应用数学和力学，第3卷第4期（1982年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

轴对称问题的对角线化一致质量矩阵和弹塑性撞击的动力有限元分析

钱 伟 长

（北京清华大学，1982年1月5日收到）

摘　　要

本文找到了轴对称问题的三角圆环有限元的对角线化一致质量矩阵，从而克服了集总质量法的粗略随意性所引起的不安，以及一致质量法的非对角线项对计算工作带来的麻烦．本文也对弹塑性轴对称撞击问题提供了动力有限元分析计算的基础．

一、引　　论

动力有限元问题中，有一个质量矩阵问题．通常采用集总质量法和一致质量法求得质量矩阵[1]．集总质量法源出于早期的振动和颤振计算[2]．一致质量法和正规的有限元计算有关，它和所用形状函数相一致．不过，一致质量矩阵一般不是对角线化的．这样，就给数值计算带来不便．在大多数的计算程序如EPIC[3],[4]等中，人们仍采用对角线化的集总质量矩阵；也即是说，人们把这一有限元的质量按一定比例集总分配给该有限元的各个结点，集总质量矩阵的对角线项就是各结点所分配到的质量．当然，这种集总质量的假定，还缺乏信服的证明，人们经常把计算结果的误差和缺陷归罪于使用了集总质量法．

本文作者曾在前文[5]中证明，对四面体有限元而言，不用集总质量法，用一种二次式形状函数，也可以找到具有对角线化的一致质量矩阵，并用这种质量矩阵研究了在一般空间内的弹塑性撞击有限元计算．

本文进一步研究了轴对称问题的三角圆环有限元，证明用一种三次式形状函数，也同样可以找到具有对角线化的一致质量矩阵，并用这种质量矩阵研究轴对称问题的弹塑性撞击有限元计算．

当然，四面体有限元的质量矩阵对角线化问题比三角圆环有限元同类问题，要简单一些　对四面体有限元问题而言，质量矩阵的对角线化条件

$$\left.\begin{aligned}&\iiint_{(e)} N_iN_jdV=0,\quad \iiint_{(e)} N_iN_mdV=0,\quad \iiint_{(e)} N_iN_pdV=0,\\&\iiint_{(e)} N_jN_mdV=0,\quad \iiint_{(e)} N_jN_pdV=0,\quad \iiint_{(e)} N_pN_mdV=0\end{aligned}\right\}\tag{1.1}$$

中，只有一个是独立的．所以，在假设的二次式形状函数中，只要有一个可调节的待定参数．这个参数就是由这一个独立的对角线化条件决定的．(1.1)式中的N_i, N_j, N_m, N_p为四面体有限元中有关四个结点i, j, m, p的二次式形状函数．

对三角圆环有限元而言，由于轴对称坐标r和z不能互换，质量矩阵的对角线化条件

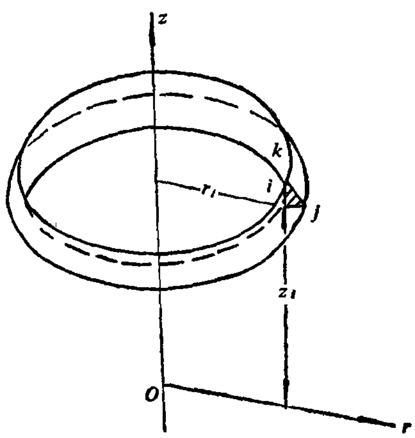
$$\iint_{(e)} N_i N_j r dr dz = 0,\quad \iint_{(e)} N_i N_k r dr dz = 0,\quad \iint_{(e)} N_k N_j r dr dz = 0 \tag{1.2}$$

中，应有两个独立条件．所以，在假设的高次式形状函数中，应有两个独立的待定参数．它们就是由这两个独立条件决定的．(1.2)中N_i, N_j, N_k是三角圆环有限元中有关三个结点i, j, k的高次形状函数．

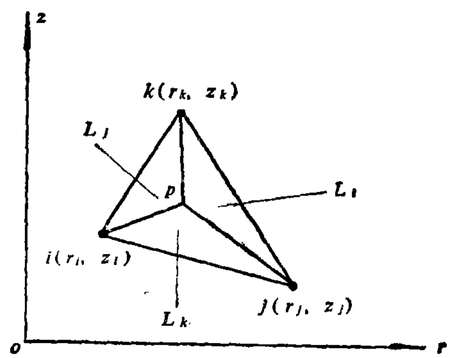
在四面体问题中，为了求得待定参数的解，我们只要求解一个一元二次式．在三角圆环问题中，为了求得两个待定参数的解，我们要求解两个二元二次方程式．

二、三角圆环有限元的形状函数和对角线化条件的解

设在典型的三角圆环有限元和某一(r, z)坐标面上交截一个三角形ijk(图1)．i, j, k为结



(a)



(b)

图1　三角圆环有限元(a)及其截面三角形(b)

点，其坐标分别为(r_i, z_i)，(r_j, z_j)，(r_k, z_k)．我们引用面积坐标L_i, L_j, L_k，即

$$\left.\begin{aligned} L_i &= \frac{1}{2A}\{a_i + b_i r + c_i z\} \\ L_j &= \frac{1}{2A}\{a_j + b_j r + c_j z\} \\ L_k &= \frac{1}{2A}\{a_k + b_k r + c_k z\} \end{aligned}\right\} \tag{2.1}$$

其中a_i, b_i, c_i等分别表示

$$\left.\begin{aligned} a_i &= r_j z_k - r_k z_j \\ b_i &= z_j - z_k \\ c_i &= -r_j + r_k \end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

将脚码 $\begin{array}{ccc} & k & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ i & \to & j \end{array}$，就得出$a_j,b_j,c_j,a_k,b_k,c_k$. (2.1)式中的$A$表示三角形总面积，它是

$$2A=\begin{vmatrix} 1 & r_i & z_i \\ 1 & r_j & z_j \\ 1 & r_k & z_k \end{vmatrix}=b_ic_j-b_jc_i=b_jc_k-b_kc_j=b_kc_i-b_ic_k \tag{2.3}$$

L_i,L_j,L_k为三角形任一点的面积坐标．或

$$\left.\begin{aligned} r&=r_iL_i+r_jL_j+r_kL_k \\ z&=z_iL_i+z_jL_j+z_kL_k \end{aligned}\right\} \tag{2.4}$$

面积坐标还有下列性质：

$L_i=1$，在结点 i；$L_i=0$，在 jk 边上 (2.5a)

$L_j=1$，在结点 j；$L_j=0$，在 ik 边上 (2.5b)

$L_k=1$，在结点k；$L_k=0$，在ij 边上. (2.5c)

还有在整个三角形内，

$$L_i+L_j+L_k=1 \tag{2.6}$$

设位移分量u，w在结点i,j,k上的值分别为(u_i,w_i)，(u_j,w_j)，(u_k,w_k)，并设N_i，N_j，N_k为有关的形状函数，而且

$$\left.\begin{aligned} u&=N_iu_i+N_ju_j+N_ku_k \\ w&=N_iw_i+N_jw_j+N_kw_k \end{aligned}\right\} \tag{2.7}$$

则N_i，N_j，N_k必满足下述条件

$N_i=1$，在结点 i 上，$N_i=0$ 在结点j,k上 (2.8a)

$N_j=1$，在结点j 上，$N_j=0$ 在结点k,i上 (2.8b)

$N_k=1$，在结点k 上，$N_k=0$ 在结点i,j上 (2.8c)

$N_i+N_j+N_k=1$ 在三角形内各点上 (2.8d)

除此以外，N_i，N_j，N_k还应满足质量矩阵的对角线化条件，即

$$\iint_{(e)} N_iN_jrdrdz=0,\quad \iint_{(e)} N_jN_krdrdz=0,\quad \iint_{(e)} N_kN_irdrdz=0 \tag{2.9a,b,c}$$

其中，由于r,z是不能交换的，因此，只有两个条件是独立的．设我们可以把N_i,N_j,N_k写成L_i，L_j，L_k的函数，把(2.4)式中的r代入(2.9a,b,c)，即得

$$r_i\iint_{(e)} N_iN_jL_idrdz+r_j\iint_{(e)} N_iN_jL_jdrdz+r_k\iint_{(e)} N_iN_jL_kdrdz=0 \tag{2.10a}$$

$$r_i\iint_{(e)} N_jN_kL_idrdz+r_j\iint_{(e)} N_jN_kL_jdrdz+r_k\iint_{(e)} N_jN_kL_kdrdz=0 \tag{2.10b}$$

$$r_i\iint_{(e)} N_kN_iL_idrdz+r_j\iint_{(e)} N_kN_iL_jdrdz+r_k\iint_{(e)} N_kN_iL_kdrdz=0 \tag{2.10c}$$

只要满足下述条件，(2.10a,b,c)在r_i,r_j,r_k为任何值时(不同时为零) 都满足．

$$\iint_{(e)} N_iN_jL_idrdz=\iint_{(e)} N_iN_jL_jdrdz=\iint_{(e)} N_jN_kL_jdrdz$$

$$=\iint N_jN_kL_kdrdz=\iint N_kN_iL_idrdz=\iint N_kN_iL_kdrdz=0 \tag{2.11a}$$

$$\iint_{(e)} N_iN_jL_kdrdz=\iint_{(e)} N_jN_kL_idrdz=\iint_{(e)} N_kN_iL_jdrdz=0 \tag{2.11b}$$

第一类积分中，L的脚码和NN的脚码中有一个相同，第二类积分中，L的脚码和NN的脚码都不同．我们很易证明这两类积分各自等值．所以(2.11a)，(2.11b)实际上是两个独立的对角线化条件．为了简单起见，我们只取其最左的一式，即

$$\left.\begin{aligned}&\iint_{(e)} N_iN_jL_idrdz=0\\&\iint_{(e)} N_iN_jL_kdrdz=0\end{aligned}\right\} \tag{2.12}$$

所以，满足对角线化的一致质量矩阵要求的N_i,N_j,N_k必须既满足(2.8a,b,c,d)又满足(2.12)式的L_i,L_j,L_k的形状函数．

例如，如果取L_i,L_j,L_k的一次式为形状函数则可取

$$N_i=L_i,\quad N_j=L_j,\quad N_k=L_k \tag{2.13}$$

它们满足(2.8a,b,c,d)，但不满足(2.12)．因为我们已知有积分

$$\iint_{(e)} L_i^\alpha L_j^\beta L_k^\gamma drdz=\frac{\alpha!\beta!\gamma!}{(\alpha+\beta+\gamma+2)!}2A \tag{2.14}$$

所以，有

$$\left.\begin{aligned}&\iint_{(e)} N_iN_jL_idrdz=\iint_{(e)} L_i^2L_jdrdz=\frac{4}{5!}A\neq 0\\&\iint_{(e)} N_iN_jL_kdrdz=\iint_{(e)} L_iL_jL_kdrdz=\frac{2}{5!}A\neq 0\end{aligned}\right\} \tag{2.15}$$

也即是说，以(2,13)为形状函数的一致质量矩阵并不是对角线化的．

让我们取L_i，L_j,L_k的二次式为形状函数．这个二次式既有i,j,k的轮换对称性，而且N_i中的L_j,L_k也是可以互换的．（同样N_j中的L_i,L_k,N_k中的L_i,L_j都可以各自互换）．于是，我们设N_i,N_j,N_k为

$$N_i=L_i+A_0+B_1L_i+C_1(L_j+L_k)+B_2L_i^2+C_2(L_j^2+L_k^2)+D_2L_jL_k$$
$$+E_2(L_iL_j+L_iL_k) \tag{2.16a}$$

$$N_j=L_j+A_0+B_1L_j+C_1(L_i+L_k)+B_2L_j^2+C_2(L_i^2+L_k^2)+D_2L_iL_k$$
$$+E_2(L_jL_i+L_jL_k) \tag{2.16b}$$

$$N_k=L_k+A_0+B_1L_k+C_1(L_i+L_j)+B_2L_k^2+C_2(L_i^2+L_j^2)+D_2L_iL_j$$
$$+E_2(L_kL_i+L_kL_j) \tag{2.16c}$$

其中$A_0,B_1,C_1,B_2,C_2,D_2,E_2$为待定常数．

把(2.16a,b,c)代入(2.8a,b,c)，得

$$A_0+B_1+B_2=0 \tag{2.17a}$$

$$A_0+C_1+C_2=0 \tag{2.17b}$$

把(2.16a,b,c,)代入(2.8d)，并利用(2.6)，得

$$3A_0+B_1+2C_1+(B_2+2C_2)(L_i^2+L_j^2+L_k^2)+(D_2+2E_2)(L_iL_j+L_iL_k+L_jL_k)=0 \tag{2.18}$$

利用$L_i^2+L_j^2+L_k^2=1-2(L_iL_j+L_jL_k+L_kL_i)$和(2.17a,b)，上式化为

$$(D_2+2E_2-2B_2-4C_2)(L_iL_j+L_jL_k+L_kL_i)=0 \tag{2.19}$$

但$L_iL_j+L_jL_k+L_kL_i\neq 0$，所以，得

$$D_2+2E_2-2B_2-4C_2=0 \tag{2.20}$$

(2.17a,b)，(2.20)给出了$A_0,B_1,C_1,B_2,C_2,D_2,E_2$等七个待定常数中的三个关系．从(2.17a,b)，(2.20)中解出A_0,C_1,D_2，代入(2.16a)式，整理后得

$$\begin{aligned}N_i=&L_i+B_1(-1+L_i+L_j+L_k)+B_2(-1+L_j+L_k+2L_jL_k+L_i^2)\\&+C_2(-L_j-L_k+L_j^2+L_k^2+4L_jL_k)+E_2(L_iL_j+L_iL_k-2L_jL_k)\end{aligned} \tag{2.21}$$

在利用了(2.6)式以后，(2.21)式可以进一步简化为

$$\begin{aligned}N_i=&L_i+B_2(-L_i+L_i^2+2L_kL_j)+C_2(L_i-L_i^2+2L_jL_k-2L_iL_j-2L_iL_k)\\&+E_2(L_iL_j+L_iL_k-2L_jL_k)\end{aligned} \tag{2.22}$$

粗看上式有三个待定参数，其实只有一个．因为，根据$L_i+L_j+L_k=1$，我们很易证明

$$-L_i+L_i^2+2L_kL_j=-L_i(L_i+L_j+L_k)+L_i^2+2L_kL_j=2L_jL_k-L_iL_j-L_iL_k \tag{2.23a}$$

$$\begin{aligned}L_i-L_i^2+2L_jL_k-2L_iL_j-2L_iL_k&=L_i(L_i+L_j+L_k)-L_i^2+2L_jL_k-2L_iL_j-2L_iL_k\\&=2L_jL_k-L_iL_j-L_iL_k\end{aligned} \tag{2.23b}$$

所以，(2.22)可以写成

$$N_i=L_i+B(2L_kL_j-L_iL_j-L_iL_k) \tag{2.24}$$

其中

$$B=B_2+C_2-E_2 \tag{2.25}$$

同样，可以简化N_j,N_k，满足(2.8a,b,c,d)的二次式形状函数为

$$\left.\begin{aligned}N_i&=L_i+B(2L_kL_j-L_iL_j-L_iL_k)\\N_j&=L_j+B(2L_iL_k-L_jL_k-L_jL_i)\\N_k&=L_k+B(2L_iL_j-L_iL_k-L_jL_k)\end{aligned}\right\} \tag{2.26}$$

这里只有一个待定常数，当然，(2.36)式无法满足两个独立的对角线化条件(2.12)．也即是说，对轴对称问题而言，在二次式的形状函数的范围内，不存在对角线化的一致质量矩阵．

现在让我们进一步研究三次式的形状函数，满足上述i,j,k轮换条件的形状函数可以写成

$$\begin{aligned}N_i=&L_i+A_0+B_1L_i+C_1(L_j+L_k)+B_2L_i^2+C_2(L_j^2+L_k^2)+D_2L_jL_k\\&+E_2(L_iL_j+L_iL_k)+B_3L_i^3+C_3(L_j^3+L_k^3)+D_3L_i^2(L_j+L_k)\\&+E_3[L_j^2(L_i+L_k)+L_k^2(L_i+L_j)]+F_3L_iL_jL_k\end{aligned} \tag{2.27a}$$

$$\begin{aligned}N_j=&L_j+A_0+B_1L_j+C_1(L_i+L_k)+B_2L_j^2+C_2(L_i^2+L_k^2)+D_2L_iL_k\\&+E_2(L_jL_i+L_jL_k)+B_3L_j^3+C_3(L_i^3+L_k^3)+D_3L_j^2(L_i+L_k)\\&+E_3[L_i^2(L_j+L_k)+L_k^2(L_i+L_j)]+F_3L_iL_jL_k\end{aligned} \tag{2.27b}$$

$$\begin{aligned}N_k=&L_k+A_0+B_1L_k+C_1(L_i+L_j)+B_2L_k^2+C_2(L_i^2+L_j^2)+D_2L_iL_j\\&+E_2(L_kL_i+L_kL_j)+B_3L_k^3+C_3(L_i^3+L_j^3)+D_3L_k^2(L_i+L_j)\\&+E_3[L_i^2(L_j+L_k)+L_j^2(L_i+L_k)]+F_3L_iL_jL_k\end{aligned} \tag{2.27c}$$

其中$A_0,B_1,C_1,B_2,C_2,D_2,E_2,B_3,C_3,D_3,E_3,F_3$为12个待定参数. 根据(2.8a,b,c), 我们有

$$\left.\begin{array}{l}A_0+B_1+B_2+B_3=0\\ A_0+C_1+C_2+C_3=0\end{array}\right\} \tag{2.28}$$

根据(2.8a), 并利用(2.28), 我们从(2.27a,b,c)求得

$$\begin{aligned}&3A_0+B_1+2C_1+(B_2+2C_2)(L_i^2+L_j^2+L_k^2)+(D_2+2E_2)(L_jL_k+L_kL_i+L_iL_j)\\&\quad+(B_3+2C_3)(L_i^3+L_j^3+L_k^3)+(D_3+2E_3)[L_i^2(L_j+L_k)+L_j^2(L_i+L_k)+L_k^2(L_i+L_j)]\\&\quad+3F_3(L_iL_jL_k)=0\end{aligned} \tag{2.29}$$

从(2.28), 我们有

$$3A_0+B_1+2C_1=-B_2-2C_2-B_3-2C_3 \tag{2.30}$$

而且

$$\left.\begin{array}{l}L_i^2+L_j^2+L_k^2-1=-2L_iL_j-2L_jL_k-2L_kL_i\\ L_i^3+L_j^3+L_k^3-1=-3L_i^2(L_j+L_k)-3L_j^2(L_i+L_k)-3L_k^2(L_i+L_j)-6L_iL_jL_k\end{array}\right\} \tag{2.31}$$

代入(2.29), 得

$$\begin{aligned}&(D_2+2E_2-2B_2-4C_2)(L_jL_k+L_kL_i+L_iL_j)\\&\quad+(D_3+2E_3-3B_3-6C_3)[L_i^2(L_j+L_k)+L_j^2(L_i+L_k)+L_k^2(L_i+L_j)]\\&\quad+(3F_3-6B_3-12C_3)L_iL_jL_k=0\end{aligned} \tag{2.32}$$

由于恒等式

$$\begin{aligned}L_iL_j+L_jL_k+L_kL_i&=(L_iL_j+L_jL_k+L_kL_i)(L_i+L_j+L_k)\\&=L_i^2(L_j+L_k)+L_j^2(L_i+L_k)+L_k^2(L_i+L_j)+3L_iL_jL_k\end{aligned} \tag{2.33}$$

(2.32)可以进一步简化为

$$\begin{aligned}&(D_2+2E_2-2B_2-4C_2+D_3+2E_3-3B_3-6C_3)(L_iL_j+L_jL_k+L_kL_i)\\&\quad+(3F_3-3D_3-6E_3+3B_3+6C_3)L_iL_jL_k=0\end{aligned} \tag{2.34}$$

由于$L_iL_j+L_jL_k+L_kL_i$, $L_iL_jL_k$是互相独立的, 所以有

$$\left.\begin{array}{l}D_2+2E_2-2B_2-4C_2+D_3+2E_3-3B_3-6C_3=0\\ F_3-D_3-2E_3+B_3+2C_3=0\end{array}\right\} \tag{2.35}$$

从(2.28)和(2.35)中, 解出A_0,B_1,D_2,F_3, 得

$$A_0=-C_1-C_2-C_3 \tag{2.36a}$$

$$B_1=C_1+C_2+C_3-B_2-B_3 \tag{2.36b}$$

$$D_2=2B_2+4C_2-2E_2-D_3-2E_3+3B_3+6C_3 \tag{2.36c}$$

$$F_3=-B_3-2C_3+D_3+2E_3 \tag{2.36d}$$

把(2.36)式中的A_0,B_1,D_2,F_3代入(2.29a), 得

$$\begin{aligned}N_i=&L_i+C_1(-1+L_i+L_j+L_k)+B_2(-L_i+L_i^2+2L_jL_k)+C_2(-1+L_i+L_j^2+L_k^2\\&+4L_jL_k)+E_2(L_iL_j+L_iL_k-2L_jL_k)+B_3[L_i^3-L_i+3L_jL_k-L_iL_jL_k]+C_3[L_j^3+L_k^3\\&+6L_jL_k-2L_iL_jL_k+L_i-1]+D_3[L_i^2(L_j+L_k)-L_jL_k+L_iL_jL_k]\\&+E_3[L_j^2(L_i+L_k)+L_k^2(L_i+L_j)+2L_iL_jL_k-2L_jL_k]\end{aligned} \tag{2.37}$$

这里粗看好象有8个待定系数, 其实大大少于此数. 例如, 式右第二项$C_1(-1+L_i+L_j+L_k)$根据(2.6)应恒等于零, 如果称其余的N_i表达式为

$$N_i=L_i+B_2g_1+C_2g_2+E_2g_3+B_3g_4+C_3g_5+D_3g_6+E_3g_7 \tag{2.38}$$

其中

$$
\left.\begin{aligned}
g_1&=-L_i+L_i^2+2L_jL_k\\
g_2&=-1+L_i+L_j^2+L_k^2+4L_jL_k\\
g_3&=L_iL_j+L_iL_k-2L_jL_k\\
g_4&=L_i^3-L_i+3L_jL_k-L_iL_jL_k\\
g_5&=L_k^3+L_j^3+6L_jL_k-2L_iL_jL_k+L_i-1\\
g_6&=L_i^2(L_j+L_k)-L_jL_k+L_iL_jL_k\\
g_7&=L_j^2(L_i+L_k)+L_k^2(L_i+L_j)+2L_iL_jL_k-2L_jL_k
\end{aligned}\right\} \tag{2.39}
$$

它们并不独立，有下列诸关系，即

$$
\left.\begin{aligned}
&g_1=g_2=-g_3\\
&g_4+2g_6=-g_7\\
&g_4+g_5=-3g_3\\
&g_6+g_7=g_3
\end{aligned}\right\} \tag{2.40}
$$

解之，得

$$
g_1=-g_3,\quad g_2=-g_3,\quad g_4=g_7-2g_3,\quad g_5=-g_3-g_7,\quad g_6=g_3-g_7 \tag{2.41}
$$

代入(2.38)，得

$$
\begin{aligned}
N_i&=L_i+Bg_3+Cg_7\\
&=L_i+B(L_iL_j+L_iL_k-2L_jL_k)+C[L_j^2(L_i-L_k)+L_k^2(L_i-L_j)]
\end{aligned} \tag{2.42}
$$

其中B，C分别为

$$
\left.\begin{aligned}
B&=E_2-B_2-C_2+D_3-2B_3-C_3\\
C&=B_3-C_3-D_3+E_3
\end{aligned}\right\} \tag{2.43}
$$

(2.42)有二个待定常数，是由对角线化条件(2.12)所决定的．整个形状函数为

$$
\left.\begin{aligned}
N_i&=L_i+B(L_iL_j+L_iL_k-2L_jL_k)+C[L_j^2(L_i-L_k)+L_k^2(L_i-L_j)]\\
N_j&=L_j+B(L_jL_k+L_jL_i-2L_kL_i)+C[L_k^2(L_j-L_i)+L_i^2(L_j-L_k)]\\
N_k&=L_k+B(L_kL_i+L_kL_j-2L_iL_j)+C[L_i^2(L_k-L_j)+L_j^2(L_k-L_i)]
\end{aligned}\right\} \tag{2.44}
$$

把N_i，N_j，N_k，代入(2.12)式，用积分公式(2.14)，得B和C的二个二次方程：

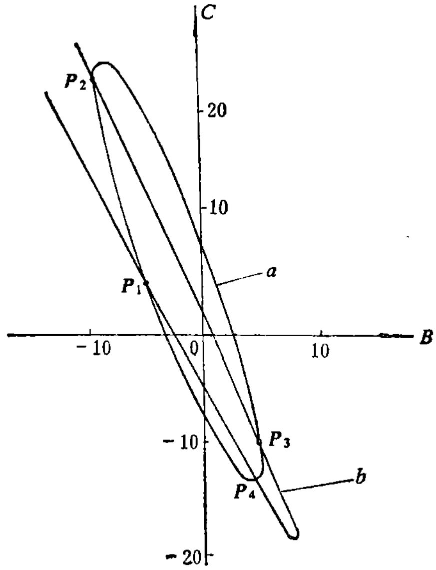
$$
\left.\begin{aligned}
&20B^2+14BC+3C^2+28B+4C-168=0\\
&44B^2+44BC+11C^2+112B+48C-84=0
\end{aligned}\right\} \tag{2.45}
$$

这是二个椭圆(图2)，共有四个交点P_1,P_2,P_3,P_4．

$$
\left.\begin{aligned}
&(1)\ \text{交点}P_1\text{：}\ C=3.244642,\quad B=-4.924546\\
&(2)\ \text{交点}P_2\text{：}\ C=22.567888,\quad B=-9.794031\\
&(3)\ \text{交点}P_3\text{：}\ C=-8.485116,\ B=4.379149\\
&(4)\ \text{交点}P_4\text{：}\ C=-13.327287,\ B=4.339558
\end{aligned}\right\} \tag{2.46}
$$

每个交点所决定的C-D值都使形状函数(2.44)满足对角线化条件．各该交点所决定的形状函数在i-j边上的分布形状见图3．很易看到交点P_3所决定的形状函数的形状变化较为缓慢．建议在以后的计算中，取交点P_3所决定的$B=4.379149$和$C=-8.485116$为(2.44)中的B，C值．

现在让我们计算一致质量矩阵的对角线项．它们定义为



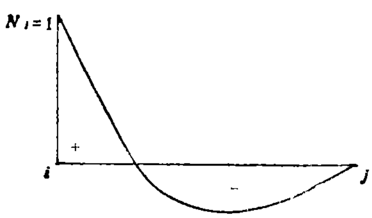
椭圆a：$20B^2+14BC+3C^2+28B+4C-168=0$

椭圆b：$44B^2+44BC+11C^2+112B+48C-84=0$

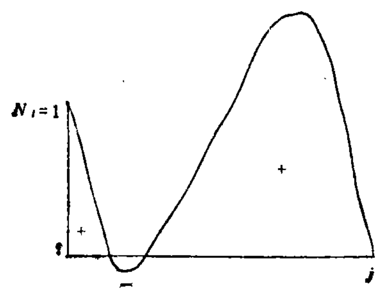
交点P_1：$C=3.244642$，$B=-4.924546$；　交点P_2：$C=22.567888$，$B=-9.794031$

交点P_3：$C=-8.485116$，$B=4.379149$　交点P_4：$C=-13.327287$，$B=4.339558$

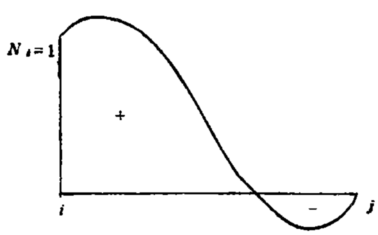
图2　两个对角线化椭圆的交点



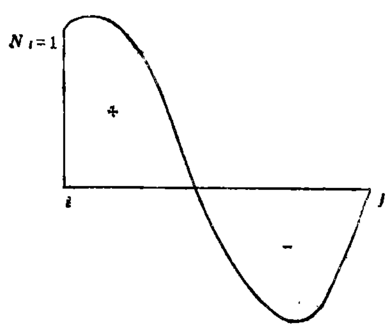
交点P_1：$B=-4.924546$
$C=3.244642$



交点P_2：$B=-9.794031$
$C=22.567888$



交点P_3：$B=4.379149$
$C=-8.485116$



交点P_4：$B=4.339558$
$C=-13.327287$

图3　形状函数N_i在$i\ j$边($L_k=0$)上的分布$N_i=L_i+BL_iL_j+CL_iL_j^2=L_i+BL_i(1-L_i)+CL_i(1-L_i)^2$
(在本文以后的计算中，建议用交点P_3所决定的B和C值，即$B=4.379149$，$C=-8.485116$)

$$\left.\begin{aligned}M_i&=2\pi\rho\iint_{(e)}N_i^2rdrdz=2\pi\rho\iint_{(e)}N_i^2(r_iL_i+r_jL_j+r_kL_k)drdz\\M_j&=2\pi\rho\iint_{(e)}N_j^2rdrdz=2\pi\rho\iint_{(e)}N_j^2(r_iL_i+r_jL_j+r_kL_k)drdz\\M_k&=2\pi\rho\iint_{(e)}N_k^2rdrdz=2\pi\rho\iint_{(e)}N_k^2(r_iL_i+r_jL_j+r_kL_k)drdz\end{aligned}\right\}\tag{2.47}$$

把(2.44)代入(2.47)式，并用积分公式(2.14)，得

$$\left.\begin{aligned}M_i&=2\pi\rho A\{\mu_1r_i+\mu_2(r_j+r_k)\}\\M_j&=2\pi\rho A\{\mu_2(r_i+r_k)+\mu_1r_j\}\\M_k&=2\pi\rho A\{\mu_2(r_i+r_j)+\mu_1r_k\}\end{aligned}\right\}\tag{2.48}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}\mu_1&=\frac{2}{7!}\{252+112B+32C+20B^2+14BC+3C^2\}\\\mu_2&=\frac{2}{7!}\{84+28B+12C+32B^2+29BC+7C^2\}\end{aligned}\right\}\tag{2.49}$$

如果用P_3交点的$B=4.379149$，$C=-8.485116$值，上式给出

$$\mu_1=0.2183592\qquad\qquad \mu_2=0.05748705\tag{2.50}$$

很易证明

$$M_i+M_j+M_k=\frac{2\pi}{3}\rho A(r_i+r_j+r_k)\tag{2.51}$$

三、运动方程的积分

现在让我们研究轴对称问题的运动方程：

$$\left.\begin{aligned}\rho\ddot{u}&=\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)\\\rho\ddot{w}&=\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\tau_{rz}\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

其中，ρ为变形以后的材料密度，u,w为r,z轴向的位移分量，$\ddot{u}$，$\ddot{w}$为加速度分量，$\sigma_r,\sigma_z,\sigma_\theta$，$\tau_{rz}$为应力分量．设$\delta u$，$\delta w$为虚位移，于是，(3.1)式上分别乘$\delta u$，$\delta w$，而后乘$2\pi rdrdz$积分，得

$$\left.\begin{aligned}\iint 2\pi\rho\ddot{u}\delta urdrdz&=2\pi\iint\left\{\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)\right\}\delta urdrdz\\\iint 2\pi\rho\ddot{w}\delta urdrdz&=2\pi\iint\left\{\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\tau_{rz}\right\}\delta wrdrdz\end{aligned}\right\}\tag{3.2}$$

如果我们把积分全域分为n个有限元，则(3.2)式的积分应该是n个有限元积分之和．这些有限元积分形式相同，称为各该有限元的特征方程式．这些特征方程单独并不成立，只是

在 n 个有限元组合在一起才是成立的.

特征方程可以写成

$$\left.\begin{aligned}\iint_{(e)}2\pi\rho\ddot{u}\delta urdrdz&=2\pi\iint_{(e)}\left\{\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z}+\frac{1}{r}(\sigma_r-\sigma_\theta)\right\}\delta urdrdz\\ \iint_{(e)}2\pi\rho\ddot{w}\delta wrdrdz&=2\pi\iint_{(e)}\left\{\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+\frac{1}{r}\tau_{rz}\right\}\delta wrdrdz\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

设 $u,v;\ddot{u},\ddot{w};\sigma_r,\sigma_z,\sigma_\theta,\tau_{rz}$ 都可以近似地用形状函数 N_i,N_j,N_k 以及各该量在 i,j,k 结点上的值来表示. 即

$$\left.\begin{aligned}&u=\mathbf{N}\mathbf{u},\quad w=\mathbf{N}\mathbf{w};\quad \ddot{u}=\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}},\quad \ddot{w}=\mathbf{N}\ddot{\mathbf{w}}\\ &\sigma_r=\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_r,\quad \sigma_z=\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_z;\quad \sigma_\theta=\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_\theta,\quad \tau_{rz}=\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}_{rz}\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

其中

$$\mathbf{N}=\lfloor N_i,\ N_j,\ N_k\rfloor\tag{3.5a}$$

$$\mathbf{u}^T=\lfloor u_i,u_j,u_k\rfloor\qquad \delta\mathbf{u}^T=\lfloor\delta u_i,\delta u_j,\delta u_k\rfloor\tag{3.5b}$$

$$\mathbf{w}^T=\lfloor w_i,w_j,w_k\rfloor\qquad \delta\mathbf{w}^T=\lfloor\delta w_i,\delta w_j,\delta w_k\rfloor\tag{3.5c}$$

$$\ddot{\mathbf{u}}^T=\lfloor\ddot{u}_i,\ddot{u}_j,\ddot{u}_k\rfloor\tag{3.5d}$$

$$\ddot{\mathbf{w}}^T=\lfloor\ddot{w}_i,\ddot{w}_j,\ddot{w}_k\rfloor\tag{3.5e}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_r^T=\lfloor\sigma_{ri},\sigma_{rj},\sigma_{rk}\rfloor\tag{3.5f}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_z^T=\lfloor\sigma_{zi},\sigma_{zj},\sigma_{zk}\rfloor\tag{3.5g}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_\theta^T=\lfloor\sigma_{\theta i},\sigma_{\theta j},\sigma_{\theta k}\rfloor\tag{3.5h}$$

$$\boldsymbol{\tau}_{rz}^T=\lfloor\tau_{rzi},\tau_{rzj},\tau_{rzk}\rfloor\tag{3.5i}$$

N_i, N_j, N_k见(2.44), 它们具有对角线化的一致质量矩阵.

由于δu_i, δu_j, δu_k都是独立的, (3.3)式的第一式可以分为三个特征方程, 即

$$\iint_{(e)}2\pi\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_irdrdz=2\pi\iint_{(e)}\left\{r\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial r}\boldsymbol{\sigma}_r+r\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\boldsymbol{\tau}_{rz}+\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_r-\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_\theta\right\}N_idrdz\tag{3.6a}$$

$$\iint_{(e)}2\pi\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_jrdrdz=2\pi\iint_{(e)}\left\{r\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial r}\boldsymbol{\sigma}_r+r\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\boldsymbol{\tau}_{rz}+\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_r-\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_\theta\right\}N_jdrdz\tag{3.6b}$$

$$\iint_{(e)}2\pi\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_krdrdz=2\pi\iint_{(e)}\left\{r\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial r}\boldsymbol{\sigma}_r+r\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}\boldsymbol{\tau}_{rz}+\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_r-\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_\theta\right\}N_kdrdz\tag{3.6c}$$

设密度ρ在有限元的范围内, 近似地为常量, 于是, 根据对角线化条件(2.9a,b,c), 以及(2.47)式, 我们得

$$\left.\begin{aligned}\iint_{(e)}2\pi\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_irdrdz&=M_i\ddot{u}_i\\ \iint_{(e)}2\pi\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_jrdrdz&=M_j\ddot{u}_j\\ \iint_{(e)}2\pi\rho\mathbf{N}\ddot{\mathbf{u}}N_krdrdz&=M_k\ddot{u}_k\end{aligned}\right\}\tag{3.7}$$

于是，特征方程(3.6a,b,c)可以写成

$$M_i\ddot{u}_i=f_{ri},\qquad M_j\ddot{u}_j=f_{rj},\qquad M_k\ddot{u}_k=f_{rk}\tag{3.8}$$

其中 f_{ri},f_{rj},f_{rk} 代表作用在 i,j,k 结点上在 r 轴向的有效内力分量.

$$f_{ri}=2\pi\iint_{(e)}\left\{r\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r}\boldsymbol{\sigma}_r+r\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}\boldsymbol{\tau}_{rz}+\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_r-\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_\theta\right\}N_i\,drdz\tag{3.9a}$$

$$f_{rj}=2\pi\iint_{(e)}\left\{r\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r}\boldsymbol{\sigma}_r+r\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}\boldsymbol{\tau}_{rz}+\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_r-\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_\theta\right\}N_j\,drdz\tag{3.9b}$$

$$f_{rk}=2\pi\iint_{(e)}\left\{r\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r}\boldsymbol{\sigma}_r+r\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}\boldsymbol{\tau}_{rz}+\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_r-\mathbf{N}\boldsymbol{\sigma}_\theta\right\}N_k\,drdz\tag{3.9c}$$

如果把结点 i 有关的所有单元的贡献组合在一起，则结点 i 的加速度应该是

$$\ddot{u}_i^t=\frac{\sum\limits^{i} f_{ri}}{\sum\limits^{i} M_i}\tag{3.10}$$

其它各结点的加速度也相同．即

$$\ddot{u}_j^t=\frac{\sum\limits^{j} f_{rj}}{\sum\limits^{j} M_j},\qquad \ddot{u}_k^t=\frac{\sum\limits^{k} f_{rk}}{\sum\limits^{k} M_k}\tag{3.11}$$

同样，我们可以从(3.3)式的第二式求得

$$\ddot{w}_i^t=\frac{\sum\limits^{i} f_{zi}}{\sum\limits^{i} M_i},\qquad \ddot{w}_j^t=\frac{\sum\limits^{j} f_{zj}}{\sum\limits^{j} M_j},\qquad \ddot{w}_k^t=\frac{\sum\limits^{k} f_{zk}}{\sum\limits^{k} M_k}\tag{3.12}$$

其中M_i，M_j，M_k见(2.48)，f_{zi}，f_{zj}，f_{zk}分别代表

$$\left.\begin{aligned}
f_{zi}&=2\pi\iint_{(e)}\left\{r\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r}\boldsymbol{\tau}_{rz}+r\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}\boldsymbol{\sigma}_z+\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}_{rz}\right\}N_i\,drdz\\
f_{zj}&=2\pi\iint_{(e)}\left\{r\frac{d\mathbf{N}}{dr}\boldsymbol{\tau}_{rz}+r\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}\boldsymbol{\sigma}_z+\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}_{rz}\right\}N_j\,drdz\\
f_{zk}&=2\pi\iint_{(e)}\left\{r\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r}\boldsymbol{\tau}_{rz}+r\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}\boldsymbol{\sigma}_z+\mathbf{N}\boldsymbol{\tau}_{rz}\right\}N_k\,drdz
\end{aligned}\right\}\tag{3.13}$$

我们应指出，当在 t 时，设各结点的位移分量u_i^t，w_i^t，位移速度分量 $\dot{u}_i^t$，$\dot{w}_i^t$ 为已知，则我们将在下节讨论计算各结点上的应力分量值．从这些应力分量值，我们通过(3.9)，(3.13)，就能计算f_{ri}，f_{zi}，进而从(3.10)，(3.12)计算时间 t 时的加速度分量$\ddot{u}_i^t$，$\ddot{w}_i^t$．

设时间增量取Δt，在 $t+\Delta t$ 时，我们可以从下式计算其位移分量、位移速度分量和结点的新的坐标．

$$\left.\begin{aligned}
u_i^{t+\Delta t}&=u_i^t+\dot{u}_i^t\Delta t, & w_i^{t+\Delta t}&=w_i^t+\dot{w}_i^t\Delta t\\
\dot{u}_i^{t+\Delta t}&=\dot{u}_i^t+\ddot{u}_i^t\Delta t, & \dot{w}_i^{t+\Delta t}&=\dot{w}_i^t+\ddot{w}_i^t\Delta t\\
r_i^{t+\Delta t}&=r_i^0+u_i^{t+\Delta t} & z_i^{t+\Delta t}&=z_i^0+w_i^{t+\Delta t}
\end{aligned}\right\}\tag{3.14}$$

有了这些结点值后，我们就能进行下一轮的计算．(3.14)中的(r_i^0，z_i^0)为未变形前的结点 i

的原有坐标.

现在让我们计算f_{ri}, f_{rj}, f_{rk}, f_{zi}, f_{zj}, f_{zk}. 首先利用(2.12)式，我们可以证明

$$\iint_{(e)} N_i N_j drdz = \iint_{(e)} (L_i+L_j+L_k) N_i N_j drdz = 0 \tag{3.15}$$

而且

$$\iint_{(e)} N_i^2 drdz = \iint_{(e)} N_j^2 drdz = \iint_{(e)} N_k^2 drdz$$

$$=\frac{2}{7!}A[420+168B+56C+84B^2+72BC+7C^2]=\frac{1}{3}A \tag{3.16}$$

于是，从(3.9)，(3.13)，我们求得

$$\left.\begin{aligned}
f_{ri}&=\mathbf{A}_i^{(1)}\boldsymbol{\sigma}_r+\mathbf{A}_i^{(2)}\boldsymbol{\tau}_{rz}-\frac{2}{3}\pi A\sigma_{\theta i}; \quad f_{zi}=\mathbf{A}_i^{(1)}\boldsymbol{\tau}_{rz}+\mathbf{A}_i^{(2)}\boldsymbol{\sigma}_z\\
f_{rj}&=\mathbf{A}_j^{(1)}\boldsymbol{\sigma}_r+\mathbf{A}_j^{(2)}\boldsymbol{\tau}_{rz}-\frac{2}{3}\pi A\sigma_{\theta j}; \quad f_{zj}=\mathbf{A}_j^{(1)}\boldsymbol{\tau}_{rz}+\mathbf{A}_j^{(2)}\boldsymbol{\sigma}_z\\
f_{rk}&=\mathbf{A}_k^{(1)}\boldsymbol{\sigma}_r+\mathbf{A}_k^{(2)}\boldsymbol{\tau}_{rz}-\frac{2}{3}\pi A\sigma_{\theta k}; \quad f_{zk}=\mathbf{A}_k^{(1)}\boldsymbol{\tau}_{rz}+\mathbf{A}_k^{(2)}\boldsymbol{\sigma}_z
\end{aligned}\right\} \tag{3.17}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{A}_i^{(1)}&=2\pi\iint_{(e)}\left(r\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial r}+\mathbf{N}\right)N_i drdz \quad \mathbf{A}_i^{(2)}=2\pi\iint_{(e)} r\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}N_i drdz\\
\mathbf{A}_j^{(1)}&=2\pi\iint_{(e)}\left(r\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial r}+\mathbf{N}\right)N_j drdz \quad \mathbf{A}_j^{(2)}=2\pi\iint_{(e)} r\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}N_j drdz\\
\mathbf{A}_k^{(1)}&=2\pi\iint_{(e)}\left(r\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial r}+\mathbf{N}\right)N_k drdz \quad \mathbf{A}_k^{(2)}=2\pi\iint_{(e)} r\frac{\partial\mathbf{N}}{\partial z}N_k drdz
\end{aligned}\right\} \tag{3.18}$$

经积分后，$\mathbf{A}^{(1)}$，$\mathbf{A}^{(2)}$分别可以写成

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{A}_i^{(1)T}&=\lfloor \mathbf{b}\mathbf{H}^{(ii)}\mathbf{r}+\frac{2}{3}\pi A,\quad \mathbf{b}\mathbf{H}^{(ij)}\mathbf{r},\quad \mathbf{b}\mathbf{H}^{(ik)}\mathbf{r}\rfloor\\
\mathbf{A}_j^{(1)T}&=\lfloor \mathbf{b}\mathbf{H}^{(ji)}\mathbf{r},\quad \mathbf{b}\mathbf{H}^{(jj)}\mathbf{r}+\frac{2}{3}\pi A,\quad \mathbf{b}\mathbf{H}^{(jk)}\mathbf{r}\rfloor\\
\mathbf{A}_k^{(1)T}&=\lfloor \mathbf{b}\mathbf{H}^{(ki)}\mathbf{r},\quad \mathbf{b}\mathbf{H}^{(kj)}\mathbf{r},\quad \mathbf{b}\mathbf{H}^{(kk)}\mathbf{r}+\frac{2}{3}\pi A\rfloor
\end{aligned}\right\} \tag{3.19}$$

$$\left.\begin{aligned}
\mathbf{A}_i^{(2)T}&=\lfloor \mathbf{c}\mathbf{H}^{(ii)}\mathbf{r},\quad \mathbf{c}\mathbf{H}^{(ij)}\mathbf{r},\quad \mathbf{c}\mathbf{H}^{(ik)}\mathbf{r}\rfloor\\
\mathbf{A}_j^{(2)T}&=\lfloor \mathbf{c}\mathbf{H}^{(ji)}\mathbf{r},\quad \mathbf{c}\mathbf{H}^{(jj)}\mathbf{r},\quad \mathbf{c}\mathbf{H}^{(jk)}\mathbf{r}\rfloor\\
\mathbf{A}_k^{(2)T}&=\lfloor \mathbf{c}\mathbf{H}^{(ki)}\mathbf{r},\quad \mathbf{c}\mathbf{H}^{(kj)}\mathbf{r},\quad \mathbf{c}\mathbf{H}^{(kk)}\mathbf{r}\rfloor
\end{aligned}\right\} \tag{3.20}$$

其中 $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{r}$ 为

$$\mathbf{b}=\lfloor b_i,\ b_j,\ b_k\rfloor,\quad \mathbf{c}=\lfloor c_i,\ c_j,\ c_k\rfloor,\quad \mathbf{r}^T=\lfloor r_i,\ r_j,\ r_k\rfloor \tag{3.21}$$

$\mathbf{H}^{(ij)}$等为九个矩阵，即

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathbf{H}^{(ii)}=\begin{bmatrix} H_1 & H_2 & H_2 \\ H_3 & H_4 & H_5 \\ H_3 & H_5 & H_4 \end{bmatrix},\quad
\mathbf{H}^{(ij)}=\begin{bmatrix} H_6 & H_9 & H_{12} \\ H_{10} & H_7 & H_{13} \\ H_{11} & H_{14} & H_8 \end{bmatrix},\quad
\mathbf{H}^{(ik)}=\begin{bmatrix} H_6 & H_{12} & H_9 \\ H_{11} & H_8 & H_{14} \\ H_{10} & H_{13} & H_7 \end{bmatrix} \\
&\mathbf{H}^{(ji)}=\begin{bmatrix} H_7 & H_{10} & H_{13} \\ H_9 & H_6 & H_{12} \\ H_{14} & H_{11} & H_8 \end{bmatrix},\quad
\mathbf{H}^{(jj)}=\begin{bmatrix} H_4 & H_3 & H_5 \\ H_2 & H_1 & H_2 \\ H_5 & H_3 & H_4 \end{bmatrix},\quad
\mathbf{H}^{(jk)}=\begin{bmatrix} H_3 & H_{11} & H_{14} \\ H_{12} & H_6 & H_9 \\ H_{13} & H_{10} & H_7 \end{bmatrix} \\
&\mathbf{H}^{(ki)}=\begin{bmatrix} H_7 & H_{13} & H_{10} \\ H_{14} & H_8 & H_{11} \\ H_9 & H_{12} & H_6 \end{bmatrix},\quad
\mathbf{H}^{(kj)}=\begin{bmatrix} H_8 & H_{14} & H_{11} \\ H_{13} & H_7 & H_{10} \\ H_{12} & H_9 & H_6 \end{bmatrix},\quad
\mathbf{H}^{(kk)}=\begin{bmatrix} H_4 & H_5 & H_3 \\ H_5 & H_4 & H_3 \\ H_7 & H_2 & H_1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
\right\} \tag{3.22}
$$

其中$H_1,H_2,\cdots,H_{14}$为14个不同类型的积分，其结果为：

$$H_1=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)} L_i\frac{\partial N_i}{\partial L_i}N_i drdz=\frac{2\pi}{7!}[420+252B+84C+4B^2+36BC+5C^2] \tag{3.23a}$$

$$H_2=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)} L_i\frac{\partial N_i}{\partial L_i}N_i drdz=\frac{\pi}{7!}[420+168B+84C-112B^2-21BC-21C^2] \tag{3.23b}$$

$$H_3=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)} L_i\frac{\partial N_i}{\partial L_j}N_i drdz=\frac{\pi}{7!}[168B+56C+56B^2+40BC+9C^2] \tag{3.23c}$$

$$H_4=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)} L_i\frac{\partial N_i}{\partial L_j}N_i drdz=\frac{2\pi}{7!}[14C+70B^2-C^2+80BC] \tag{3.23d}$$

$$H_5=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)} L_i\frac{\partial N_i}{\partial L_k}N_i drdz=\frac{\pi}{7!}[-168B-84C+140B^2+152BC+33C^2] \tag{3.23e}$$

$$H_6=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)} L_i\frac{\partial N_j}{\partial L_i}N_i drdz=\frac{\pi}{7!}[-168B-56C-28B^2-20BC-5C^2] \tag{3.23f}$$

$$H_7=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)} L_i\frac{\partial N_i}{\partial L_j}N_i drdz=\frac{\pi}{7!}[168B+56C+56B^2+40BC+9C^2] \tag{3.23g}$$

$$H_8=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)} L_k\frac{\partial N_j}{\partial L_k}N_i drdz=\frac{\pi}{7!}[-252B-140C-112B^2-140BC-41C^2] \tag{3.23h}$$

$$H_9=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)} L_i\frac{\partial N_j}{\partial L_i}N_i drdz=\frac{2\pi}{7!}[14C+28B^2+38BC+11C^2] \tag{3.23i}$$

$$H_{10}=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)}L_i\frac{\partial N_i}{\partial L_i}N_i drdz=\frac{\pi}{7!}[840-168B+448C+140B^2+124BC+23C^2]$$

(3.23j)

$$H_{11}=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)}L_i\frac{\partial N_j}{\partial L_k}N_i drdz=\frac{4\pi}{7!}[-210B-112C-49B^2-29BC-8C^2] \quad (3.23k)$$

$$H_{12}=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)}L_k\frac{\partial N_j}{\partial L_i}N_i drdz=\frac{\pi}{7!}[-252B-140C+56B^2+28BC-C^2] \quad (3.23l)$$

$$H_{13}=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)}L_k\frac{\partial N_j}{\partial L_j}N_i drdz=\frac{2\pi}{7!}[210+126B+70C-14B^2-10BC-C^2] \quad (3.23m)$$

$$H_{14}=\frac{\pi}{A}\iint_{(e)}L_j\frac{\partial N_j}{\partial L_k}N_i drdz=\frac{\pi}{7!}[-168B-84C-112B^2-308BC-41C^2] \quad (3.23n)$$

只要能从已知结点位移u_i,u_j,u_k,w_i,w_j,w_k，以及已知结点位移速度$\dot{u}_i,\dot{u}_j,\dot{u}_k,\dot{w}_i,\dot{w}_j,\dot{w}_k$计算结点的应力分量，则通过(3.17)就能计算有限元对结点i,j,k的等效力f_{ri},f_{zi}等，从而由(3.10),(3.11),(3.12)各式计算各结点的加速度.

我们还必须指出，(3.22)诸式，也可以从其第一、二式$H^{(1)}$，$H^{(2)}$中轮换i,j,k标号求得.

四、结点上应力分量的计算

设某一元素中的位移分量$u^{(e)},w^{(e)}$可以通过形状函数N_i^0，N_j^0,N_k^0用这些分量的结点值来表示. 上述形状函数是按未变形前的几何来描述的(图4)

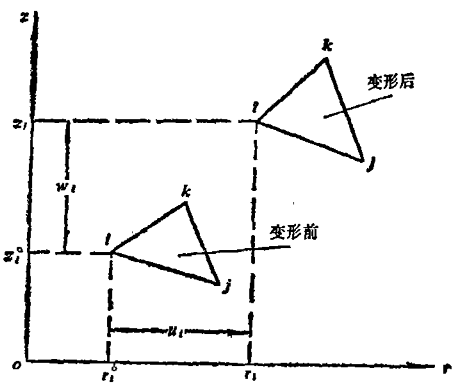


图4 变形前和变形后的有限元位置和几何

它们根据(2.44)，是

$$\left.\begin{aligned}
N_i^0&=L_i^0+B(L_i^0L_j^0+L_i^0L_k^0-2L_j^0L_k^0)+C[(L_j^0)^2(L_i^0-L_k^0)+(L_k^0)^2(L_i^0-L_j^0)]\\
N_j^0&=L_j^0+B(L_j^0L_k^0+L_j^0L_i^0-2L_k^0L_i^0)+C[(L_k^0)^2(L_j^0-L_i^0)+(L_i^0)^2(L_j^0-L_k^0)]\\
N_k^0&=L_k^0+B(L_k^0L_i^0+L_k^0L_j^0-2L_i^0L_j^0)+C[(L_i^0)^2(L_k^0-L_j^0)+(L_j^0)^2(L_k^0-L_i^0)]
\end{aligned}\right\} \quad (4.1)$$

其中 L_i^0, L_j^0, L_k^0见(2.1),(2.2),但r_i,r_j,r_k, z_i,z_j,z_k是按变形前的几何$r_i^0,r_j^0,r_k^0,z_i^0,z_j^0,z_k^0$计算的.

这个元素的位移分量为

$$u^{(e)}=\mathbf{N}^0\mathbf{u} \qquad w^{(e)}=\mathbf{N}^0\mathbf{w} \tag{4.2}$$

其中 $\mathbf{N}^0$ 为

$$\mathbf{N}^0=\lfloor N_i^0,\ N_j^0,\ N_k^0\rfloor \tag{4.3}$$

而 $\mathbf{u}$, $\mathbf{w}$ 见(3.5b,c). 在这个元素中的应变分量, 可以用下列非线性应变位移关系中求得[3],[6].

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2\right] \tag{4.4a}$$

$$\varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2+\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right] \tag{4.4b}$$

$$\gamma_{rz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial w}{\partial z} \tag{4.4c}$$

$$\varepsilon_\theta=\frac{u}{r} \tag{4.4d}$$

$$\varepsilon_v=\frac{V}{V_0}-1 \tag{4.4e}$$

其中 V_0 为有限元在变形前的体积, V 为变形后的体积.

$$V_0=\frac{\pi}{3}(r_i^0+r_j^0+r_k^0)\begin{vmatrix}1 & r_i^0 & z_i^0\\ 1 & r_j^0 & z_j^0\\ 1 & r_k^0 & z_k^0\end{vmatrix} \tag{4.5a}$$

$$V=\frac{\pi}{3}(r_i+r_j+r_k)\begin{vmatrix}1 & r_i^t & z_i^t\\ 1 & r_j^t & z_j^t\\ 1 & r_k^t & z_k^t\end{vmatrix} \tag{4.5b}$$

我们必须指出, ε_r, ε_z, γ_{zr} 的表达式(4.4a,b,c)中业已扣除了变形中由于坐标轴的转角所产生的影响.

把 (4.2) 式代入 (4.4a,b,c,d), 得时间为 t 时的应变分量

$$\varepsilon_r^t=\frac{\partial\mathbf{N}^0}{\partial r}\mathbf{u}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mathbf{N}^0}{\partial r}\mathbf{u}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathbf{N}^0}{\partial z}\mathbf{u}\right)^2\right] \tag{4.6a}$$

$$\varepsilon_z^t=\frac{\partial\mathbf{N}^0}{\partial r}\mathbf{w}+\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial\mathbf{N}^0}{\partial r}\mathbf{w}\right)^2+\left(\frac{\partial\mathbf{N}^0}{\partial z}\mathbf{w}\right)^2\right] \tag{4.6b}$$

$$\gamma_{rz}^t=\frac{\partial\mathbf{N}^0}{\partial z}\mathbf{u}+\frac{\partial\mathbf{N}^0}{\partial r}\mathbf{w}+\left(\frac{\partial\mathbf{N}^0}{\partial r}\mathbf{u}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{N}^0}{\partial r}\mathbf{w}\right)+\left(\frac{\partial\mathbf{N}^0}{\partial z}\mathbf{u}\right)\left(\frac{\partial\mathbf{N}^0}{\partial z}\mathbf{w}\right) \tag{4.6c}$$

$$\varepsilon_\theta^t=\frac{1}{r}\mathbf{N}^0\mathbf{u} \tag{4.6d}$$

在结点 i 上, 我们有 $(L_i^0,L_j^0,L_k^0)=(1,0,0)$, 从而得应变分量在结点 i 上的值:

$$\varepsilon_{ri}^{t} = \mathbf{H}_{ri}^{0}\ \mathbf{u} + \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{H}_{ri}^{0}\ \mathbf{u}\right)^2 + \left(\mathbf{H}_{zi}^{0}\ \mathbf{u}\right)^2\right] \tag{4.7a}$$

$$\varepsilon_{zi}^{t} = \mathbf{H}_{zi}^{0}\ \mathbf{w} + \frac{1}{2}\left[\left(\mathbf{H}_{ri}^{0}\ \mathbf{w}\right)^2 + \left(\mathbf{H}_{zi}^{0}\ \mathbf{w}\right)^2\right] \tag{4.7b}$$

$$\gamma_{zri}^{t} = \mathbf{H}_{zi}^{0}\ \mathbf{u} + \mathbf{H}_{ri}^{0}\mathbf{w} + (\mathbf{H}_{ri}^{0}\mathbf{u})(\mathbf{H}_{ri}^{0}\mathbf{w}) + (\mathbf{H}_{zi}^{0}\mathbf{u})\ (\mathbf{H}_{zi}^{0}\mathbf{w}) \tag{4.7c}$$

$$\varepsilon_{\theta i}^{t} = \frac{1}{r_i}u_i \qquad (r_i \neq 0) \tag{4.7d}$$

其中 $\mathbf{H}_{ri}^{0}$, $\mathbf{H}_{zi}^{0}$分别为

$$\mathbf{H}_{ri}^{0} = \frac{1}{2A_0}\lfloor b_i^0 + B\ (b_j^0 + b_k^0), b_j^0 + B\ (b_j^0 - 2b_k^0) + C\ (b_j^0 - b_k^0),\ b_k^0 + B\ (b_k^0 - 2b_j^0) + C\ (b_k^0 - b_j^0)\rfloor \tag{4.8a}$$

$$\mathbf{H}_{zi}^{0} = \frac{1}{2A_0}\lfloor c_i^0 + B\ (c_j^0 + c_k^0),\ c_j^0 + B\ (c_j^0 - 2c_k^0) + C\ (c_j^0 - c_k^0),\ c_k^0 + B\ (c_k^0 - 2c_j^0) + C\ (c_k^0 - c_j^0)\rfloor \tag{4.8b}$$

这里还应该指出，(4.7d)只在$r_i \neq 0$时，才是实用的，当结点i在轴上时，$\varepsilon_\theta = \varepsilon_r$，即

$$\varepsilon_{\theta i}^{t} = \varepsilon_{ri}^{t} = \mathbf{H}_{ri}^{0}\mathbf{u} + \frac{1}{2}\ ([(\mathbf{H}_{ri}^{0}\mathbf{u})^2 + (\mathbf{H}_{zi}^{0}\mathbf{u})^2] \qquad (r_i = 0\ , u_i = 0\ ) \tag{4.9}$$

而且，在(4.9)式中，$u_i=0$，上式或可写成

$$\begin{aligned}\varepsilon_{\theta i}^{t} = & \frac{1}{2A_0}[\{b_j^0 + B\ (b_j^0 - 2b_k^0) + C\ (b_j^0 - b_k^0)]u_j + [b_k^0 + B\ (b_k^0 - 2b_j^0) + C\ (b_k^0 - b_j^0)]u_k\} \\ & + \frac{1}{8A_0^2}\{[b_j^0 + B\ (b_j^0 - 2b_k^0) + C(b_j^0 - b_k^0)]u_j + [b_k^0 + B\ (b_k^0 - 2b_j^0) + C(b_k^0 - b_j^0)u_k\}^2 \\ & + \frac{1}{8A_0^2}\{[c_j^0 + B\ (c_j^0 - 2c_k^0) + C(c_j^0 - c_k^0)]u_j + [c_k^0 + B(c_k^0 - 2c_j^0) + C(c_k^0 - c_j^0)u_k\}^2\end{aligned} \tag{4.10}$$

应变速度$\dot{\varepsilon}_r^t, \dot{\varepsilon}_z^t, \dot{\varepsilon}_\theta^t, \dot{\gamma}_{rz}^t$可以从下式计算.

$$\dot{\varepsilon}_r^t = \frac{\partial \dot{u}^t}{\partial r},\quad \dot{\varepsilon}_z^t = \frac{\partial \dot{w}^t}{\partial z},\qquad \dot{\varepsilon}_\theta^t = \frac{\dot{u}^t}{r},\qquad \dot{\gamma}_{rz}^t = \frac{\partial \dot{w}^t}{\partial r} + \frac{\partial \dot{u}^t}{\partial z} \tag{4.11}$$

我们用变分后的几何描写形状函数，即

$$\dot{u}^t = \mathbf{N}\dot{\mathbf{u}}^t,\quad \dot{w}^t = \mathbf{N}\dot{\mathbf{w}}^t \tag{4.12}$$

所以，我们有

$$\dot{\varepsilon}_r^t = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r}\dot{\mathbf{u}}^t,\quad \dot{\varepsilon}_z^t = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}\dot{\mathbf{w}}^t,\quad \dot{\varepsilon}_\theta^t = \frac{\mathbf{N}}{r}\dot{\mathbf{u}}^t,\quad \dot{\gamma}_{tz}^t = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial r}\dot{\mathbf{w}}^t + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial z}\dot{\mathbf{u}}^t \tag{4.13}$$

在结点i上，$(L_i, L_j, L_k) = (1, 0, 0)$，所以有

$$\left.\begin{aligned}&\dot{\varepsilon}_{ri}^t = \mathbf{H}_{ri}\dot{\mathbf{u}}^t,\quad \dot{\varepsilon}_{zi}^t = \mathbf{H}_{zi}\dot{\mathbf{w}}^t,\quad \dot{\gamma}_{rz}^t = \mathbf{H}_{ri}\dot{\mathbf{w}}^t + \mathbf{H}_{zi}\dot{\mathbf{u}}^t \\ &\dot{\varepsilon}_{\theta i}^t = \frac{\dot{\mathbf{u}}_i^t}{r_i} \qquad r_i \neq 0\end{aligned}\right\} \tag{4.14}$$

当$r_i=0$时，$\dot{u}_i^t=0$，则

$$\dot{\varepsilon}_{\theta i}^t=\dot{\varepsilon}_{r_i}^t(\dot{u}_i^t=0)=\frac{1}{2A}\{[b_j+B(b_j-2b_k)+C(b_i-b_k)]\dot{u}_j^t$$

$$+[b_k+B(b_k-2b_j)+C(b_k-b_j)]\dot{u}_k^t\} \qquad (r=0) \qquad (4.15)$$

其中H_{ri}，H_{zi}见(4.8a,b)，但是根据变形后的几何计算的．在结点j,k上还有 相 类似的应变和应变速度表达式．

弹性应力是通过胡克定律[6]从应变分量直接计算的．

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_r^t=\lambda\varepsilon_v^t+2G\varepsilon_r^t-Q^t\\&\sigma_z^t=\lambda\varepsilon_v^t+2G\varepsilon_z^t-Q^t,\quad \tau_{rz}=G\gamma_{rz}^t\\&\sigma_\theta^t=\lambda\varepsilon_v^t+2G\varepsilon_\theta^t-Q^t\end{aligned}\right\} \qquad (4.16)$$

其中λ,G为拉梅弹性常数．Q^t为人为粘度[8]

$$\left.\begin{aligned}&Q^t=C_L\sqrt{(\lambda+2G)\rho A}\,|\dot{\varepsilon}_v^t|+C_0^2\rho A(\dot{\varepsilon}_v^t)^2, &&\text{在}\dot{\varepsilon}_v^t<0\text{时}\\&Q^t=0, &&\text{在}\dot{\varepsilon}_v^t\geqslant 0\text{时}\end{aligned}\right\} \qquad (4.17)$$

其中$C_L=0.5$，$C_0^2=4.0$为无量纲常数．

结点i上的弹性应力分量是根据（4.16）式用该点的有关应变分量表示的．

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{ri}^t=\lambda\varepsilon_v^t+2G\varepsilon_{ri}^t-Q^t,\\&\sigma_{zi}^t=\lambda\varepsilon_v^t+2G\varepsilon_{zi}^t-Q^t\quad \tau_{rzi}^t=G\gamma_{rzi}^t\\&\sigma_{\theta i}^t=\lambda\varepsilon_v^t+2G\varepsilon_{\theta i}^t-Q^t\end{aligned}\right\} \qquad (4.18)$$

其中ε_v^t见(4.4e)，Q^t见(4.17)，在每一元素中，它们都是常数．我们必须指出，按(4.18)计算所得的在结点上的应力分量值，在各有关的相邻有限元中并不保证是等值的．也即是说，在诸有限元间，结点位移是连续的，但应力分布不连续．

在结点i处的弹性应力分量组成一个等效应力，它是

$$\bar{\sigma}_i^t=\sqrt{\frac{1}{2}\{(\sigma_{ri}^t-\sigma_{zi}^t)^2+(\sigma_{zi}^t-\sigma_{\theta i}^t)^2+(\sigma_{\theta i}^t-\sigma_{ri}^t)^2+6(\tau_{rzi}^t)^2\}} \qquad (4.19)$$

当$\bar{\sigma}_i^t$小于材料的拉伸屈服强度时，应力就属于弹性范围．

当$\bar{\sigma}_i^t$超过材料的拉伸屈服强度时，材料就产生塑性流动．在发生塑性流动后，正应力分量就由塑性应力偏量、静水压强和人为粘度三项组成，亦即

$$\left.\begin{aligned}&\sigma_{ri}^t=S_{ri}^t-(P_i^t+Q^t)\\&\sigma_{zi}^t=S_{zi}^t-(P_i^t+Q^t)\\&\sigma_{\theta i}^t=S_{\theta i}^t-(P_i^t+Q^t)\end{aligned}\right\} \qquad (4.20)$$

塑性应力偏量代表材料剪力强度特性，采用冯·西米斯塑性增量理论后，应力偏量（S_{ri}^t，S_{zi}^t，$S_{\theta i}^t$和剪应力(τ_{rzi}^t)为

$$\left.\begin{aligned}&S'_{ri}=\frac{2}{3}\left(\frac{\dot{e}'_{ri}}{\bar{\dot{\varepsilon}}'_i}\right)\bar{S},\\&S'_{zi}=\frac{2}{3}\left(\frac{\dot{e}'_{zi}}{\bar{\dot{\varepsilon}}'_i}\right)\bar{S},\quad \tau'_{rzi}=\frac{1}{3}\left(\frac{\dot{\gamma}'_{rzi}}{\bar{\dot{\varepsilon}}'_i}\right)\bar{S}\\&S'_{\theta i}=\frac{2}{3}\left(\frac{\dot{e}'_{\theta i}}{\bar{\dot{\varepsilon}}'_i}\right)\bar{S}\end{aligned}\right\}\tag{4.21}$$

其中 $\bar{S}$ 为材料的等效拉伸强度，而$\bar{\dot{\varepsilon}}'_i$为等效应变速度

$$\bar{\dot{\varepsilon}}'_i=\sqrt{\frac{2}{9}\{(\dot{\varepsilon}'_{ri}-\dot{\varepsilon}'_{zi})^2+(\dot{\varepsilon}'_{zi}-\dot{\varepsilon}'_{\theta i})^2+(\dot{\varepsilon}'_{\theta i}-\dot{\varepsilon}'_{ri})^2+\frac{3}{2}(\dot{\gamma}'_{zri})^2\}}\tag{4.22}$$

$\dot{e}'_{ri}$，$\dot{e}'_{zi}$，$\dot{e}'_{\theta i}$为应变偏量速度，如果把(4.20)，(4.21)中的应力分量代入(4.19)，即得结果

$$\bar{\sigma}'_i=\bar{S}\tag{4.23}$$

等效拉伸强度可以用静力拉伸强度来表示，在这时，$\bar{S}$只是$\bar{\varepsilon}'_i$的函数，$\bar{\varepsilon}'_i$为

$$\bar{\varepsilon}'_i=\sqrt{\frac{2}{9}\{(\varepsilon'_{ri}-\varepsilon'_{zi})^2+(\varepsilon'_{zi}-\varepsilon'_{\theta i})^2+(\varepsilon'_{\theta i}-\varepsilon'_{ri})^2+\frac{3}{2}(\gamma'_{zri})^2}\tag{4.24}$$

在大多数的撞击问题中，应变总有少量的恢复，而总$\bar{\varepsilon}'_i$总是增加的，这样，使(4.23)式成为一个适用的近似式.

静水压强既和体积变化有关，也和有限元内的内能有关[9]. 本文用 Mie-Gruneisen 物态方程

$$P'_i=(K_1\mu+K_2\mu^2+K_3\mu^3)\left(1-\frac{\Gamma\mu}{2}\right)+\Gamma\rho E'_i\tag{4.25}$$

这里的符号为

$$\left.\begin{aligned}&K_1,\ K_2,\ K_3=\text{和材料有关的常数}\\&\Gamma=\text{Grüneisen 常数}\\&\mu=\frac{\rho}{\rho_0}-1=\frac{V_0}{V^{(e)}}-1\end{aligned}\right\}\tag{4.26}$$

而E'_i为比内能，它是各应力分量在结点 i 处对有限元每单位质量做功. 它是从下式的积分求得的.

$$\frac{d}{dt}(\rho E'_i)=V^{(e)}\{S'_{ri}\dot{\varepsilon}'_{ri}+S'_{zi}\dot{\varepsilon}'_{zi}+S'_{\theta i}\dot{\varepsilon}'_{\theta i}+2\tau'_{rzi}\dot{\gamma}'_{rzi}\}-(Q'+P'_i)\dot{V}^{(e)}\tag{4.27}$$

这里必须指出，本文所用的高次形状函数虽能给出对角线化的统一质量矩阵，但是，它们表示的位移和位移速度，除了在结点上连续，在三角形边线上一般不连续，所以，它们是非协调的有限元.

根据本文所编出的计算程序和计算例题将另文公布.

参 考 文 献

1. Zienkiewicz, O. C., *The Finite Element Method* (Third Edition, 1977), 533—540, McGraw-Hill, New York.
2. Myklestad, N. O., *Vibration Analysis*, McGraw-Hill, New York(1944).
3. Johnson, G. R., Analysis of elastic-plastic impact involving severe distortions, *Journal of Applied Mechanics*, 93, 3, Trans. *ASME*., Series E, **98**, Sept.(1976), 439-444.
4. Johnson, G. R., High velocity impact calculations in three dimensions. *Journal of Applied Mechanics*, **44**, 1, Trans. *ASME*., **99**, Series E, Mar. (1977), 95-100.
5. 钱伟长，具有对角线化的一致质量矩阵的动力有限元和弹塑性撞击计算. 应用数学和力学, **3**, 3 (1982).
6. 钱伟长，穿甲力学讲义，华中工学院与应用数学和力学编委会联合举办的应用数学和力学讲座，1981年10月5日—10月25日，武昌.
7. Boresi, A. P., *Elasticity in Engineering Mechanics*, Prentice-Hall, Eaglewood Cliffs, N. J. (1965).
8. von Neumann, J. and Richtmyer, R. D., A method for the numerical calculation of hydrodynamic shocks, *Journal of Applied Physics*, **21**, (1950), 232-237.
9. Walsh, J. M., et al., Shock wave compressions of twenty-seven metals, equations of state of metals, *Physical Review*, **10**, 27, Oct. (1957), 196-216.

Diagonalized Consistant Mass Matrix and the Dynamical Finite Element Analysis of Elastic-Plastic Impact in Axisymmetrical Problems

Chien Wei-zang

(*Qinghua University, Beijing*)

Abstract

In this paper, the diagonalized consistant mass matrix is found for the triangular ring element in axisymmetrical problems. The results of this work eliminates the feeling of uncertainty and arbitrariness of lumped mass method on the one hand and the difficulty of computation due to nondiagonalized character of consistant mass method on the other. This paper gives also the foundations of the finite element analysis of elastic-plastic axisymmetrical impact problems.