应用数学和力学，第3卷第5期（1982年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

关于热冲击弹性问题的自由能及变分原理

王洪纲

（昆明工学院，1980年3月25日收到）

摘 要

在讨论耦合热弹性问题的变分原理的一些著作中，以弹性应变e_{ij}和温度变化值θ为状态参数的自由能$\phi(e_{ij},\theta)$为

$$\phi(e_{ij},\theta)=\frac{\lambda}{2}e_{kk}e_{ll}+\mu e_{kl}e_{kl}-\gamma e_{kk}\theta-\frac{c}{2}\rho\frac{\theta^2}{T_0} \tag{0.1}$$

自由能的这一表达式只适用于

$|\theta|\ll T_0$（绝对参考温度）

的情况.

在热冲击弹性问题中，温度变化值θ很大，甚至可以大过T_0.同时，材料常数(λ,μ,γ,c等)随θ而发生变化，不再保持为常数. 就这种情况，本文导出自由能的表达式.(0.1)式则为其特殊情况.

将自由能的这一表达式引入变分原理，其欧拉方程将成为非线性. 为了线性化，将热冲击作用的时间过程划分为若干足够小的时间元Δt_k ($\Delta t_k=t_k-t_{k-1},k=1,2,\cdots,n$). 在$\Delta t_k$中，温度变化$\theta_k$很小，材料常数由$t_{k-1}$瞬时的温度场$T_{k-1}=T(x_1,x_2,x_3,t_{k-1})$确定，自由能$\phi_k$可近似地采用(0.1)式的形式，从而得到变分原理的分段近似表达.

一、自由能ϕ的表达式

Helmholtz 自由能ϕ为

$$\phi=I-T\eta \tag{1.1}$$

式中，I为内能，T为绝对温度，η为熵密度.

以e_{ij}及θ ($\theta=T-T_0$)为状态参数时，全微分$d\phi$为

$$d\phi=\frac{\partial\phi}{\partial e_{ij}}de_{ij}+\frac{\partial\phi}{\partial\theta}d\theta=\sigma_{ij}de_{ij}-\eta d\theta \tag{1.2}$$

式中$\sigma_{ij}(e_{ij},\ \theta)$和$\eta(e_{ij},\ \theta)$可按以下步骤导出：

对于各向同性体，弹性模量E、剪切弹性模量G、体热胀系数α随θ的变化可取为[3]

$$E=E_0+E_1^*\theta;\quad G=G_0+G_1^*\theta;\quad \alpha=\alpha_0+\alpha_1^*\theta \tag{1.3}$$

波桑比 ν 可视为常数.

由此可得拉梅常数 λ 和 μ

$$\lambda=\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}E_0+\frac{\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)}E_1^*\theta$$

$$=\lambda_0+\lambda_1^*\theta \tag{1.4}$$

$$\mu=G=G_0+G_1^*\theta=\mu_0+\mu_1^*\theta \tag{1.5}$$

应力的温度系数 γ 为

$$\gamma=\frac{1}{3}\alpha(3\lambda+2\mu)=\frac{1}{3}\alpha_0(3\lambda_0+2\mu_0)+\frac{1}{3}[\alpha_0(3\lambda_1^*+2\mu_1^*)+\alpha_1^*(3\lambda_0+2\mu_0)]\theta$$

$$+\frac{1}{3}\alpha_1^*(3\lambda_1^*+2\mu_1^*)\theta^2=\gamma_0+\gamma_1^*\theta+\gamma_2^*\theta^2 \tag{1.6}$$

将这些量代入各向同性体的物理方程中，得 $\sigma_{ij}(e_{ij},\ \theta)$的表达式

$$\sigma_{ij}(e_{ij},\ \theta)=\lambda e_{kk}\delta_{ij}+2\mu e_{ij}-\gamma\theta\delta_{ij}$$

$$=(\lambda_0 e_{kk}\delta_{ij}+2\mu_0 e_{ij}-\gamma_0\theta\delta_{ij})+(\lambda_1^* e_{kk}\delta_{ij}+2\mu_1^* e_{ij}-\gamma_1^*\theta\delta_{ij})\theta-\gamma_2^*\theta^3\delta_{ij} \tag{1.7}$$

即 σ_{ij} 是状态参数 θ 的三次式;

熵密度 η 的全微分 $d\eta$ 为

$$d\eta=\frac{\partial\eta}{\partial e_{ij}}de_{ij}+\frac{\partial\eta}{\partial\theta}d\theta \tag{1.8}$$

由(1.2)式得

$$\frac{\partial\eta}{\partial e_{ij}}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial e_{ij}\partial\theta}=-\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta\partial e_{ij}}=-\frac{\partial\sigma_{ij}}{\partial\theta} \tag{1.9}$$

将(1.7)式代入(1.9)式，得

$$\frac{\partial\eta}{\partial e_{ij}}=\gamma_0\delta_{ij}-(\lambda_1^* e_{kk}\delta_{ij}+2\mu_1^* e_{ij}-2\gamma_1^*\theta\delta_{ij})+3\gamma_2^*\theta^2\delta_{ij} \tag{1.10}$$

(1.8)式中的 $\frac{\partial\eta}{\partial\theta}$ 需由热力学第二定律及比热确定. 由

$$Td\eta=dQ=c\rho d\theta$$

则有

$$Td\eta=T\left(\frac{\partial\eta}{\partial e_{ij}}de_{ij}+\frac{\partial\eta}{\partial\theta}d\theta\right)=c\rho d\theta$$

以 c_V 表示无变形比热，得

$$\frac{\partial\eta}{\partial\theta}=c_V\frac{\rho}{T} \tag{1.11}$$

由(1.10)式及

$$\frac{\partial^2\eta}{\partial e_{ij}\partial\theta}=\frac{\partial^2\eta}{\partial\theta\partial e_{ij}}$$

得

$$\frac{\partial c_V}{\partial e_{ij}}=(2\gamma_1^*+6\gamma_2^*\theta)\frac{T}{\rho}\delta_{ij}$$

积分后得出$c_V(e_{ij},\theta)$的表达式

$$c_V(e_{ij},\theta)=c_{V_0}+f(\theta)+(2\gamma_1^*+6\gamma_2^*\theta)\frac{T}{\rho}e_{kk} \tag{1.11$'$}$$

取$f(\theta)=c_V{}_1^*\theta$代入上式，并将上式代入(1.11)式得$\frac{\partial\eta}{\partial\theta}$为

$$\frac{\partial\eta}{\partial\theta}=c_{V_0}\frac{\rho}{T}+c_V{}_1^*\theta\frac{\rho}{T}+(2\gamma_1^*+6\gamma_2^*\theta)e_{kk} \tag{1.12}$$

此(1.12)式和(1.10)式代入(1.8)式，积分后得η

$$\eta(e_{ij},\theta)=\gamma_0e_{kk}-\frac{\lambda_1^*}{2}e_{kk}e_{ll}-\mu_1^*e_{kl}e_{kl}+2\gamma_1^*e_{kk}\theta+3\gamma_2^*e_{kk}\theta^2+c_V{}_1^*\rho\theta$$

$$+(c_{V_0}-c_V{}_1^*T_0)\rho\ln\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right) \tag{1.13}$$

此式和(1.7)式代入(1.2)式，积分后得$\phi(e_{ij},\theta)$的表达式如下

$$\phi(e_{ij},\theta)=\left(\frac{\lambda_0}{2}e_{kk}e_{ll}+\mu_0e_{kl}e_{kl}-\gamma_0e_{kk}\theta\right)$$

$$+\left(\frac{\lambda_1^*}{2}e_{kk}e_{ll}+\mu_1^*e_{kl}e_{kl}-\gamma_1^*e_{kk}\theta\right)\theta$$

$$-\gamma_2^*e_{kk}\theta^3+c_{V_0}\rho\theta+c_V{}_1^*\rho\left(T_0-\frac{\theta}{2}\right)\theta$$

$$-(c_{V_0}+c_V{}_1^*T_0)\rho T_0\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right)\ln\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right) \tag{1.14}$$

此表达式中，对θ值未加限制，并考虑了材料常数随θ的变化，因而可以用于热冲击问题中.

如果材料常数取为定值，即λ_1^*、μ_1^*……等取零值，则上式化为

$$\phi(e_{ij},\theta)=\frac{\lambda_0}{2}e_{kk}e_{ll}+\mu_0e_{kl}e_{kl}-\gamma_0e_{kk}\theta$$

$$-c_{V_0}\rho\left[T_0\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right)\ln\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right)-\theta\right] \tag{1.14$'$}$$

此式与竹内洋一郎导出的自由能表达式相同[3].

如果$|\theta|\ll T_0$，展开对数$\ln\left(1+\frac{\theta}{T_0}\right)$，只取级数的第一项，则得近似表达式(0.1).

二、变分原理的分段近似表达

将热冲击作用的时间过程以t_0，t_1，……，t_n划分为n个微小的时间元，令$\tau_k=\Delta t_k=$

t_k-t_{k-1}. 设初始温度场$T_0=T(x_1,x_2,x_3,t_0)$已给定.

在微小时间元$t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k$中，设初始条件

$$T_{k-1}=T(x_1,x_2,x_3,t_{k-1}),\quad u_{i\,k-1}=u_i(x_1,x_2,x_3,t_{k-1})$$

为已知，同时设$\theta_k=T_k-T_{k-1}$很小，即

$$|\theta_k|\ll T_{k-1}$$

于是可以近似地认为在$t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k$中，材料常数$\lambda$，$\mu$，$\gamma$及$c_V$等与$t$无关.由(1.4)，(1.5)，(1.6)及(1.11)′式得

$$\lambda_{k-1}=\lambda_0+\lambda_1^*(T_{k-1}-T_0)=\lambda_{k-1}(x_1,x_2,x_3)$$
$$\mu_{k-1}=\mu_0+\mu_1^*(T_{k-1}-T_0)=\mu_{k-1}(x_1,x_2,x_3)$$
$$\gamma_{k-1}=\gamma_0+\gamma_1^*(T_{k-1}-T_0)+\gamma_2^*(T_{k-1}-T_0)^2=\gamma_{k-1}(x_1,x_2,x_3)$$
$$c_{V_{k-1}}=c_{V0}+c_{V1}^*(T_{k-1}-T_0)+[2\gamma_1^*+6\gamma_2^*(T_{k-1}-T_0)]\frac{T_{k-1}}{\rho}(e_{ll})_{k-1}$$
$$=c_{V_{k-1}}(x_1,x_2,x_3)$$

自由能ϕ可采用(0.1)式的形式，但材料常数均为位置x_i的函数

$$\phi_k=\frac{\lambda_{k-1}}{2}e_{mm}e_{ll}+\mu_{k-1}e_{ml}e_{ml}-\gamma_{k-1}e_{mm}\theta-\frac{c_{V_{k-1}}}{2}\rho\frac{\theta^2}{T_{k-1}}$$
$$(\text{在}t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k\text{内})\qquad(2.1)$$

式中$\theta=T-T_{k-1}$

以V表示弹性体体积，S表示表面积，F_i表示体积力分量．设表面力$\bar{p}_i$（在S_σ上）及位移$\bar{u}_i$（在S_u上）为已知，则拉格郎日函数L_k为[1]

$$L_k=\int_V\left[\frac{1}{2}\rho\,\dot{u}_i\,\dot{u}_i-\phi_k-\eta_kT+F_iu_i\right)dV-\int_{S_\sigma}\bar{p}_iu_idS\qquad(2.2)$$

相应的哈密顿作用量W_k为

$$W_k=\int_{t_{k-1}}^{t_k}L_kdt\qquad(2.3)$$

整个热冲击作用过程的哈密顿作用量W为

$$W=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}L_kdt=\sum_{k=1}^{n}W_k\qquad(2.3)'$$

由$\delta W=0$得

$$\delta W=\sum_{k=1}^{n}\delta W_k=0\qquad(2.3)''$$

考虑到$\tau_k=t_k-t_{k-1}$是任意取的，所以有

$$\left.\begin{array}{l}\delta W_1=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ \delta W_k=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ \delta W_n=0\end{array}\right\}\qquad(2.4)$$

将(2.2)，(2.3)代入(2.4)得到n组欧拉方程及自然边界条件

$$\left.\begin{array}{l}\sigma_{ij,j}+F_i=\rho\ddot{u}_i \text{（在}V+S\text{内，在}t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k\text{中）}\\ \eta_k=-\dfrac{\partial\phi_k}{\partial T}\text{（在}V+S\text{内，在}t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k\text{中）}\\ \sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i \text{（在}S_\sigma\text{上）}\end{array}\right\} \tag{2.5}$$

另一方面，以T_A表示弹性体周围介质温度，它与t无关．以h_{k-1}和β_{k-1}分别表示在$t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k$中的热传导系数和边界放热系数，并近似地认为与$t$无关，即

$$h_{k-1}=h_0+h_1^*(T_{k-1}-T_0)=h_{k-1}(x_1,x_2,x_3)$$

$$\beta_{k-1}=\beta_0+\beta_1^*(T_{k-1}-T_A)=\beta_{k-1}(x_1,x_2,x_3)$$

在$|\theta_k|\ll T_{k-1}$的情况下，单位时间内由单位表面积流出的散热量可取为$\beta_{k-1}(T_{k-1}-T_A)$．于是整个热冲击作用过程的热流势作用量U为[1]

$$U=\sum_{k=1}^{n}U_k$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\int_{t_{k-1}}^{t_k}\left[\int_V\left(\frac{1}{2}h_{k-1}\theta_{,i}\theta_{,i}+\dot{\eta}_kT_{k-1}T\right)dV-\int_{S_Q}\beta_{k-1}(T_{k-1}-T_A)TdS\right]dt \tag{2.6}$$

由$\delta U=0$及τ_k的任意性得

$$\left.\begin{array}{l}\delta U_1=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ \delta U_k=0\\ \cdots\cdots\cdots\\ \delta U_n=0\end{array}\right\} \tag{2.7}$$

将(2.6)代入(2.7)得到另一套n组欧拉方程即热传导方程和边界散热方程

$$\left.\begin{array}{l}h_{k-1}\theta_{,ii}=\dot{\eta}_kT_{k-1}\text{（在}V+S\text{内，}t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k\text{中）}\\ h_{k-1}\theta_{,i}n_i=\beta_{k-1}(T_{k-1}-T_A)\text{（在}S_Q\text{上，}t_{k-1}\leqslant t\leqslant t_k\text{中）}\end{array}\right\} \tag{2.8}$$

这组方程与(2.5)式的方程耦合求解，即可解出t_k时的温度场$T_k=T(x_1,x_2,x_3,t_k)$和位移场$u_{ik}=u_i(x_1,x_2,x_3,t_k)$．

综上所述，热冲击过程变分原理可表述如下：

热冲击作用的时间过程划分为n个微小时间元，时间元的长度τ_k应尽量小（但并非无限小）．给定初始温度场$T_0=T(x_1,x_2,x_3,t_0)$．在任一时间元τ_k中有

1．在满足边界约束条件$u_i=\bar{u}_i$（在S_u上）及初始位移场$u_{i,k-1}=u_i(x_1,x_2,x_3,t_{k-1})$和温度场$T_{k-1}=T(x_1,x_2,x_3,t_{k-1})$的情况下，使哈密顿作用量$W_k$为最小的位移场$u_i$和温度场$T$必满足

$$\sigma_{ij,j}+F_i=\rho\ddot{u}_i$$

$$\eta_k=-\frac{\partial\phi_k}{\partial T}$$

$$\sigma_{ij}n_j=\bar{p}_i$$

2. 在满足给定的边界温度条件$T=\bar{T}(S_T)$(在S_T上)及初始位移场$u_{i\,k-1}=u_i(x_1,x_2,x_3,t_{k-1})$和温度场$T_{k-1}=T(x_1,x_2,x_3,t_{k-1})$的情况下，使热流势作用量$U_k$为最小的温度场必满足

$$h_{k-1}\theta_{,ii}=\dot{\eta}_k T_{k-1}$$

$$h_{k-1}\theta_{,i}n_i=\beta_{k-1}(T_{k-1}-T_A)$$

3. 由以上两组微分方程耦合解出的位移场和温度场在时间元τ_k终端的值$u_{i\,k}=u_i(x_1,x_2,x_3,t_k)$和$T_k=T(x_1,x_2,x_3,t_k)$作为下一个时间元$\tau_{k+1}$的初始条件．同时，根据$T_k$确定下一个时间元$\tau_{k+1}$中的各材料常数．

然后，对τ_{k+1}重复1和2．直到全部时间元中的位移场和温度场解出．

参 考 文 献

1. 钱伟长，变分法及有限元讲义，清华大学，(1978,5).
2. Oden, J. T. and Reddy, J. N., *Variational Methods in Theoretical Mechanics*, (1976).
3. 竹内洋一郎，«热应力»，科学出版社，(1977).
4. Nickell, R. E. and Sackman, J. L., Variational principles for linear coupled thermoelasticity, *Quart. of Appl. Math.*, 26 (1968).
5. Biot, M. A., Thermoelasticity and irreversible thermodynamics, *J. Appl. Physics*, 27, (1956).
6. Л. Э. 艾利斯哥尔兹，«变分法»，商务印书馆，(1956).
7. H. 帕尔库斯，«非定常热应力»，科学出版社，(1965).
8. Ben-Amoz, M., On a variational theorem in coupled thermoelasticity, *J. Appl. Mech.*, 32 (1965).
9. Herrmann, G., On variational Principles in thermoelasticity and heat conduction, *Quart. Appl. Math.*, 21 (1963).

On the Free Energy and Variational Theorem of Elastic Problem in Thermal Shock

Wang Hong-gang

(*The Kunming Institute of Technology, Kunming*)

Abstract

In some works on variational principle for coupled thermo-elastic problems, the free energy $\phi(e_{ij}, \theta)$, where the state variables are elastic strain e_{ij} and temperature increment θ, is expressed by

$$\phi(e_{ij},\theta)=\frac{\lambda}{2} e_{kk}e_{ll}+\mu e_{kl} e_{kl}-\gamma e_{kk}\theta-\frac{c}{2}\rho \frac{\theta^2}{T_0} \tag{0.1}$$

This expression is employed only under the condition of

$|\theta|\ll T_0$ (absolute temperature of reference)

But the value of temperature increment is great, even larger than T_0 in thermal shock. And the material properties (λ,μ,γ, c etc.) will not keep constants, they vary with θ. The expression of free energy for this condition is derived in this paper. Eq. (0.1) is its special case.

Euler's equations will be non-linear while this expression of free energy has been introduced into variational theorem. In order to linearize, the time interval of thermal shock is divided into a number of time elements Δt_k ($\Delta t_k=t_k-t_{k-1}$, $k=1, 2,\cdots,n$), which are so small that the temperature increment θ_k within it is very small, too. Thus, the material properties may be defined by temperature field $T_k=T(x_1, x_2, x_3, t_{k-1})$ at instant t_{k-1}, and the free energy ϕ_k expressed by eq. (0.1) may be employed in element Δt_k. Hence the variational theorem will be expressed partly and approximately.