义全能量泛函$\overset{*}{\Phi}_0$如下：

$$\overset{*}{\Phi}_0=\left\{\int_V[\mathbf{E}:\mathbf{T}-\Sigma^c(\mathbf{T})]dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}}dA\right.$$

$$\left.+\int_V\left[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))-\mathbf{E}\right]:\boldsymbol{\sigma}dV+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\xi}dA\right\}$$

$$+\left\{\int_V[\mathbf{T}:\mathbf{E}-\Sigma^p(\mathbf{E})]dV+\int_V\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}dV\right.$$

$$-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA+\int_V\boldsymbol{\eta}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0]dV$$

$$\left.+\int_{A_t}\boldsymbol{\zeta}\cdot(\mathring{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}}-\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})dA\right\}$$

$$=\overset{*}{\Phi}{}_0^c+\overset{*}{\Phi}{}_0^p \tag{1.13}$$

问题的真正解可由(1.13)定义的广义全能量泛函的驻值条件给出．此时广义全能量泛函$\overset{*}{\Phi}_0$中的独立变量是$\mathbf{u}$，$\mathbf{E}$，$\mathbf{T}$，$\boldsymbol{\sigma}$，$\boldsymbol{\xi}$，$\boldsymbol{\eta}$，$\boldsymbol{\zeta}$．对这些变量进行变分，则有

$$\delta\overset{*}{\Phi}_0=\delta\overset{*}{\Phi}{}_0^c+\delta\overset{*}{\Phi}{}_0^p \tag{1.14}$$

其中

$$\delta\overset{*}{\Phi}{}_0^c=\int_V\left[\mathbf{E}-\frac{d\Sigma^c(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}\right]:\delta\mathbf{T}dV+\int_V(\mathbf{T}-\boldsymbol{\sigma}):\delta\mathbf{E}dV$$

$$+\int_V\left[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))-\mathbf{E}\right]:\delta\boldsymbol{\sigma}+\int_V[(\delta\mathbf{u}\nabla):\boldsymbol{\sigma}$$

$$+(\delta\mathbf{u}\nabla):(\mathbf{u}\nabla)\cdot\boldsymbol{\sigma}]dV-\int_V\delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t}\delta\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}}dA$$

$$-\int_{A_u}\delta\mathbf{u}\cdot\boldsymbol{\xi}dA+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\delta\boldsymbol{\xi}dA \tag{1.5a}$$

$$\delta\overset{*}{\Phi}{}_0^p=\int_V\left[\mathbf{T}-\frac{d\Sigma^p(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}\right]:\delta\mathbf{E}dV+\int_V\left[\mathbf{E}+\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)\right]:\delta\mathbf{T}dV$$

$$+\int_V[(\delta\mathbf{u}\nabla):(\mathbf{u}\nabla)]\cdot\mathbf{T}dV+\int_V\delta\boldsymbol{\eta}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0]dV$$

$$-\int_V\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}):(\boldsymbol{\eta}\nabla)dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA+\int_A\boldsymbol{\eta}\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA$$

$$+\int_{A_u}\boldsymbol{\eta}\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA+\int_{A_t}\delta\boldsymbol{\zeta}\cdot(\mathring{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}}-\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})dA$$

$$-\int_{A_t}\boldsymbol{\zeta}\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA \tag{1.15b}$$

但是

$$\int_V[(\delta\mathbf{u}\nabla):\boldsymbol{\sigma}+(\delta\mathbf{u}\nabla):((\mathbf{u}\nabla)\cdot\boldsymbol{\sigma})]dV=\int_A\delta\mathbf{u}\cdot\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{N}dA$$

$$-\int_V\delta\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\nabla]dV\qquad\text{(参阅[3])} \tag{1.16}$$

而

$$-\int_V\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}):(\boldsymbol{\eta}\nabla)dV=-\int_V(\delta\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}):(\boldsymbol{\eta}\nabla)dV-\int_V(\mathbf{F}\cdot\delta\mathbf{T}):(\boldsymbol{\eta}\nabla)dV$$

$$=-\int_V(\nabla\boldsymbol{\eta}\cdot\delta\mathbf{F}):\mathbf{T}dV-\int_V(\nabla\boldsymbol{\eta}\cdot\mathbf{F}):\delta\mathbf{F}dV$$

$$=-\int_V[\nabla\eta\cdot\delta(\mathbf{I}+\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}dV-\int_V[\nabla\eta\cdot(\mathbf{I}+\mathbf{u}\nabla)]:\delta\mathbf{T}dV$$

$$=-\int_V[(\delta\mathbf{u}\nabla):(\eta\nabla)]\cdot\mathbf{T}dV-\int_V[\nabla\eta+(\nabla\eta)\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\delta\mathbf{T}dV \tag{1.17}$$

把(1.16)和(1.17)分别代入(1.15a)和(1.15b)内并把结果稍加整理，则可把(1.14)写成下列形式：

$$\delta\overset{*}{\Phi}_0=\delta\overset{*}{\Phi}{}_0^p+\delta\overset{*}{\Phi}{}_0^c$$

$$=\Big\{\int_V\Big[\mathbf{E}-\frac{d\Sigma^c(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}\Big]:\delta\mathbf{T}dV+\int_V(\mathbf{T}-\boldsymbol{\sigma}):\delta\mathbf{E}dV+\int_V\Big[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla$$

$$+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))-\mathbf{E}\Big]:\delta\boldsymbol{\sigma}dV-\int_V\delta\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0]dV$$

$$+\int_{A_t}\delta\mathbf{u}\cdot(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{N}-\mathring{\mathbf{T}}_N)dA+\int_{A_u}\delta\mathbf{u}\cdot(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{N}-\boldsymbol{\xi})dA$$

$$+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\delta\boldsymbol{\xi}\,dA\Big\}+\Big\{\int_V\Big[\mathbf{T}-\frac{d\Sigma^p(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}\Big]:\delta\mathbf{E}dV$$

$$+\int_V[(\delta\mathbf{u}\nabla):(\mathbf{u}-\boldsymbol{\eta})\nabla]\cdot\mathbf{T}dV+\int_V[\mathbf{E}-(\nabla\boldsymbol{\eta}+(\nabla\boldsymbol{\eta})\cdot(\mathbf{u}\nabla)$$

$$-\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))]:\delta\mathbf{T}dV+\int_V\delta\boldsymbol{\eta}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0]dV$$

$$+\int_{A_u}(\boldsymbol{\eta}-\mathring{\mathbf{u}})\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA+\int_{A_t}\delta\boldsymbol{\zeta}\cdot(\mathring{\mathbf{T}}_N-\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})dA$$

$$+\int_{A_t}(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta})\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA\Big\} \tag{1.18}$$

考虑到(1.18)中的 $\delta\mathbf{u}$，$\delta\mathbf{E}$，$\delta\mathbf{T}$，$\delta\boldsymbol{\sigma}$，$\delta\boldsymbol{\xi}$，$\delta\boldsymbol{\eta}$，$\delta\boldsymbol{\zeta}$ 都是做为独立变量的变分，故得下列两组对应的条件：

位能型		余能型	
$\mathbf{E}=\dfrac{d\Sigma^c(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}$	(在V内)	$\mathbf{T}=\dfrac{d\Sigma^p(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}$	(在V内)
$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{T}$	(在V内)	$(\mathbf{u}-\boldsymbol{\eta})\nabla=0$	(在V内)
$\mathbf{E}=\frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]$	(在V内)	$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0=0$	(在V内)
$(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0=0$	(在V内)	$\mathbf{E}=\frac{1}{2}[\nabla\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\eta}\nabla+2(\nabla\boldsymbol{\eta})\cdot(\mathbf{u}\nabla)-(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]$	(在V内)
$\mathbf{u}=\mathring{\mathbf{u}}$	(在A_u上)	$\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}=\mathring{\mathbf{T}}_N$	(在A_t上)
$\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{N}=\mathring{\mathbf{T}}_N$	(在A_t上)	$\boldsymbol{\eta}=\mathring{\mathbf{u}}$	(在A_u上)
$\boldsymbol{\xi}=\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{N}$	(在A_u上)	$\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\eta}$	(在A_t上)
(1.19a)		(1.19b)	

由此可以确定所有拉格朗日乘子的物理意义，即：$\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{T}$，$\boldsymbol{\xi}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}$，$\boldsymbol{\eta}=\mathbf{u}$，$\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{u}$. 于是两组条件(1.19a)和(1.19b)表示完全对应的条件，这些条件正是非线性弹性理论的全部基本关系式和边界条件(1.8)—(1.12). 把已经确定的拉格朗日乘子代回广义全能量泛函的变分 $\delta\overset{*}{\Phi}_0$，则有

$$\delta\overset{*}{\Phi}_0=\left\{\int_V\left[\mathbf{E}-\frac{d\Sigma^c(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}\right]:\delta\mathbf{T}dV+\int_V\left[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))-\mathbf{E}\right]:\delta\mathbf{T}dV\right.$$
$$-\int_V\delta\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0]dV+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA$$
$$\left.+\int_{A_t}\delta\mathbf{u}\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}-\mathring{\mathbf{T}}_N)dA\right\}+\left\{\int_V\left[\mathbf{T}-\frac{d\Sigma^p(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}\right]:\delta\mathbf{E}dV\right.$$
$$+\int_V\left[\mathbf{E}-\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))\right]:\delta\mathbf{T}dV+\int_V\delta\mathbf{u}[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}$$
$$\left.+\mathbf{f}\rho_0]dV+\int_{A_t}\delta\mathbf{u}\cdot(\mathring{\mathbf{T}}_N-\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})dA+\int_{A_u}(\mathbf{u}-\mathring{\mathbf{u}})\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA\right\}$$
$$=\delta\overset{*}{\Phi}{}_0^p+\delta\overset{*}{\Phi}{}_0^c \tag{1.20}$$

实际上，由于

$$\mathbf{T}:\delta\mathbf{E}+\mathbf{E}:\delta\mathbf{T}=\frac{d\Sigma^p(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}:\delta\mathbf{E}+\frac{d\Sigma^c(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}:\delta\mathbf{T} \tag{1.21}$$

确实

$$\delta\overset{*}{\Phi}{}_0^p+\delta\overset{*}{\Phi}{}_0^c=\delta\overset{*}{\Phi}_0=0 \tag{1.22}$$

显然，它包括

$$\delta\overset{*}{\Phi}{}_0^p=0 \tag{1.23a}$$

$$\delta\overset{*}{\Phi}{}_0^c=0 \tag{1.23b}$$

它俩分别是非线性弹性理论的完全的广义位能和广义余能驻值变分原理.

把已经确定的拉格朗日乘子代回广义全能量泛函(1.13)，则有

$$\overset{*}{\Phi}{}_0^p=\int_V[\mathbf{E}:T-\Sigma^c(\mathbf{T})]dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_NdA$$
$$+\int_V\left[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))-\mathbf{E}\right]:\mathbf{T}dV$$
$$+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA \tag{1.24a}$$

$$\overset{*}{\Phi}{}_0^c=\int_V[\mathbf{T}:\mathbf{E}-\Sigma^p(\mathbf{E})]dV+\int_V\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}dV$$
$$-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA+\int_V\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0]dV$$
$$+\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot(\mathring{\mathbf{T}}_N-\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})dA \tag{1.24b}$$

这是从形式上所能推出的非线性弹性理论的完全的广义位能和广义余能变分原理的泛函. 实际上，(1.24a)归化为下列形式:

$$\overset{*}{\Phi}{}_{0R}^p=-\int_V\Sigma^c(\mathbf{T})dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_NdA+\int_V\left[\frac{1}{2}[\nabla\mathbf{u}\right.$$
$$+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}dV+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA \tag{1.25}$$

这便是鹫津久一郎[6]给出的广义变分原理的泛函；在线性弹性理论中上式便是 Reissner原来提出的形式.

由此可见，从形式上似乎是可以从(1.24a)找到[1]中表6.1的第11类变分原理，但实际上并没有能够达到原来的目的. 同时也可以说明，直到目前为止，(1.24b) 是弹性理论中真正完全的广义变分原理的泛函，亦即所有其它的变分泛函都不能像 (1.24b) 那样能够完整地反映物理问题的全部客观规律.

线性弹性理论的变分泛函形式 (1.24b) 早已被胡海昌和鹫津久一郎先后提出，后来大家常把这类变分原理称为胡海昌-鹫津久一郎广义变分原理[1]；钱伟长[4]于 1978 年首先给出了非线性弹性理论的这类完全的广义变分泛函，即(1.24b).

二、非线性弹性理论的各种不完全的互补的广义位能和广义余能变分泛函

1. 不完全的广义位能和广义余能变分泛函之一 (事先分别满足互补的本构关系的情况)

在(1.13)中取

$$\mathbf{E}:\mathbf{T}-\Sigma^{c}(\mathbf{T})=\Sigma^{p}(\mathbf{E}) \tag{2.1a}$$

和

$$\mathbf{E}:\mathbf{T}-\Sigma^{p}(\mathbf{E})=\Sigma^{c}(\mathbf{T}) \tag{2.1b}$$

则得下列一对互补*的变分泛函：

$$\overset{*}{\Phi}{}_1^p=\int_V \Sigma^{p}(\mathbf{E})dV-\int_V \mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0\,dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}}dA+\int_V\Big[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))$$
$$-\mathbf{E}\Big]:\boldsymbol{\sigma}dV-\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\boldsymbol{\xi}dA \tag{2.2a}$$

$$\overset{*}{\Phi}{}_1^c=\int_V \Sigma^{c}(\mathbf{T})dV+\int_V\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA$$
$$+\int_V\boldsymbol{\eta}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0]dV+\int_{A_t}\boldsymbol{\zeta}\cdot(\mathring{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}}-\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})dA \tag{2.2b}$$

对独立变量进行变分，则得

$$\delta\overset{*}{\Phi}{}_1^p=\int_V\Big[\frac{d\Sigma^{p}(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}-\boldsymbol{\sigma}\Big]:\delta\mathbf{E}dV+\int_V\Big[\frac{1}{2}\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))$$
$$-\mathbf{E}\Big]:\delta\boldsymbol{\sigma}dV-\int_V[(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0]\cdot\delta\mathbf{u}dV+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\delta\boldsymbol{\xi}dA$$
$$+\int_{A_t}\delta\mathbf{u}\cdot(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{N}-\mathring{\mathbf{T}}_{\mathrm{N}})dA+\int_{A_u}\delta\mathbf{u}\cdot(\mathbf{F}\cdot\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{N}-\boldsymbol{\xi})dA \tag{2.3a}$$

$$\delta\overset{*}{\Phi}{}_1^c=\int_V\Big[\frac{d\Sigma^{c}(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}-(\nabla\boldsymbol{\eta}+(\nabla\boldsymbol{\eta})\cdot(\mathbf{u}\nabla)-\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))\Big]:\delta\mathbf{T}dV$$

* 本文中“互补的泛函”一词意指这一对泛函在互补条件下反映相同的物理问题的客观规律.

$$+\int_V \delta\boldsymbol{\eta}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0]dV+\int_{A_t}\delta\boldsymbol{\zeta}\cdot(\mathring{\mathbf{T}}_N-\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})dA$$

$$+\int_{A_u}(\boldsymbol{\eta}-\mathring{\mathbf{u}})\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA+\int_{A_t}(\boldsymbol{\eta}-\boldsymbol{\zeta})\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA \tag{2.3b}$$

于是驻值条件给出下列两组对应的条件：

位能形式		余能形式	
$\dfrac{d\Sigma^p(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}=\sigma$	(在V内)	$\dfrac{d\Sigma^c(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}=\varepsilon$	(在V内)
$(\mathbf{F}\cdot\sigma)\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0=0$	(在V内)	$\varepsilon=\dfrac{1}{2}[(\nabla\boldsymbol{\eta}+\boldsymbol{\eta}\nabla+2(\nabla\boldsymbol{\eta})\cdot(\mathbf{u}\nabla)-(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]$	(在V内)
$\mathbf{E}=\dfrac{1}{2}[\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]$	(在V内)	$(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0=0$	(在V内)
$\mathbf{u}=\mathring{\mathbf{u}}$	(在A_u上)	$\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}=\mathring{\mathbf{T}}_N$	(在A_t上)
$\mathbf{F}\cdot\sigma\cdot\mathbf{N}=\mathring{\mathbf{T}}_N$	(在A_t上)	$\boldsymbol{\eta}=\mathring{\mathbf{u}}$	(在A_u上)
$\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{F}\cdot\sigma\cdot\mathbf{N}$	(在A_t上)	$\boldsymbol{\zeta}=\boldsymbol{\eta}$	(在A_t上)
(2.4a)		(2.4b)	

由(2.4a)和(2.4b)可见，这里必须利用事先假定的互补的本构关系，即$\dfrac{d\Sigma^p(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}=\mathbf{T}$和$\dfrac{d\Sigma^c(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}=\mathbf{E}$，才能确定所有的拉格朗日乘子的物理意义．于是得$\varepsilon=\mathbf{E}$，$\sigma=\mathbf{T}$，$\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}$，$\boldsymbol{\eta}=\mathbf{u}$，$\boldsymbol{\zeta}=\mathbf{u}$．

把已经确定的拉格朗日乘子代回(2.2a)和(2.2b)，则得下列一对互补的广义位能和广义余能变分泛函：

$$\overset{*}{\Phi}{}^p_1=\int_V\Sigma^p(\mathbf{E})\,dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_NdA+\int_V\Big[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))$$

$$-\mathbf{E}\Big]:\mathbf{T}dV+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}\,dA \tag{2.5a}$$

$$\overset{*}{\Phi}{}^c_1=\int_V\Sigma^c(\mathbf{T})\,dV+\int_V\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}\,dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}\,dA$$

$$+\int_V\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0]\,dV+\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot(\mathring{\mathbf{T}}_N-\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})dA \tag{2.5b}$$

此时易证下列互补关系成立：

$$\overset{*}{\Phi}{}^p_1+\overset{*}{\Phi}{}^c_1=0 \tag{2.6}$$

事实上，在(2.5a)中的独立变量是$\mathbf{u}$和$\mathbf{T}$．尽管$\mathbf{E}$也在泛函中出现，但它不是独立的（参阅[2]），故本文把这种情况称为拟完全的，以示有别于前述完全的情况以及下面就要提到的其它各种不完全的情况．

2．不完全的广义位能和广义余能变分泛函之二（事先分别满足应变位移关系和平衡方程的情况）

此时可直接由(1.24a)和(1.24b)写出下列一对互补的变分泛函：

$$\overset{*}{\Phi}{}_2^p=\int_V [\mathbf{E}:\mathbf{T}-\Sigma^c(\mathbf{T})]dV-\int_V \mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_N dA$$

$$+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}\,dA \tag{2.7a}$$

$$\overset{*}{\Phi}{}_2^c=\int_V [\mathbf{T}:\mathbf{E}-\Sigma^p(\mathbf{E})]\,dV+\int_V \frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}dV$$

$$-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA+\int_{At}\mathbf{u}\cdot(\mathring{\mathbf{T}}_N-\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})dA \tag{2.7b}$$

易证下列互补关系成立：

$$\overset{*}{\Phi}{}_2^p+\overset{*}{\Phi}{}_2^c=0 \tag{2.8}$$

本文以此为例说明这对变分泛函(2.7a)和(2.7b)的互补性，其它情况不再赘述．

对(2.7a)和(2.7b)进行变分并考虑到[2]

$$\int_V \mathbf{T}:\delta\mathbf{E}\,dV=\int_V(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\delta\mathbf{u})\cdot\nabla\,dV-\int_V\delta\mathbf{u}\cdot(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla dV \tag{2.9}$$

和

$$\int_V[\nabla\mathbf{u}\cdot(\delta\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}\,dV=\int_V\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}):\mathbf{u}\nabla\,dV-\int_V[\nabla\mathbf{u}+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\delta\mathbf{T}\,dV \tag{2.10}$$

则可写出下列两式：

$$\delta\overset{*}{\Phi}{}_2^p=\int_V\left[\mathbf{E}-\frac{d\Sigma^c(\mathbf{T})}{d\mathbf{T}}\right]:\delta\mathbf{T}dV-\int_V[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0]\cdot\delta\mathbf{u}\,dV$$

$$+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}\,dA+\int_{A_t}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}-\mathring{\mathbf{T}}_N)\cdot\delta\mathbf{u}\,dA=0 \tag{2.11a}$$

$$\delta\overset{*}{\Phi}{}_2^c=\int_V\left[\mathbf{T}-\frac{d\Sigma^p(\mathbf{E})}{d\mathbf{E}}\right]:\delta\mathbf{E}dV-\int_V\left[\mathbf{E}-\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))\right]:\delta\mathbf{T}dV$$

$$+\int_{A_t}\delta\mathbf{u}\cdot(\mathring{\mathbf{T}}_N-\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})\,dA+\int_{A_u}(\mathbf{u}-\mathring{\mathbf{u}})\cdot\delta(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\mathbf{N}dA=0 \tag{2.11b}$$

由此可见，在事先满足应变位移关系的条件下，$\overset{*}{\Phi}{}_2^p$所反映的物理客观规律是余应变能形式的本构方程、平衡方程和两个边界条件；而在事先满足平衡方程的条件下，$\overset{*}{\Phi}{}_2^c$所反映的物理客观规律是应变能形式的本构方程、应变位移关系和两个边界条件．

3. 不完全的广义位能和广义余能变分泛函之三（事先分别满足位移边界条件和力边界条件的情况）

此时可直接由(1.24a)和(1.24b)写出下列一对互补的变分泛函：

$$\overset{*}{\Phi}{}_3^p=\int_V\left[\mathbf{E}:\mathbf{T}-\Sigma^c(\mathbf{T})\right]dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0 dV-\int_{At}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_N dA$$

$$+\int_V\left[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))-\mathbf{E}\right]:\mathbf{T}dV \tag{2.12a}$$

$$\overset{*}{\Phi}{}_3^c=\int_V[\mathbf{T}:\mathbf{E}-\Sigma^p(\mathbf{E})]dV+\int_V\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}dV$$
$$-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA+\int_V\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0]dV \tag{2.12b}$$

在这种情况下，实际上，(2.12a)归化为下列形式：

$$\overset{*}{\Phi}{}_{3R}^p=-\int_V\Sigma^c(\mathbf{T})dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_NdA$$
$$+\int_V\frac{1}{2}\Big[\nabla\mathbf{u}+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)\Big]:\mathbf{T}dV \tag{2.13}$$

于是，本文原来企图用(2.12a)给出[1]中表6.1的第6类变分原理的目的也没有达到.

4. 不完全的广义位能和广义余能变分泛函之四 （事先分别满足应变位移关系和位移边界条件及平衡方程和力边界条件的情况）

此时可直接由(1.24a)和(1.24b)写出下列一对互补的变分泛函：

$$\overset{*}{\Phi}{}_4^p=\int_V\Big[\mathbf{E}:\mathbf{T}-\Sigma^c(\mathbf{T})\Big]dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_NdA \tag{1.7a}$$

$$\overset{*}{\Phi}{}_4^c=\int_V[\mathbf{T}:\mathbf{E}-\Sigma^p(\mathbf{E})]dV-\int_V\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}dV$$
$$-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA \tag{1.7b}$$

易证下列互补关系成立：

$$\overset{*}{\Phi}{}_4^p+\overset{*}{\Phi}{}_4^c=0 \tag{2.14}$$

5. 不完全的广义位能和广义余能变分泛函之五 （事先分别满足余应变能形式的本构关系和位移边界条件及应变能形式的本构关系和力边界条件的情况）

此时可直接由(2.5a)和(2.5b)写出下列一对互补的变分泛函：

$$\overset{*}{\Phi}{}_5^p=\int_V\Sigma^p(\mathbf{E})dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_NdA+\int_V\Big[\frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u}$$
$$+\mathbf{u}\nabla+(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla))-\mathbf{E}\Big]:\mathbf{T}dV \tag{2.15a}$$

$$\overset{*}{\Phi}{}_5^c=\int_V\Sigma^c(\mathbf{T})dV+\int_V\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA$$
$$+\int_V\mathbf{u}\cdot[(\mathbf{F}\cdot\mathbf{T})\cdot\nabla+\mathbf{f}\rho_0]dV \tag{2.15b}$$

易证下列互补关系成立：

$$\overset{*}{\Phi}{}_5^p+\overset{*}{\Phi}{}_5^c=0 \tag{2.16}$$

6. 不完全的广义位能和广义余能变分泛函之六（事先分别满足余应变能形式的本构关系和应变位移关系及应变能形式的本构关系和平衡方程的情况）

此时可直接由(2.5a)和(2.5b)写出下列一对互补的变分泛函：

$$\overset{*}{\Phi}{}_6^p=\int_V\Sigma^p(\mathbf{E})dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_NdA$$

$$+\int_{A_u}(\mathring{\mathbf{u}}-\mathbf{u})\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA \tag{2.17a}$$

$$\overset{*}{\Phi}{}_6^c=\int_V\Sigma^c(\mathbf{T})dV+\int_V\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}dV$$

$$-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA+\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot(\mathring{\mathbf{T}}_N-\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N})dA \tag{2.17b}$$

易证下列互补关系成立：

$$\overset{*}{\Phi}{}_6^p+\overset{*}{\Phi}{}_6^c=0 \tag{2.18}$$

7. 不完全的位能和余能变分泛函之七 （最小位能和最小余能变分泛函）

此时可直接由(2.5a)和(2.5b)写出下列一对互补的变分泛函：

$$\Phi_7^p=\int_V\Sigma^p(\mathbf{E})dV-\int_V\mathbf{u}\cdot\mathbf{f}\rho_0dV-\int_{A_t}\mathbf{u}\cdot\mathring{\mathbf{T}}_NdA \tag{2.19a}$$

$$\Phi_7^c=\int_V\Sigma^c(\mathbf{T})dV+\int_V\frac{1}{2}[(\nabla\mathbf{u})\cdot(\mathbf{u}\nabla)]:\mathbf{T}dV-\int_{A_u}\mathring{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}dA \tag{2.19b}$$

易证下列互补关系成立：

$$\Phi_7^p+\Phi_7^c=0 \tag{2.20}$$

三、结　语

本文从全能量原理出发推导出古典弹性理论中各种可能的主要的变分泛函．为了能够一目了然地看清已有的和本文给出的结果，我们按照与[1]中表6.1类似的格式编制一个附表，其中符号“○”和“∨”分别表示事先满足的关系和所反映的物理客观规律．请注意，本文附表中所空缺的两类情况正是对应于[1]中表6.1所示迄今尚未见到过的第 11 类和第 6 类变分原理的情况．还可以写出其它的变分泛函，但不是基本的，故未列出．

本文曾企图从全能量原理出发找出[1]中表6.1的第11类和第 6 类空缺至今的变分原理，但没有能够达到原来的目的．通过本文的推导过程看来，这两类空缺的变分原理似乎是不存在的，然而本文的论述并不够严格，所以作者愿把这个观点作为一个猜想提出来．这个猜想的意义牵涉到至今我们是否已在[1]、[4]、[5]变分原理含义下找全了古典弹性理论中所有可能的变分原理的问题．

附表　各种可能的变分泛函所反映的物理客观规律

编号	平衡条件		连续条件		本构方程		备注			
	平衡方程	力边界条件	应变位移关系	位移边界条件	应变能形式	余应变能形式	线性理论		非线性理论	
							胡[1]*	钱[4]	钱[4]	戴[本文]
0	∨	∨	∨	∨	∨		(10.5)	(7.148)	(8.108b)	(1.24b)
1	∨	∨	∨	∨	○		(10.3)	(7.147)	(8.104)	(2.5a)
	∨	∨	∨	∨		○	(9.6)	(7.146)	(8.105)	(2.6b)
2	∨	∨	○	∨		∨				(2.7a)
	○	∨	∨	∨	∨					(2.7b)
3										
	∨	○	∨	∨	∨					(2.12b)
4	∨	∨	○	○		∨				(1.7a)
	○	○	∨	∨	∨					(1.7b)
5	∨	∨	∨	○	○			(7.216)	(8.109)	(2.15a)
	∨	○	∨	∨		○		(7.225)	(8.113)	(2.15b)
6	∨	∨	○	∨	○			(7.127)	(8.110)	(2.17a)
	○	∨	∨	∨		○		(7.226)	(8.114)	(2.17b)
7	∨	∨	○	○	○		(7.3)	(7.38a)	(8.19)	(2.19a)
	○	○	∨	∨		○	(8.5)	(7.63)	(8.86)	(2.19b)

* [1]中还有特例，因无编号，未均列入。

参 考 文 献

1. 胡海昌著，《弹性力学的变分原理及其应用》，科学出版社(1981).
2. 郭仲衡著，《非线性弹性理论》，科学出版社(1980).
3. 郭仲衡，非线性弹性理论变分原理的统一理论，应用数学和力学，1，1 (1980).
4. 钱伟长著，《变分法及有限元》，上册，科学出版社(1980).
5. Washizu, K., *Variational Methods in Elasticity and Plasticity*, Pergamon Press, (1968).

On Various Variational Principles in Nonlinear Theory of Elasticity

Tai Tien-min

(Southwestern Jiaotong University and Liaoning University)

Abstract

In the present paper functionals for the various possible main variational principles in the nonlinear theory of elasticity are derived from the "full energy principle" and several of them were not found yet in the literatures which we can get hold of. Through the derivation of this paper we suggest a conjecture on the nonexistence of the 11th and the 6th classes for the variational principles in the Table 6.1. of H. C. Hu's monogragh[1].