

无限体中受均匀拉伸的椭圆片状裂纹 周界上各点应力强度因子的讨论*

蔡 增 伸

(浙江工学院, 1981年8月11日收到)

摘 要

本文从 Green-Sneddon 解^[1]的裂纹表面位移场结果出发, 应用坐标变换推出了无限体中受均匀拉伸的椭圆片状裂纹周界上任意点、任意方位上的应力强度因子 $K_I(x_1, z_1, a)$ 表达式. 从而补充了 Irwin 的工作^[3], 证明了对椭圆周界上某一确定点而言, 沿法线平面上所得的应力强度因子为最大值. 并指出了一些著作中, 对[3]中有关内容所作的错误解释. 还推荐了一个更为直观的以极角来表示的椭圆周界上任意点处的应力强度因子表达式.

如图 1 所示无限体中无限远处受均匀拉应力 σ 作用的椭圆裂纹, 裂纹边界线方程为

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= a \sin \phi \\ z_1 &= c \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

式中 a, c ——分别为椭圆的短轴与长轴,
 ϕ ——椭圆离心角或参变角.

根据 Green-Sneddon 解^[1], 片状椭圆裂纹的上下两表面, 在此均匀拉伸作用下, 产生张开位移, 位移结果变成一个椭球, 其方程如下

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{v_0^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (2)$$

其中 v_0 为 $x=0, z=0$ 处的 y 值, 即图 1 所示椭圆中心 o 点的张开位移之半, 其值为

$$v_0 = \frac{2(1-\nu^2)\sigma a}{E\Phi} \quad (3)$$

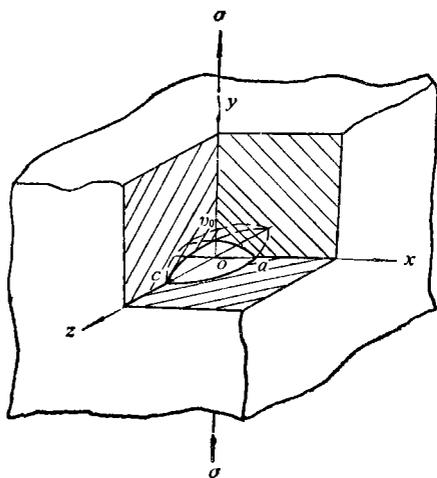


图 1 均匀法向拉应力作用下椭圆片状裂纹的张开位移

式中 Φ 为第二类完全椭圆积分, 即

$$\Phi = \int_0^{\pi/2} \left(1 - \frac{c^2 - a^2}{c^2} \sin^2 \phi \right)^{1/2} d\phi \quad (4)$$

* 钱伟长推荐.

其中 E 为材料弹性模量, ν 为材料波桑比.

为了求出椭圆片状裂纹周界上任意点、任意方位上的应力强度因子表达式,如图 2 所示,在椭圆周界上任意取一点 P , P 点的坐标便是(1)式,过 P 点任意作一直线 Po'' 与 z 轴交成 θ' 角;同时再过 P 点作椭圆周线的法线 $n-n$,与 z 轴相交于 o' 点,交角为 θ ;以及 Po'' 与 Po' 的夹角为 α .

现在建立一新直角坐标系 $\xi\eta\zeta$ 如图 2 所示,其中 ζ 轴与 y 轴平行, P 点为此新坐标系的原点.新、老坐标系间有关系

$$\left. \begin{aligned} x &= a \sin \phi - \eta \sin \theta' + \xi \cos \theta' \\ y &= \zeta \\ z &= c \cos \phi - \eta \cos \theta' - \xi \sin \theta' \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

将方程(5)代入方程(2),并令 $\xi=0$,便得出裂纹张开时的椭球面与平面 $\eta\zeta$ 的相交线,图 3 中示出了 P 点附近部分相交线的形状,其方程为

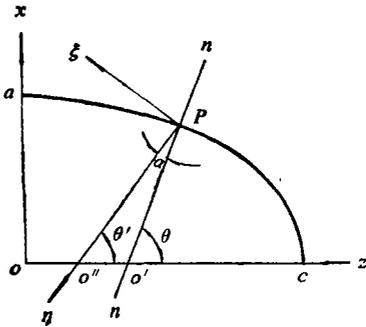


图 2 有关椭圆周界上任意点 P 的几何关系

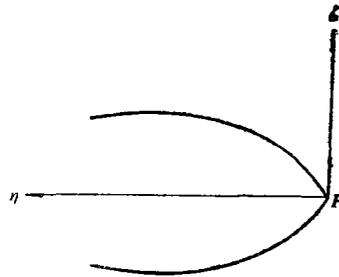


图 3 P 点附近部分交线形状

$$\frac{(a \sin \phi - \eta \sin \theta')^2}{a^2} + \frac{\zeta^2}{v_0^2} + \frac{(c \cos \phi - \eta \cos \theta')^2}{c^2} = 1 \quad (6)$$

从图 2 中所示的几何关系,不难求出

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta &= \frac{c}{A^{1/2}} \sin \phi \\ \cos \theta &= \frac{a}{A^{1/2}} \cos \phi \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式中
以及
故有

$$\begin{aligned} A &= a^2 \cos^2 \phi + c^2 \sin^2 \phi \\ \theta' &= \theta - \alpha \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} \sin \theta' &= \frac{c}{A^{1/2}} \sin \phi \cos \alpha - \frac{a}{A^{1/2}} \cos \phi \sin \alpha \\ \cos \theta' &= \frac{a}{A^{1/2}} \cos \phi \cos \alpha - \frac{c}{A^{1/2}} \sin \phi \sin \alpha \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

将(8)式代入(6)式,并考虑到 $\eta \rightarrow +0$ 时,整理后即可得出

$$\zeta = v_0 \sqrt{2\eta} \left(\frac{\sin^2 \phi}{a^2} + \frac{\cos^2 \phi}{c^2} \right)^{1/4} \sqrt{\cos \alpha} + O(\eta)$$

这样就得出了裂纹尖端 P 点附近, 在 $\eta\xi$ 平面内, 裂纹面张开位移半长的主项表达式

$$\xi = v_0 \sqrt{2\eta} \left(\frac{\sin^2 \phi}{a^2} + \frac{\cos^2 \phi}{c^2} \right)^{1/4} \sqrt{\cos \alpha} \quad (9)$$

有了表达式(9), 根据应力强度因子 K_I 的定义^[2], 便可求出椭圆周界上任意点、任意方位上的应力强度因子 $K_I(x_1, z_1, \alpha)$ 为

$$\begin{aligned} K_I(x_1, z_1, \alpha) &= \frac{E\sqrt{2\pi}}{4(1-\nu^2)} \lim_{\eta \rightarrow +0} \frac{\xi}{\sqrt{\eta}} \\ &= \frac{E\sqrt{2\pi}}{4(1-\nu^2)} v_0 \sqrt{2} \left(\frac{\sin^2 \phi}{a^2} + \frac{\cos^2 \phi}{c^2} \right)^{1/4} \sqrt{\cos \alpha} \end{aligned}$$

再将(3)式代入上式, 即得

$$K_I(x_1, z_1, \alpha) = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi} \left(\sin^2 \phi + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \phi \right)^{1/4} \sqrt{\cos \alpha} \quad (10)$$

由(10)式可见, 椭圆周界上各点的应力强度因子 $K_I(x_1, z_1, \alpha)$ 不但与该点的坐标位置 (x_1, z_1) 有关, 而且还与平面 $\eta\xi$ 的方位角 α 有关. 从式中明显可以证得, 对椭圆周界上任意一点, 当 $\alpha=0$, 即平面 $\eta\xi$ 与法线平面重合时, 见图4, $K_I(x_1, z_1, \alpha)$ 取最大值, 记为 $K_I(x_1, z_1)$, 则

$$K_I(x_1, z_1) = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi} \left(\sin^2 \phi + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \phi \right)^{1/4} \quad (11)$$

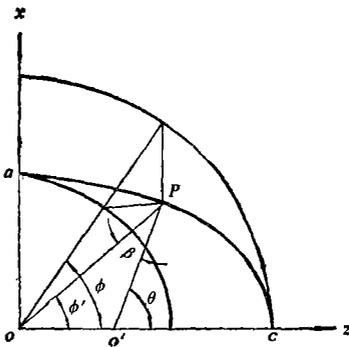


图4 椭圆的离心角与极角

当然, $K_I(x_1, z_1)$ 以 $\phi = \pm \pi/2$ 的点即短轴两端点为最大, 其值为

$$K_I = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi} \quad (12)$$

G. R. Irwin 直接由法线平面得出(见[3]中(6)式, 式中符号作者略有变动)

$$\xi^2 = v_0^2 \frac{2\eta}{ac} (a^2 \cos^2 \phi + c^2 \sin^2 \phi)^{1/2} \quad (13)$$

式中 η 为一极小量. 从而推证了沿着法线平面的 K_I 表式, 即本文(11)式. 但[3]中没有得出关于椭圆周界上任意点、任意方位上的 $K_I(x_1, z_1, \alpha)$ 表式. 因此, 没有证明沿法线平面的 $K_I(x_1, z_1)$ 为最大值, 而是直接用了这样的结果. 本文对此作了补充.

有的作者^[4]在解释文献[3]时所导出的公式(见[4]中(4.107)式)

$$V_0'^2 = \frac{2rV_0^2}{ac} \sqrt{c^2 \sin^2 \phi' + a^2 \cos^2 \phi'} \quad (14)$$

根据[4]中的定义 ϕ' 为极角, 即 OP 与 z 轴间的夹角, 其余符号说明见[4]. [4]中根据(14)式所推出的应力强度因子公式, 其实是

$$K_I(x_1, z_1, \beta) = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi} \left(\sin^2 \phi + \frac{a^2}{c^2} \cos^2 \phi \right)^{1/4} \sqrt{\cos \beta} \quad (15)$$

式中 β 为 PO 与 PO' 之夹角(图4). 显然, 这不是[3]的本意.

此外, 不仅国内[5]已指出), 而且国外^[6]有一些著作中, 将(11)式中的离心角 ϕ 理解为极角 ϕ' , 这显然是不正确的.

由(10)式可得出

$$\frac{K'_I(x_1, z_1)}{K_I(x_1, z_1)} = \sqrt{\cos\beta} \quad (16)$$

其中

$$K'_I(x_1, z_1) = \frac{\sigma\sqrt{\pi a}}{\Phi} \left(\sin^2\phi' + \frac{a^2}{c^2} \cos^2\phi' \right)^{1/4}$$

即以极角 ϕ' 代替离心角 ϕ 代入(11)式计算的应力强度因子.

而

$$\cos\beta = \frac{ac}{A^{1/2}B^{1/2}} \quad (17)$$

式中

$$B = a^2 \sin^2\phi + c^2 \cos^2\phi$$

显然, 仅当椭圆长、短轴的四个端点处有

$$K'_I(x_1, z_1) = K_I(x_1, z_1)$$

此外, $K'_I(x_1, z_1)$ 均比 $K_I(x_1, z_1)$ 要小. 不难证明: 当 $\phi = \pm\pi/4, \pm 3\pi/4$ 时, $K'_I(x_1, z_1)$ 与 $K_I(x_1, z_1)$ 的相对误差最大, 而且随着椭圆长、短轴之比 $k=c/a$ 的增大而增大. 表 1 列出了若干数值示例.

作者认为, 对椭圆来说, 显然极角 ϕ' 比之于离心角 ϕ 要来得直观些, 为了便于(11)式的应用, 可对(11)式略作改进, 使其变成极角 ϕ' 的关系式.

表 1 $K'_I(x_1, z_1)$ 与 $K_I(x_1, z_1)$ 之间的相对误差

$k=c/a$	$\frac{K'_I - K_I}{K_I} \times 100\%$
1.5	-3.90
2.0	-10.6
2.5	-17.0
3.0	-22.5
3.5	-27.3
4.0	-31.4

由图 4 的几何关系, 可得出

$$\left. \begin{aligned} \sin\phi &= \frac{c}{D^{1/2}} \sin\phi' \\ \cos\phi &= \frac{a}{D^{1/2}} \cos\phi' \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

式中

$$D = a^2 \cos^2\phi' + c^2 \sin^2\phi'$$

将(18)式代入(11)式即得

$$K_I(x_1, z_1) = \frac{\sigma \sqrt{\pi a}}{\Phi} \left(\frac{k^2 \sin^2 \phi' + k^{-2} \cos^2 \phi'}{k^2 \sin^2 \phi' + \cos^2 \phi'} \right)^{1/4} \quad (19)$$

综上所述, 本文结论:

1. 在 Green-Sneddon 解^[1]关于裂纹表面位移场结果的基础上, 用坐标变换求出了无限体中受均匀拉伸的椭圆片状裂纹周界上, 任意点、任意方位上的应力强度因子 $K_I(x_1, z_1, \alpha)$ 表达式。

2. 补充了 Irwin 的工作[3], 证明了对上述椭圆裂纹周界上某一确定点而言, 沿法线平面上所得出的应力强度因子为最大值。

3. 指出了某些著作中对 Irwin 著作[3]有关内容所作的不恰当的解释; 以及国内^[6]和国外^[6]一些论著中在应用公式(11)时错误地将极角 ϕ' 代替了离心角 ϕ 。

4. 推荐了一个用比离心角更为直观的极角表示的 $K_I(x_1, z_1)$ 表达式, 以便方便地应用(11)式来求取椭圆周界上任意点处的应力强度因子。

参 考 文 献

1. Green, A. E., Sneddon, I. N., The stress distribution in the neighborhood of a flat elliptic crack in an elastic solid, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, 46(1950), 159.
2. 陈篪等编著, 《工程断裂力学》(上册) 国防工业出版社, (1977), 28-29.
3. Irwin, G. R., Crack-extension force for a part-through crack in a plate, *J. Appl. Mech.*, 29, 4, Dec. (1962), 651-654.
4. 通用机械研究所等编, 《压力容器国外技术进展》(上册), 通用机械研究所出版, (1974), 196-199.
5. 老亮, 椭圆裂纹 K_I 式中常见的一些错误, 上海力学, 2, 2, (1981), 58-59.
6. Broek, D., *Elementary Engineering Fracture Mechanics*, Sijthoff & Noordhoff, (1978), 2nd. Ed. 81.

Discussion on the SIF for Points on Border of Elliptical Flat Crack inside Infinite Solid under Uniform Tension

Cai Zeng-shen

(Zhejiang Institute of Technology, Zhejiang)

Abstract

Using the results of crack surface displacement field in Green-Sneddon's solution⁽¹⁾ and coordinate transformation, this paper has derived an expression $K_I(x_1, z_1, \alpha)$ for SIF at any point and any orientation on the border of elliptical flat crack inside infinite solid under uniform tension. As a complement of Irwin's work⁽²⁾, it is shown that for any pointed point on the elliptical border the SIF defined on normal plane takes the maximum value. And it should be pointed out that in some works some idea concerning Irwin's contents is calling into question. An expression K_I in terms of polar angle which is more apparent than centrifugal angle is proposed for SIF at any point on the elliptical border.