应用数学和力学，第3卷第4期（1982年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

二阶变系数微分方程组解的有界性与渐近性*

李 骊

（天津大学，1980年11月4日收到）

摘 要

已知微分方程组

$$\left.\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt}&=p_{11}(t)x_1+p_{12}(t)x_2\\ \frac{dx_2}{dt}&=p_{21}(t)x_1+p_{22}(t)x_2\end{aligned}\right\}\tag{0.1}$$

现研究它解的有界性与渐近性．当(0.1)的系数 $p_{ij}(t)$ 是周期函数时，Бурдика[1] 曾加以研究，而当$p_{ij}(t)$是任意函数时，至今还未曾有人研究过．此外，Бурдика所用的方法，只适用于周期系数的情况，对于一般情况并不适用．在本文中，我们将给出一种研究方法，它既适用于周期系数的情况，也适用于一般情况．

一、方 程 的 变 换

在以下讨论中，为了书写简单起见，我们把$p_{ij}(t)$简写为p_{ij}.

首先我们研究如何通过适当的变换将(0.1)的形式加以简化．为此，我们假定p_{12}，p_{21}在(t_0,∞)中均不等于零．至于这一条件限制的适当放宽问题，将在下一节中加以讨论．

选取λ，使之满足

$$\begin{vmatrix}p_{11}-\lambda & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}-\lambda\end{vmatrix}=(p_{11}-\lambda)(p_{22}-\lambda)-p_{12}p_{21}=0\tag{1.1}$$

由此得

$$\left.\begin{aligned}&\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta\\ \text{其中}\qquad &\alpha=\frac{1}{2}(p_{11}+p_{22})\\ &\beta=\frac{1}{2}\sqrt{(p_{11}+p_{22})^2-4(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})}\end{aligned}\right\}\tag{1.2}$$

---

* 钱伟长推荐.

此处β可以为实数，也可以为虚数.

作变换

$$\left.\begin{aligned}x_1&=y_1e^{\int_{t_0}^{t}\lambda dt}\\x_2&=y_2e^{\int_{t_0}^{t}\lambda dt}\end{aligned}\right\}\tag{1.3}$$

其中λ为(1.2)中λ_1、λ_2中的任一值.将它代入(0.1)，消去$e^{\int_{t_0}^{t}\lambda dt}$，得

$$\left.\begin{aligned}\frac{dy_1}{dt}&=(p_{11}-\lambda)y_1+p_{12}y_2\\\frac{dy_2}{dt}&=p_{21}y_1+(p_{22}-\lambda)y_2\end{aligned}\right\}\tag{1.4}$$

由(1.1)得　$p_{21}=\dfrac{(p_{11}-\lambda)(p_{22}-\lambda)}{p_{12}}$，代入(1.4)的第二式并注意到第一式，得

$$\begin{aligned}\frac{dy_2}{dt}&=\frac{(p_{11}-\lambda)(p_{22}-\lambda)}{p_{12}}y_1+(p_{22}-\lambda)y_2\\&=\frac{p_{22}-\lambda}{p_{12}}[(p_{11}-\lambda)y_1+p_{12}y_2]=\frac{p_{22}-\lambda}{p_{12}}\ \frac{dy_1}{dt}\end{aligned}\tag{1.5}$$

将(1.4)的第一式微分，得

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}=\frac{d(p_{11}-\lambda)}{dt}y_1+(p_{11}-\lambda)\frac{dy_1}{dt}+\frac{dp_{12}}{dt}y_2+p_{12}\frac{dy_2}{dt}\tag{1.6}$$

又：由(1.4)第一式得

$$y_2=\frac{1}{p_{12}}\left[\frac{dy_1}{dt}-(p_{11}-\lambda)y_1\right]$$

将上式以及(1.5)式代入(1.6)，于是得

$$\frac{d^2y_1}{dt^2}+A\frac{dy_1}{dt}+By_1=0\tag{1.7}$$

其中

$$\left.\begin{aligned}A&=\pm2\beta-\frac{d}{dt}\ln|p_{12}|\\B&=-\frac{d(p_{11}-\lambda)}{dt}+(p_{11}-\lambda)\frac{d}{dt}\ln|p_{12}|\end{aligned}\right\}\tag{1.8}$$

再作变换

$$y_1=z_1e^{\int_{t_0}^{t}-\frac{1}{2}Adt}\tag{1.9}$$

代入(1.7)并消去$e^{\int_{t_0}^{t}-\frac{1}{2}Adt}$，得

$$\frac{d^2z_1}{dt^2}+\left(-\frac{1}{2}\ \frac{dA}{dt}+\frac{1}{4}A^2+B\right)z_1=0\tag{1.10}$$

前面曾指出，β可以为实数，也可以为虚数．但是，即使β为虚数的情况下，我们也很容易证明下述两点：

1. x_1到z_1的变换是实变换；

2. (1.10)中z_1的系数为实函数.

先证明第一点．由(1.3)、(1.8)、(1.9)可得

$$x_1=z_1e^{\int_{t_0}^{t}\left(\mp\beta+\lambda+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln|p_{12}|\right)dt}$$

由(1.2)知，$\mp\beta=\alpha=\frac{1}{2}(p_{11}+p_{22})$此外，并注意到$e^{\int_{t_0}^{t}\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\ln|p_{12}|dt}=|p_{12}|^{1/2}|p_{12}(t_0)|^{-1/2}$，

于是上式化为

$$x_1=z_1|p_{12}|^{1/2}|p_{12}(t_0)|^{-1/2}e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(p_{11}+p_{22})dt}$$

如是，就证明了第一点.

现证明第二点．为此，由(1.8)中第一式得

$$A^2=4\beta^2\mp4\beta\frac{d}{dt}\ln|p_{12}|+\left(\frac{d}{dt}\ln|p_{12}|\right)^2$$

$$\frac{dA}{dt}=\pm2\frac{d\beta}{dt}-\frac{d^2}{dt^2}\ln|p_{12}|$$

此外，将$\lambda=\alpha\pm\beta=\frac{1}{2}(p_{11}+p_{22})\pm\beta$代入(1.8)中第二式，得

$$\begin{aligned}B&=-\frac{d}{dt}\left[p_{11}-\frac{1}{2}(p_{11}+p_{22})\mp\beta\right]+\left[p_{11}-\frac{1}{2}(p_{11}+p_{22})\mp\beta\right]\frac{d}{dt}\ln|p_{12}|\\&=-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(p_{11}-p_{22})\pm\frac{d\beta}{dt}+\frac{1}{2}(p_{11}-p_{22})\frac{d}{dt}\ln|p_{12}|\mp\beta\frac{d}{dt}\ln|p_{12}|\end{aligned}$$

利用上述诸式，不难得出

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2}\frac{dA}{dt}-\frac{1}{4}A^2+B=&\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\ln|p_{12}|+\frac{1}{2}(p_{11}-p_{22})\frac{d}{dt}\ln|p_{12}|\\&-\frac{1}{4}\left(\frac{d}{dt}\ln|p_{12}|\right)^2-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(p_{11}-p_{22})\\&-[(p_{11}+p_{22})^2-4(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})]\end{aligned}$$

如是，就证明了第二点.

综上所述，可得

$$\left.\begin{aligned}&x_1=z_1|p_{12}|^{1/2}|p_{12}(t_0)|^{-1/2}e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(p_{11}+p_{22})dt}\\&\frac{dz_1}{dt}+p_1z_1=0\\&\text{其中}\quad p_1=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\ln|p_{12}|+\frac{1}{2}(p_{11}-p_{22})\frac{d}{dt}\ln|p_{12}|-\frac{1}{4}\left(\frac{d}{dt}\ln|p_{12}|\right)^2\\&\qquad-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(p_{11}-p_{22})-[(p_{11}+p_{22})^2-4(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})]\end{aligned}\right\}\quad(1.11)$$

同理得

$$\left.\begin{aligned}
&x_2=z_2|p_{21}|^{1/2}|p_{21}(t_0)|^{-1/2}e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}(p_{11}+p_{22})dt}\\
&\frac{dz_2}{dt}+p_2z_2=0\\
\text{其中}\quad &p_2=\frac{1}{2}\frac{d^2}{dt^2}\ln|p_{21}|+\frac{1}{2}(p_{11}-p_{22})\frac{d}{dt}\ln|p_{21}|-\frac{1}{4}\left(\frac{d}{dt}\ln|p_{21}|\right)^2\\
&\quad-\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(p_{11}-p_{22})-[(p_{11}+p_{22})^2-4(p_{11}p_{22}-p_{12}p_{21})]
\end{aligned}\right\}\tag{1.12}$$

二、关于p_{12}，p_{21}条件限制的放宽问题

在上节方程的化简中，我们曾假定p_{12}，p_{21}在$(t_0，\infty)$中均不等于零.现讨论，如何适当放宽这一条件限制.

1. p_{ij}为周期函数且有界的情况

在此情况下，我们只要求p_{12}，p_{21}中有一个在$(t_0，\infty)$中不等于零即可.事实上，对(0.1)作变换

$$\left.\begin{aligned}
y_1=ax_1+bx_2\\
y_2=cx_1+dx_2
\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

其中a，b，c，d为待定常数，于是得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_1}{dt}=p'_{11}y_1+p'_{12}y_2\\
\frac{dy_2}{dt}=p'_{21}y_1+p'_{22}y_2
\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

$$\left.\begin{aligned}
\text{其中}\quad p'_{12}&=\frac{a^2}{\Delta}\left[p_{12}-(p_{11}-p_{22})\left(\frac{b}{a}\right)-p_{21}\left(\frac{b}{a}\right)^2\right]\\
&=\frac{b^2}{\Delta}\left[p_{12}\left(\frac{a}{b}\right)^2-(p_{11}-p_{22})\left(\frac{a}{b}\right)-p_{21}\right]\\
p'_{21}&=\frac{c^2}{\Delta}\left[-p_{12}+(p_{11}-p_{22})\left(\frac{d}{c}\right)+p_{21}\left(\frac{d}{c}\right)^2\right]\\
&=\frac{d^2}{\Delta}\left[-p_{12}\left(\frac{c}{d}\right)^2+(p_{11}-p_{22})\left(\frac{c}{d}\right)+p_{21}\right]\\
\Delta&=ab-cd
\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

由于p_{ij}为有界，因此，如果p_{12}在$(t_0，\infty)$中不等于零，那么，由(2.3)可见，只要选择$\frac{b}{a}$，$\frac{d}{c}$充分小，并使$ab-cb\neq 0$，那么，(2.1)就是一非异变换,并且在此变换下所得之(2.2)中，其p'_{12}，p'_{21}在$(t_0，\infty)$中均不等于零.这样，我们就可以对(2.2)利用上节所述的方法加以化简以便研究其解的稳定性.由于(2.1)为一非异变换，故(2.2)与(0.1)二者在稳定性方面是等价的.

同理，如果p_{21}在$(t_0,\ \infty)$中不等于零，则只要选择$\frac{a}{b}$，$\frac{c}{d}$充分小并使$ab-cd\neq 0$，即可得到相同的结论.

2. p_{ij}为任意函数的情况

设p_{12}，p_{21}在$t\in(t_0,\ t^*)$时有零点，而当$t\in(t^*,\ \infty)$时均不再有零点，此外，并假定所有p_{ij}在$(t_0,\ t^*)$内为有界，在此情况下，我们可以对(0.1)从$t=t^*$开始进行前述变换，并在$(t^*,\ \infty)$内对它的解的稳定性加以研究. 如果，对于(0.1)，由$t=t^*$，$x_1=x_{10}^*$，$x_2=x_{20}^*$初值所确定的解是稳定的，那么，由$t=t_0$，$x_1=x_{10}$，$x_2=x_{20}$初值所确定的解也必然是稳定的. 为了证实这一点，我们只需证明：

（1） 由$t=t_0$，$x_1=x_{10}$，$x_2=x_{20}$初值所确定的(0.1)之解，在$t\in(t_0,\ t^*)$上始终为有界，从而由$t=t_0$，$x_1=x_{10}$，$x_2=x_{20}$出发的解，均可解析延拓至$t=t^*$；

（2） 如$t=t_0$时所取之初值x_{10}，x_{20}为充分小，则由此初值所确定的解在$t=t^*$时所取之值也为充分小.

令

$$|x_{10}|+|x_{20}|=\delta_0$$

并令

$$\frac{m}{2}=\max_{\substack{t_0\leqslant t\leqslant t^*\\ i,j}}\{|p_{ij}|\}$$

由于假定p_{ij}在$(t_0,\ t^*)$内为有界，故m为一有限数.

据此，由(0.1)可得

$$|x_1|\leqslant|x_{10}|+\frac{m}{2}\int_{t_0}^{t}(|x_1|+|x_2|)dt$$

$$|x_2|\leqslant|x_{20}|+\frac{m}{2}\int_{t_0}^{t}(|x_1|+|x_2|)dt$$

$$|x_1|+|x_2|\leqslant\delta_0+m\int_{t_0}^{t}(|x_1|+|x_2|)dt$$

设 $|x_1|+|x_2|$到达$\delta_1=k\delta_0$ $(k>1)$的时间为t_1，则由上式得

$$\delta_1\leqslant\delta_0+m\delta_1(t_1-t_0)$$

据此，并注意到$\delta_1=k\delta_0$，于是得

$$t_1\geqslant\frac{\delta_1-\delta_0}{m\delta_1}+t_0=\frac{1-\frac{1}{k}}{m}+t_0$$

同理，$|x_1|+|x_2|$复由δ_1到达$\delta_2=k\delta_1=k^2\delta_0$时的时间$t_2$为

$$t_2\geqslant2\left(\frac{1-\frac{1}{k}}{m}\right)+t_0$$

而$|x_1|+|x_2|$之值到达$\delta_n=k^n\delta_0$时的时间t_n则为

$$t_n\geqslant n\left(\frac{1-\frac{1}{k}}{m}\right)+t_0$$

如 $t^*\leqslant n\left(\frac{1-\frac{1}{k}}{m}\right)+t_0$，则当$t=t^*$时，$|x_1|+|x_2|$之值为

$$|x_1|+|x_2|\leqslant k^n\delta_0$$

从上述证明过程中，我们不难看出，在整个区间(t_0, t^*)内，解$x_1(t)$，$x_2(t)$始终为有界，此外，由最后这一不等式可知，如$|x_{10}|+|x_{20}|=\delta_0$之值取得充分小，则$t=t^*$时$x_1(t^*)$，$x_2(t^*)$之值也为充分小.

三、解的有界性与渐近性

1. p_{ij}为周期函数的情况

定理1 如(0.1)之系数为周期函数且有界，并满足

(a) $\int_0^T(p_{11}+p_{22})dt=0$;

(b) $\int_0^T p_i dt\geqslant 0$, $\int_0^T|p_i|dt\leqslant\frac{T}{4}$ $(i=1,2)$

其中p_1，p_2由(1.11)，(1.12)所定义，T为周期，则(0.1)之解为稳定.

证：在满足条件(b)的情况下，由Borg的结果[2]可知，(1.11)，(1.12)中之z_1，z_2为稳定，此外，根据条件(a)以及p_{12}，p_{21}的有界性，由(1.11)，(1.12)所示之关系不难推出对x_1，x_2而言也是稳定的.

同样可以证明下述定理：

定理2 如(0.1)之系数为周期函数且有界，并满足

(a) $\int_0^T(p_{11}+p_{22})dt<-\alpha T$ $(\alpha>0)$;

(b) $\int_0^T p_i dt\geqslant 0$, $\int_0^T|p_i|dt\leqslant\frac{T}{4}$ $(i=1,2)$

则(0.1)之解为渐近稳定.

2. p_{ij}为一般函数的情况

定理3 如(0.1)之系数满足

(a) $\int_{t_0}^t(p_{11}+p_{22})dt\leqslant 0$;

(b) p_{12}，p_{21}为有界;

(c) $p_0>0$，连续，有界，$\lim\limits_{t\to\infty}p_i=\alpha_i^2>0$ $(i=1,2)$

则(0.1)之解为有界.

证：在满足条件(c)的情况下，由[3]p.28Д)，可知z_1，z_2为有界，再结合条件(a)与(b)，即可推出x_1，x_2的有界性.

同理可证：

定理4 如(0.1)之系数满足

(a) $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{t_0}^t(p_{11}+p_{22})dt=-\infty$;

(b) p_{12}，p_{21}为有界；

(c) $p_i>0$,连续,有界，$\lim\limits_{t\to\infty} p_i=\alpha_i^2>0 \quad (i=1,2)$

则对(0.1)之解，有 $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t)=0$.

顺便指出，如(0.1)之系数为常数，$\lambda=\alpha\pm\beta$为其特征根，则此时定理3的条件实际上化为$\alpha=0$与$\beta^2<0$，定理4的条件实际上化为$\alpha<0$与$\beta^2<0$. 显然，前者对应于纯虚根的情况，后者对应于实部小于零的复根的情况.

定理5 如(0.1)之系数满足

(a) $\int_{t_0}^{t}(p_{11}+p_{22})dt<-\alpha t$，$\alpha>0$;

(b) $p_{12}=O(t^m)$，$p_{21}=O(t^m)$，m为某一正整数；

(c) $\lim\limits_{t\to\infty} p_i=0$，$|p_i|<\dfrac{k}{t^{3+\rho}}$ $\quad(i=1,2)$，其中k，ρ为某些正数；

则对(0.1)之解有 $\lim\limits_{t\to\infty} x_1(t)=0$，$\lim\limits_{t\to\infty} x_2(t)=0$.

证：根据条件(c)，由[2]p41有关定理可知，当$t\to\infty$时有

$$z_1(t)=O(t)$$
$$z_2(t)=O(t)$$

然后，再根据条件(a)与(b)，不难得出本定理之结论.

参 考 文 献

1. Бурдика, B. N., Критерий ограниченности решений системы дифференциальных уравнения 2-го порядка с периодическими коэффиуентами. ДАН, СССР, новая серия, (1953)Том XC №3.
2. Borg G., On a Liapounoff criterion of stability, *Amer. Journ. of Math.* 71, 1, (1949).
3. Сонсоне (Sansone, G.), *Обыкновенные дифференциальные уравнения* Том Ⅱ,(1954).

The Boundedness and Asymptotic Behavior of Solutions of Differential System of Second-Order with Variable Coefficients

Li Li

(*Tianjin University, Tianjin*)

Abstract

In this paper, the following equations were studied:

$$\frac{dx_1}{dt}=p_{11}(t)x_1+p_{12}(t)x_2$$

$$\frac{dx_2}{dt}=p_{21}(t)x_1+p_{22}(t)x_2$$

where $p_{ij}(t)$ are either periodic functions or arbitrary functions of t, and some criteria for the boundedness and asymptotic behavior of solutions were obtained.