应用数学和力学，第3卷第5期（1982年9月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

方程带两参数的高阶椭圆型方程一般边值问题的奇摄动

林 宗 池

（福建师大数学系，1980年6月13日收到）

摘　　要

本文研究方程带两参数的高阶椭圆型方程一般边值问题解的渐近式的构造，用两参数表示法给出渐近解的表达式和有关的余项估计．拓广了文[1]和[7]的结果．

一、前　　言

关于椭圆型方程的奇摄动问题，过去大多数是研究狄立克雷问题[1]~[4]．1971年，C．柯姆斯托克开始应用两变量展开法研究了四阶椭圆型方程的混合边值问题[5]．1978年，江福汝提出应用两变量展开法直接构造边值问题的边界层项[6]，简化了柯姆斯托克的工作，随后，江福汝和高汝熹又研究了高阶椭圆型方程一般边值问题的奇摄动[7]．1978年，作者亦曾用M．И．Вишик和Л．А．Люстерник的方法，研究了在边界和算子摄动的情况下，四阶椭圆型方程和高阶椭圆型方程的一般边值问题的奇摄动[8],[9]． 本文将进一步研究方程带两个参数的高阶椭圆型方程一般边值问题解的渐近式的构造，用两参数表示法给出渐近解的表达式和有关的余项估计．

我们考虑如下的含两个参数的$2(l+m)$阶椭圆型方程的一般边值问题$A_{\varepsilon,\mu}$：

$$L_{\varepsilon,\mu}U_{\varepsilon,\mu}\equiv\varepsilon^{2l}L_{2l}U_{\varepsilon,\mu}+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r L_r U_{\varepsilon,\mu}+L_0U_{\varepsilon,\mu}=f(x) \tag{1.1}$$

$$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\Omega$$

$$B_jU_{\varepsilon,\mu}|_{\partial\Omega}=g_j(x)|_{\partial\Omega},\qquad (j=0,1,\cdots,l+m-1) \tag{1.2}$$

的奇摄动．其中ε，μ为相互依赖的正的小参数，Ω表示n维空间R^n中的有界区域，$\partial\Omega$表示Ω的边界，并假设$\partial\Omega$是足够光滑；L_0表示$2m$阶强椭圆型算子：

$$L_0U\equiv\sum_{|\beta|\leq 2m}C_\beta(x)D^\beta U\equiv\sum_{k=0}^{2m}\sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=k}C_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)D_{x_1}^{\beta_1}\cdots D_{x_n}^{\beta_n}U \tag{1.3}$$

式中

$$(-1)^m \sum_{|\beta|=2m} C_\beta(x)\xi^\beta \geqslant a_0 |\xi|^{2m} \tag{1.4}$$

a_0为正的常数，$\beta=(\beta_1,\cdots,\beta_n)$，$|\beta|=\beta_1+\cdots+\beta_n$；$L_{2l}$表示$2(l+m)$阶强椭圆型算子：

$$L_{2l}U \equiv \sum_{|\beta|\leqslant 2(l+m)} a_\beta(x)D^\beta U \equiv \sum_{k=0}^{2(l+m)} \sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=k} a_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)D_{x_1}^{\beta_1}\cdots D_{x_n}^{\beta_n}U \tag{1.5}$$

式中

$$(-1)^{l+m} \sum_{|\beta|=2(l+m)} a_\beta(x)\xi^\beta \geqslant a_1|\xi|^{2(l+m)} \tag{1.6}$$

（a_1为正的常数）

$$L_rU \equiv \sum_{|\beta|\leqslant 2m+r} b_{r,\beta}(x)D^\beta U \equiv \sum_{k=0}^{2m+r} \sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=k} b_{r,\beta_1\cdots\beta_n}(x)D_{x_1}^{\beta_1}\cdots D_{x_n}^{\beta_n}U \tag{1.7}$$

$$(r=1,2,\cdots,2l-1)$$

又 $B_jU(j=0,1,\cdots,l+m-1)$ 表示边界微分算子：

$$B_j \equiv \sum_{h=0}^{m_j} b_h^{(j)}(x)D_\nu^h,\quad 0\leqslant m_j \leqslant 2(l+m)-1$$

式中$b_h^{(j)}(x)$为充分光滑的函数，在薄板和薄壳理论中，常遇到这一类边值问题[11]。

二、形 式 渐 近 解

假设边值问题(1.1)—(1.2)存在唯一解$U_{\varepsilon,\mu}\in C^{2(l+m)}(\overline{\Omega})$和退化边值问题$A_0$:

$$L_{0,0}U_{0,0}=f(x),\qquad x\in\Omega$$

$$B_jU_{0,0}|_{\partial\Omega}=g_j(x)|_{\partial\Omega}\qquad (j=0,1,\cdots,m-1)$$

对任意充分光滑的函数$f(x)$和$g(x)$存在唯一的充分光滑的解$U_{0,0}$. 在文[10]中，讨论了这些解存在的条件.

首先，我们在区域Ω内构造问题$A_{\varepsilon,\mu}$的解，鉴于问题$A_{\varepsilon,\mu}$包含两个形式参数，因此，假定解$U_{\varepsilon,\mu}$也具有两个参数的如下的形式的渐近展式：

$$U_{\varepsilon,\mu}\sim \sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i W_{p-i,i}(x) \tag{2.1}$$

将(2.1)式代入方程(1.1)，并比较$\frac{\mu}{\varepsilon}$和ε的各次幂的系数，得到关于确定$W_{0,0}(x)$，$W_{p-i,i}(x)$的递推方程：

$$L_0W_{0,0}(x)=f(x) \tag{2.2}$$

$$L_0W_{p-i,i}(x)=-\sum_{r=1}^{2l-1}L_rW_{p-i-r,i-r}-L_{2l}W_{p-i,i-2l} \tag{2.3}$$

$$(i=0,1,\cdots,p;\quad p=1,2,\cdots.)$$

在上式以及以后的计算中，都将负下标的量取零．下面构造边界层项．

在边界$\partial\Omega$的邻域建立局部坐标系$(\rho,\varphi)=(\rho,\varphi_1\cdots,\varphi_{n-1})$，以$\varphi=(\varphi_1\cdots,\varphi_{n-1})$表示边界$\partial\Omega$上的点的坐标，因此，$\rho=0$表示边界$\partial\Omega$，$0<\rho<\eta$表示连接到边界的带形邻域，$\rho$表示沿着法线到边界的距离．

在(ρ,φ)坐标系下，算子$L_{\varepsilon,\mu}$具有形式：

$$
\begin{aligned}
L_{\varepsilon,\mu}&\equiv\varepsilon^{2l}L_{2l}+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^rL_r+L_0\\
&\equiv\varepsilon^{2l}\Big[a_{2(l+m)}(\rho,\varphi)D_\rho^{2(l+m)}+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\leqslant2(l+m)\\ \beta_1\neq2(l+m)}}a_{\beta_1\cdots\beta_n}(\rho,\varphi)D_\rho^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\\
&\quad+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r\Big[b_{2m+r}(\rho,\varphi)D_\rho^{2m+r}+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\leqslant2m+r\\ \beta_1\neq2m+r}}b_{r,\beta_1\cdots\beta_n}(\rho,\varphi)D_\rho^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Big]\\
&\quad+\Big[C_{2m}(\rho,\varphi)D_\rho^{2m}+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\leqslant2m\\ \beta_1\neq2m}}C_{\beta_1\cdots\beta_n}(\rho,\varphi)D_\rho^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Big]
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

其中 $a_{2(l+m)}=a_{2(l+m),0,\cdots,0}$; $b_{r,2m+r}=b_{r,2m+r,0,\cdots,0}$; $C_{2m}=C_{2m,0,\cdots,0}$.

在 $\partial\Omega$ 的 η 邻域引进变量 t，令

$$\rho=\varepsilon t \tag{2.5}$$

则

$$D_\rho^s=\varepsilon^{-s}D_t^s \tag{2.6}$$

这时

$$
\begin{aligned}
L_{\varepsilon,\mu}=\varepsilon^{-2m}\Big\{&\Big[a_{2(l+m)}(\rho,\varphi)D_t^{2(l+m)}\\
&+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\leqslant2(l+m)\\ \beta_1\neq2(l+m)}}\varepsilon^{2(l+m)-\beta_1}a_{\beta_1\cdots\beta_n}(\rho,\varphi)D_t^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Big]\\
&+\sum_{r=1}^{2l-1}\Big(\frac{\mu}{\varepsilon}\Big)^r\Big[b_{2m+r}(\rho,\varphi)D_t^{2m+r}\\
&+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\leqslant2m+r\\ \beta_1\neq2m+r}}\varepsilon^{2m+r-\beta_1}b_{r,\beta_1\cdots\beta_n}(\rho,\varphi)D_t^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Big]\\
&+\Big[C_{2m}(\rho,\varphi)D_t^{2m}+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\leqslant2m\\ \beta_1\neq2m}}\varepsilon^{2m-\beta_1}C_{\beta_1\cdots\beta_n}(\rho,\varphi)D_t^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Big]\Big\}
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

假定算子$L_{\varepsilon,\mu}$的系数都是足够光滑的，在$\rho=0$附近按 Taylor 公式展开（2.7）式中的每一个系数，得到

$$a_{2(l+m)}(\rho,\varphi)=a_{2(l+m)}(\varphi)+\sum_{j=1}^{n}\rho^j a_{2(l+m),j}(\varphi)+\rho^{n+1}a_{2(l+m),n+1}(\theta\rho,\varphi)$$

$$=a_{2(l+m)}(\varphi)+\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon t)^j a_{2(l+m),j}(\varphi)+(\varepsilon t)^{n+1}a_{2(l+m),n+1}(\theta\varepsilon t,\varphi)$$

$$(0<\theta<1) \tag{2.8}$$

式中

$$a_{2(l+m)}(\varphi)=a_{2(l+m)}(\varphi,\rho)|_{\rho=0}$$

$$a_{2(l+m),j}(\varphi)=\frac{1}{j!}D_\rho^j a_{2(l+m)}(\rho,\varphi)|_{\rho=0} \qquad (j=1,2,\cdots,n)$$

$$a_{2(l+m),n+1}(\theta\varepsilon t,\varphi)=\frac{1}{(n+1)!}D_\rho^{n+1}\ a_{2(l+m)}(\rho,\varphi)|_{\rho=\varepsilon\theta t}$$

其余系数均同样进行展开，并在（2.4）式中各个系数用其展开式替换，则得

$$L_{\varepsilon,\mu}\equiv\varepsilon^{-2m}\left[M_0+\sum_{k=1}^{n+1}\varepsilon^k M_k+\sum_{r=1}^{2l-1}\ \sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k R_{r,k}\ \right] \tag{2.9}$$

其中 $M_0=a_{2(l+m)}(\varphi)D_t^{2(l+m)}+C_{2m}(\varphi)D_t^{2m}$ (2.10)

是关于 t 的 $2(l+m)$ 阶的常系数常微分算子．而 M_k $(k=1,2,\cdots,n)$，$R_{r,k}$ $(r=1,2,\cdots,2l-1;$ $k=0,1,\cdots,n)$ 均为不高于 $2(l+m)$ 阶的变系数常微分算子，其系数为关于 t 的多项式，次数不超过 $j(j\leqslant n)$；又 M_{n+1}，$R_{r,n+1}$，$(r=1,2,\cdots,2l-1)$ 也为类似的变系数常微分算子，但其系数是关于 t 的光滑函数．

由于经过以上的变换，算子 L_0，L_{2l} 的强椭圆性不变[4]，因此，

$$(-1)^{l+m}a_{2(l+m)}(\varphi)>0 \tag{2.11}$$

$$(-1)^m C_{2m}(\varphi)>0 \tag{2.12}$$

并由条件（2.11）、（2.12）知道，常微分算子 M_0 的特征方程：

$$C_\varphi(\lambda)\equiv a_{2(l+m)}(\varphi)\lambda^{2(l+m)}+C_{2m}(\varphi)\lambda^{2m}=0 \tag{2.13}$$

存在 l 个具有负实部的根[12]．

假设边界层项具有下面形式：

$$V(t,\varphi)\sim\varepsilon^q\sum_{p=0}^{\infty}\ \sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i V_{p-i,i}(t,\varphi)$$

其中 q 是待定常数．

把上式代入（2.9）式，令 $\frac{\mu}{\varepsilon}$，ε 的各次幂项的系数为零，得到关于求 $V_{0,0}(t,\varphi)$，$V_{p-i,i}(t,\varphi)$ 的递推方程：

$$M_0V_{0,0}=0 \tag{2.14}$$

$$M_0V_{p-i,i}=-\sum_{k=1}^{p}M_kV_{p-i,i-k}-\sum_{k=0}^{i}\ \sum_{r=1}^{2l-1}R_{r,k}V_{p-i-r,i-k} \tag{2.15}$$

$$(i=0,1,\cdots,p;\ \ p=1,2,\cdots)$$

下面再来推导$W_{p-i,i}$, $V_{p-i,i}(i=0,1,\cdots,p;\ p=0,1,\cdots)$应满足的边界条件. 因为方程是线性的, 所以边值问题(1.1)—(1.2)的解$U_{\varepsilon,\mu}$具有下面形式的渐近展开式:

$$U_{\varepsilon,\mu}\sim\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}W_{p-i,i}(x)+\varepsilon^{q}\sum_{p=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}V_{p-i,i}(t,\varphi) \tag{2.16}$$

我们只限于取具有余项的有限和:

$$U_{\varepsilon,\mu}=\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}W_{p-i,i}(x)+\varepsilon^{q}\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}V_{p-i,i}(t,\varphi)+Z_N \tag{2.17}$$

将边界条件(1.2)用局部坐标(ρ,φ)表示出:

$$B_jU|_{\partial\Omega}\equiv\sum_{h=0}^{m_j}b_h^{(j)}(\rho,\varphi)D_\rho^hU|_{\partial\Omega}=g_j(\varphi),\ \ (j=0,1,\cdots,l+m-1) \tag{2.18}$$

式中$g_j(\varphi)=g_j(0,\varphi)$, 再根据(2.5)式引进的变换, 得边界算子$B_j$的分解式:

$$B_j\equiv\varepsilon^{-m_j}(H_0^{(j)}+\varepsilon H_1^{(j)}+\cdots+\varepsilon^{m_j}H_{m_j}^{(j)}),\ \ (j=0,1,\cdots,l+m-1) \tag{2.19}$$

式中

$$H_0^{(j)}=b_{m_j}^{(j)}D_t^{m_j},\ \ H_1^{(j)}=b_{m_j-1}^{(j)}D_t^{m_j-1},\cdots,\ H_{m_j}^{(j)}=b_0^{(j)}$$

将展开式(2.17)代入边值条件(2.18), 考虑到(2.19)式得到:

$$B_j\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=1}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}W_{p-i,i}|_{\partial\Omega}+\varepsilon^{q-m_j}\left(\sum_{i=0}^{m_j}\varepsilon^{i}H_i^{(j)}\right)\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}V_{p-i,i}|_{\partial\Omega}$$

$$+B_jZ_N|_{\partial\Omega}=g_j(\varphi)\qquad(j=0,1,\cdots,l+m-1) \tag{2.20}$$

作为一个例子, 考察$m_0=1$, $m_j=j+1$ $(j=1,2,\cdots,l+m-1)$和$m=l$的情形(关于其他情形可以类似地建立边值条件的递推公式), 这时(2.20)具有形式:

$$B_0\left[\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}W_{p-i,i}\right]\Bigg|_{\partial\Omega}+\varepsilon^{q-1}\left(H_0^{(0)}+\varepsilon H_1^{(0)}\right)\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}V_{p-i,i}\Bigg|_{\partial\Omega}$$

$$+B_0Z_N|_{\partial\Omega}=g_0(\varphi)$$

……

$$B_m\left[\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}W_{p-i,i}\right]\Bigg|_{\partial\Omega}+\varepsilon^{q-(m+1)}\left(\sum_{i=0}^{m+1}\varepsilon^{i}H_i^{(m)}\right)\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}V_{p-i,i}\Bigg|_{\partial\Omega}$$

$$+B_mZ_N|_{\partial\Omega}=g_m(\varphi)$$

……

$$B_{l+m-1}\left[\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}W_{p-i,i}\right]\Bigg|_{\partial\Omega}$$

$$+\varepsilon^{q-(m+1)}\left(\sum_{i=0}^{m+l}\varepsilon^{i}H_{i}^{(l+m-1)}\right)\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}V_{p-i,i}\Big|_{\partial\Omega}$$

$$+B_{l+m-1}Z_{N}|_{\partial\Omega}=g_{l+m-1}(\varphi)$$

取$q=m+1$，并考虑到变换(2.5)式和在边界$\partial\Omega$上，$\rho=0$，故$t=0$，这样一来，比较$\frac{\mu}{\varepsilon}$和ε的各次幂项的系数，得到：

$$\left.\begin{aligned}&B_{0}W_{0,0}|_{\partial\Omega}=g_{0}(\varphi)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&B_{m-1}W_{0,0}|_{\partial\Omega}=g_{m-1}(\varphi)\end{aligned}\right\}\tag{2.21}$$

$$\left.\begin{aligned}&H_{0}^{(m)}V_{0,0}(0,\varphi)=g_{m}(\varphi)-B_{m}W_{0,0}(0,\varphi)\\&H_{0}^{(m+\alpha)}V_{0,0}(0,\varphi)=0,\ (\alpha=1,2,\cdots l-1)\end{aligned}\right\}\tag{2.22}$$

$$\left.\begin{aligned}&B_{0}W_{p-i,i}|_{\partial\Omega}=-H_{0}^{(0)}V_{p-i,i-m}-H_{1}^{(0)}V_{p-i,i-(m+1)}|_{\partial\Omega}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\\&B_{m-1}W_{p-i,i}|_{\partial\Omega}=-\sum_{t=0}^{m}H_{t}^{(m)}V_{p-i,i-1-t}\Big|_{\partial\Omega}\\&\qquad\qquad(i=0,1,\cdots,p;\ \ p=1,2,\cdots,N)\end{aligned}\right\}\tag{2.23}$$

$$\left.\begin{aligned}&H_{0}^{(m)}V_{p-i,i}\Big|_{\partial\Omega}=\begin{cases}-B_{m}W_{p-i,i}(0,\varphi)-\sum\limits_{s=1}^{m}H_{s}^{(m)}V_{p-i,i-s}\Big|_{\partial\Omega}\\\qquad(i=0,1,\cdots,p;\ \ p=1,2,\cdots,N)\\0,\quad(i=0,1,\cdots,p;\ \ p=N+1,\cdots,N+l+m-1)\end{cases}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&H_{0}^{(l+m-1)}V_{p-i,i}\Big|_{\partial\Omega}=\begin{cases}0,\quad(p=1,2,\cdots,l-2;\ \ j=0,1,\cdots,p)\\-B_{l+m-1}W_{0,0}(0,\varphi)-\sum\limits_{s=1}^{l+m}H_{s}^{(l+m-1)}V_{p-i,i-s}+g_{l+m-1}(\varphi)\\\qquad\qquad(p=l-1;\ \ j=l-1)\\-B_{l+m-1}W_{p-i,i-l+1}(0,\varphi)\\\qquad(p=l,l+1,\cdots,N;\ \ j=0,1,\cdots,p)\\0,\quad(p=N+1,\cdots,N+l+m-1;\ \ j=0,1,\cdots,p)\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{2.24}$$

$$\left.\begin{aligned}&Z_{N}|_{\partial\Omega}=-\varepsilon^{m}\sum_{p=N+2-m}^{N+m+l-1}\sum_{i=0}^{p}\left(H_{0}^{(0)}+\varepsilon H_{1}^{(0)}\right)\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}V_{p-i,i}|_{\partial\Omega}=\gamma_{0}(\varepsilon,\mu,\varphi)\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&B_{m-1}Z_{N}|_{\partial\Omega}=-\varepsilon\left(\sum_{s=0}^{m}\varepsilon^{s}H_{s}^{(m)}\right)\sum_{p=N}^{N+m+l-1}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^{i}V_{p-i,i}|_{\partial\Omega}=\gamma_{m-1}(\varepsilon,\mu,\varphi)\\&B_{m}Z_{N}|_{\partial\Omega}=0\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&B_{l+m-1}Z_{N}|_{\partial\Omega}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.25}$$

从上面的讨论中可以看出展开式（2.16）中的$W_{0,0}(x)$，$W_{i,j}(x)$和$V_{0,0}(t,\varphi)$,$V_{i,j}(t,\varphi)$是分别由递推方程（2.2），（2.3）和边界条件（2.21），（2.23）以及递推方程（2.14），（2.15）和初值条件（2.22），（2.24）的解而得到．其求解程序规定如下：

首先求出$W_{0,0}(x)$，接着求$V_{0,0}(t,\varphi)$．对于$W_{i,j}(x)$，$V_{i,j}(t,\varphi)$：（1）二者均按其下标和$(i+j)$的大小，依次从小到大求解．（2）在求相同下标和$(i+j)$的$W_{i,j}(x)$和$V_{i,j}(t,\varphi)$时，先求第二个下标为零的，即$W_{i,0}(x)$，$V_{i,0}(t,\varphi)$；次之，求第一个下标为零的，即$W_{0,j}(x)$，$V_{0,j}(t,\varphi)$，然后按第一个下标依次递减求解．（3）在程序（2）的求解过程中，按$W_{i,j}(x)$和$V_{i,j}(t,\varphi)$的下标数相同的交替进行，先求$W_{i,j}(x)$，后求$V_{i,j}(t,\varphi)$．（4）当下标数之和$(i+j)>N$时，转为求$V_{i,j}(t,\varphi)$，此时认为$W_{i,j}(x)\equiv 0$.

例如，我们可由退化边值问题：

$$L_0 W_{0,0}=f(x) \tag{2.2}$$

$$B_j W_{0,0}|_{\partial\Omega}=g_j(\varphi) \tag{2.21}$$

求得解$W_{0,0}(x)$，其后，又可以在边界邻域，求问题：

$$M_0 V_{0,0}=0 \tag{2.14}$$

$$\left.\begin{aligned} &H_0^{(m)}V_{0,0}(0,\varphi)=g_m(\varphi)-B_m W_{0,0}(0,\varphi)\\ &H_0^{(m+\alpha)}V_{0,0}(0,\varphi)=0 \end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

的解$V_0(t,\varphi)$．将特征方程(2.13)的l个负实部的根记为：$-\lambda_1,\cdots,-\lambda_l$，此时解$V_{0,0}(t,\varphi)$有如下形式：

$$V_{0,0}(t,\varphi)=\sum_{j=1}^{l}C_j(\varphi)e^{-\lambda_j t}$$

式中系数$C_j(\varphi)$，$(j=1,2,\cdots,l)$由初值条件（2.22）唯一确定.

由 O．B．Гусева[13]的文章可知，退化问题A_0有充分光滑的解，这样就保证了第一迭代过程能够进行．因此，按照上述规定的求解程序，可类似地确定$W_{i,j}(x)$和$V_{i,j}(t,\varphi)$.

关于$V_{i,j}(t,\varphi)$的结构形式，据第二迭代过程的递推方程（2.15）知道，其非齐次项形如：

$$\sum_{r=1}^{l}P_{i,j,r}(t,\varphi)e^{-\lambda_r t} \tag{2.26}$$

其中$P_{i,j,r}(t,\varphi)$为t的多项式．因此，由选择系数法可以求得具有与（2.26）相同形式的特解$V^*_{i,j}(t,\varphi)$.

于是其一般解为

$$V_{i,j}(t,\varphi)=V^*_{i,j}(t,\varphi)+\sum_{r=1}^{l}b_r(\varphi)e^{-\lambda_r t}$$

其中系数$b_r(\varphi)$,$(r=1,2,\cdots,l)$可由初值条件（2.24）唯一确定.

上面求得的$V_{i,j}(t,\varphi)$，$(i,j=0,1,\cdots,N+m+l-1)$只是在边界的η领域有定义，为了得到在整个区域Ω有定义的边界层型函数，引进光滑函数$\Psi(x)\in C^\infty(\bar{\Omega})$，它在边界的$\eta$邻

域之外取零值，当$0\leqslant\rho<\frac{1}{3}\eta$时取值1和$0\leqslant\Psi(x)\leqslant 1$，作函数

$$\tilde{V}_{p-i,i}=\Psi(x)V_{p-i,i}$$
$$(i=0,1,\cdots,p;\ \ p=0,1,\cdots,N+m+l-1)$$

则函数$\tilde{V}_{p-i,i}$为在整个区域Ω上有定义的边界层型函数，并且在边界的$\frac{1}{3}\eta$邻域内$\tilde{V}_{p-i,i}=V_{p-i,i}$，因此问题$A_{\varepsilon,\mu}$具有$N$次形式渐近解如下：

$$U^N_{\varepsilon,\mu}=\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i W_{p-i,i}+\varepsilon^{m+1}\sum_{p=0}^{N+l+m-1}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i\tilde{V}_{p-i,i}\tag{2.27}$$

三、余 项 估 计

下面将导出摄动问题的精确解$U_{\varepsilon,\mu}(x)$与所求的N次形式渐近解$U^N_{\varepsilon,\mu}$之间的余项的估计.

为书写方便，记(2.27)式中

$$W^N_{\varepsilon,\mu}(x)=\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i W_{p-i,i}$$

$$\tilde{V}^N_{\varepsilon,\mu}=\varepsilon^{m+1}\sum_{p=0}^{N+l+m-1}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i\tilde{V}_{p-i,i}$$

于是当$x\in\Omega$时，由递推方程(2.2)，(2.3)得到：

$$\begin{aligned}L_{\varepsilon,\mu}W^N_{\varepsilon,\mu}&=f(x)+\varepsilon^{2l}\sum_{p=N+1-2l}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i L_{2l}W_{p-i,i}\\&\quad+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r\sum_{p=N+1-2r}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i L_r W_{p-i,i}\\&=f(x)+\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{N+1}\left[\varepsilon^{2l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{-2l}+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{-2r}\right]\Phi_1(x)\end{aligned}\tag{3.1}$$

其中$\Phi_1(x)=O(1)$，以Ω_δ表示边界的δ邻域，当$x\in\Omega\setminus\Omega_\eta$时，由于$\tilde{V}_{p-i,i}(t,\varphi)=0$，$i=0,1,\cdots p$；$p=0,1,\cdots N+m+l-1$）则

$$L_{\varepsilon,\mu}\tilde{V}^N_{\varepsilon,\mu}=0\tag{3.2}$$

当$x\in\Omega_\eta\setminus\Omega_{\frac{1}{3}\eta}$时，则

$$L_{\varepsilon,\mu}\tilde{V}^N_{\varepsilon,\mu}=\varepsilon^{-2m}\left[M_0+\sum_{k=1}^{N+m+1}\varepsilon^k M_k+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{N+l+m}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k R_{r,k}\right]\tilde{V}^N_{\varepsilon,\mu}=\varepsilon^M\Phi_2(x)$$

其中 $\Phi_2(x)=O(1)$，M 为任意正的自然数．又当

$x\in\Omega_{\frac{1}{3}\eta}$ 时，则 $\widetilde{V}_{p-i,i}=V_{p-i,i}$，所以由递推方程 (2.14)，(2.15) 得

$$\varepsilon^{-2m}\left[M_0+\sum_{k=1}^{N+m+l}\varepsilon^k M_k+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{N+m+l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k R_{r,k}\right]\widetilde{V}^N_{\varepsilon,\mu}$$

$$=\varepsilon^{-2m}\left[M_0+\sum_{k=1}^{N+m+l}\varepsilon^k M_k+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{N+m+l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k R_{r,k}\right]V^N_{\varepsilon,\mu}$$

$$=\varepsilon^{-m+1}\left\{\sum_{k=1}^{N+m+l}\varepsilon^k\sum_{p=N+m+l-k}^{N+m+l-1}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i V_{p-i,i}\right.$$

$$\left.+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{N+m+l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k\sum_{p=N+m+l-r-k}^{N+m+l-1}\left[\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i R_{r,k}V_{p-i,i}\right]\right\}$$

$$=\varepsilon^{-m+1}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{N+m+l}\left[\sum_{r=1}^{N+m+l}\varepsilon^k\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{-k}\right.$$

$$\left.+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{N+m+l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{-(r+k)}\right]\Phi_3(x) \tag{3.3}$$

其中 $\Phi_3(x)=O(1)$．

综合(3.1)—(3.3)得到

$$L_{\varepsilon,\mu}U^N_{\varepsilon,\mu}=f(x)-G(\varepsilon,\mu)\Phi_4(x)\quad x\in\Omega \tag{3.4}$$

其中

$$\Phi_4(x)=O(1)$$

$$G(\varepsilon,\mu)=\begin{cases}\varepsilon^{N+1}，\text{当}\dfrac{\mu}{\varepsilon^2}\to\beta，\text{当}\ \varepsilon\to 0\ \text{时}，0\leqslant\beta\leqslant\infty. \\ \left(\dfrac{\mu}{\varepsilon}\right)^N\left[\varepsilon+\varepsilon^{-m+1}\left(\dfrac{\mu}{\varepsilon}\right)^{m+1}\right]，\text{当}\dfrac{\mu}{\varepsilon^2}\to\infty，\quad(\varepsilon\to 0\text{时})\end{cases}$$

因此，用 Z_N 表示 $U_{\varepsilon,\mu}$ 与 $U^N_{\varepsilon,\mu}$ 的余项，即

$$U_{\varepsilon,\mu}=U^N_{\varepsilon,\mu}+Z_N \tag{3.5}$$

由(3.4)和边值条件(2.25)得到关于 Z_N 的边值问题：

$$L_{\varepsilon,\mu}Z_N=G(\varepsilon,\mu)\Phi_4(x)\quad x\in\Omega \tag{3.6}$$

$$B_jZ_N|_{\partial\Omega}=\gamma_j(\varepsilon,\mu,\varphi)，\quad(j=0,1,\cdots,m+l-1) \tag{3.7}$$

其中当 $j\geqslant m$ 时，$\gamma_j(\varepsilon,\mu,\varphi)=0$

以 $\widetilde{Z}_N$ 表示在 $\partial\Omega$ 上满足边值条件(3.7)的 $C^{2(m+l)}(\overline{\Omega})$ 中的函数和成立：

$$\widetilde{Z}_N=G(\varepsilon,\mu)P(x) \tag{3.8}$$

其中 $P(x)=O(1)$，作函数

$$\bar{Z}_N = Z_N - \tilde{Z}_N \tag{3.9}$$

则$\overline{Z}_N$确定于下面的齐次边值问题：

$$L_{\varepsilon,\mu}\bar{Z}_N = G(\varepsilon,\mu)\Phi(x),\quad x\in\Omega \tag{3.10}$$

$$B_j\bar{Z}_N|_{\partial\Omega}=0,\quad (j=0,1,\cdots,m+l-1) \tag{3.11}$$

其中 $\Phi(x)=O(1)$

假定当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，$0<\mu\leqslant\mu_0$ 时，算子 $L_{\varepsilon,\mu}$ 有一致有界的逆算子 $L^{-1}_{\varepsilon,\mu}$，即对于满足边值条件（3.11）的任意函数 $W\in C^{2(m+l)}(\overline{\Omega})$，成立

$$\|L_{\varepsilon,\mu}W\|_{L_2}\geqslant K_0\|W\|_{L_2} \tag{3.12}$$

其中 K_0 是正的常数，则

$$\|\overline{Z}_N\|_{L_2}\leqslant K_1G(\varepsilon,\mu) \tag{3.13}$$

并由（3.8）得到

$$\|\tilde{Z}_N\|_{L_2}\leqslant K_2G(\varepsilon,\mu) \tag{3.14}$$

故得

$$\|Z_N\|_{L_2}\leqslant\|Z_N-\tilde{Z}_N\|_{L_2}+\|\tilde{Z}_N\|_{L_2}\leqslant K_3G(\varepsilon,\mu) \tag{3.15}$$

以上 K_1，K_2，K_3 均为正的常数.

四、结　论

综合前面各个部分结果，即有下面的两个定理：

定理1. 假设成立如下条件：

1） 算子 L_0 和 L_{2l} 分别为 $2m$ 和 $2(m+l)$阶的强椭圆型算子，算子 $L_r(r=1,2\cdots,2l-1)$ 为不高于 $2m+r$ 阶的线性偏微分算子.

2） 问题 $A_{\varepsilon,\mu}$ 和 A_0 的参数，即算子 L_r，$(r=0,1,\cdots,2l)$的系数，函数 $f(x)$，边界 $\partial\Omega$ 都是充分光滑的.

3） 问题 A_0 的解存在且唯一.

4） 算子 $L_{\varepsilon,\mu}$ 有一致有界的逆算子$L^{-1}_{\varepsilon,\mu}$（如前定义）.

5） ε,μ 为互相依赖的小参数，并且$\dfrac{\mu}{\varepsilon}\to0(\varepsilon\to0)$，则问题 $A_{\varepsilon,\mu}$ 的解 $U_{\varepsilon,\mu}(x)$ 有如下的渐近式：

$$U_{\varepsilon,\mu}=\sum_{p=0}^{N}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^iW_{p-i,i}+\varepsilon^{m+1}\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{i=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-i}\varepsilon^i\tilde{V}_{p-i,i}+Z_N \tag{4.1}$$

其中 $W_{0,0}(x)$是退化边值问题 A_0 的解；$W_{p-i,i}(p=1,2,\cdots,N;\ i=0,1,\cdots,p)$由递推方程（2.3）和边值条件（2.23）确定；$\tilde{V}_{p-i,i}(t,\varphi)=\Psi(x)V_{p-i,i}(p=0,\ 1,\ \cdots,\ N+m+l-1;\ i=0,1,\cdots,p)$，其中 $V_{p-i,i}(t,\varphi)$ 是边界层函数，由递推方程（2.14），（2.15）和初值条件（2.22），（2.24）确定. Z_N 是余项. 若$\dfrac{\mu}{\varepsilon^2}\to\beta$ $(\varepsilon\to0)$ $0\leqslant\beta<\infty$，则有如下的余项估计式：

$$\|Z_N\|_{L_2}=O(\varepsilon^{N+1}) \tag{4.2}$$

对于$\frac{\mu}{\varepsilon}\to\infty$ ($\varepsilon\to 0$时) 的情形，我们将讨论一种特殊情况，即 $\mu=\varepsilon^{1+\alpha}(0<\alpha<1)$ 这时有

$$G(\varepsilon,\mu)=\varepsilon^{\alpha N}(\varepsilon+\varepsilon^{-m(1-\alpha)+\alpha l+1})$$

$$=\begin{cases} O(\varepsilon^{\alpha N}), \text{当} \frac{m-1}{m+l}<\alpha<\frac{m}{m+l} \\ O(\varepsilon^{\alpha N+1}), \text{当} \frac{m}{m+l}\leqslant\alpha<1. \end{cases}$$

因此，有如下结果：

定理2. 在定理1的假设条件 1)—5) 之下，若$\mu=\varepsilon^{1+\alpha}$，$\left(\frac{m-1}{m+l}<\alpha<1\right)$，则问题$A_{\varepsilon,\mu}$的解$U_{\varepsilon,\mu}$仍有形式渐近解 (4.1)，而其余项$Z_N$成立如下估计式：

$$\|Z_N\|_{L_2}=\begin{cases} O(\varepsilon^{\alpha N}), \text{当} \frac{m-1}{m+l}<\alpha<\frac{m+1}{m+l} \\ O(\varepsilon^{\alpha N+1}), \text{当} \frac{m+1}{m+l}\leqslant\alpha<1 \end{cases}$$

最后指出一点，当摄动算子的最高阶项算子L_{2l}所含参数ε与低阶项算子$L_r(r=1,2,\cdots,2l-1)$所含参数μ满足$\frac{\mu}{\varepsilon}\to 0$ ($\varepsilon\to 0$)的情况，此时摄动问题$A_{\varepsilon,\mu}$为自然正则退化。而在文[1]中所讨论的$\varepsilon=\mu$的情况，一般地，不具有自然正则退化性。

参 考 文 献

1. Вишик, М. И. и Люстерник, Л. А., *УМН СССР*, XII, 5. (1957), 3—122.
2. Линь Цзун-чи (林宗池), *ДАН СССР*. 157, 4 (1964), 784—787.
3. 江福汝, 复旦大学学报 (自然科学版), 9(1964), 513—519.
4. Besjes, J. G., *J. Math. Anal. and Appl.* 49 (1975), 24—41.
5. Comstock, C., *SIAM., J. Appl. Math.*, 20 (1971), 491—502.
6. 江福汝, 复旦学报 (自然科学版), 2 (1978), 29—37.
7. 江福汝, 高汝熹, 复旦学报 (自然科学版), 3 (1979), 35—45.
8. 林宗池, 福建师大学报 (自然科学版), 1 (1980), 1—8.
9. 林宗池, 福建师大学报 (自然科学版), 2 (1980), 1—12.
10. Lions, J. L. and Magens, E., *Non-Homogeneous Boundary Value Problem and Applications*, Springer—Verlag, New York, Heideberg, Berlin (1972).
11. Timoshenko, S. and Woinwsky-Kriger, S., *Theory of Plates and Shells*, 2nd. ed. McGraw—Hill, N. Y. (1959).
12. 林宗池, 福建师大学报 (自然科学版), 2 (1979), 1—12.
13. Гусева, О. В., *ДАН СССР*. 102, 6 (1955), 1069—1072.

Singular Perturbation of General Boundary Value Problem for Higher-Order Elliptic Equation Containing Two-Parameter

Lin Zong-chi

(Department of Mathematics, Fujian Normal University, Fuzhou)

Abstract

In this paper we consider construction of asymptotic expression of solution of general boundary value problem for higher-order elliptic equation containing two-parameter. With the using of the method of two-parameter expression, asymptotic expression of solution and estimation corresponding remainder term are given. These results are the extensions of [1] and [7].