应用数学和力学，第3卷第4期（1982年7月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

圆板大挠度的钱伟长解及其渐近特性*

陈 山 林

（清华大学，1981年6月30日收到）

摘 要

本文得到了圆板大挠度问题钱伟长解的一般算式及其残数估计，然后将结果用于研究解的渐近特性．讨论了均布力和集中力作用的两个算例．

一、前 言

摄动解的渐近特性是指：随着摄动次数的增加和摄动参数大小的变化，解的近似程度的变化规律．这个问题涉及到高次摄动解的计算及其误差估计，具有一定困难．因此，圆板大挠度的钱伟长解(1947)[1]虽然被许多作者所应用，但它的渐近特性，迄今仍是不甚明了的．

本文基于问题的积分方程，得到了钱伟长解的一般表达式，并借用加权残数法(Method of Weighted Residuals)的概念，给出了解的残数估计，然后将结果用于研究解的渐近特性．对均布力和集中力作用，边界固定夹紧的两个算例，进行了计算和讨论．

二、问 题 的 积 分 方 程

轴对称圆薄板大挠度问题的积分方程为

$$\left.\begin{aligned}\vartheta(\rho)&=p\vartheta_0(\rho)-\frac{\rho}{2}\int_0^1 G(\rho,\xi)F(\xi)\xi d\xi\\ S(\rho)&=-\frac{\rho}{2}\int_0^1 K(\rho,\xi)f(\xi)\xi d\xi\end{aligned}\right\}\tag{2.1a,b}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&F(\xi)=-S(\xi)\vartheta(\xi),\quad f(\xi)=\frac{1}{2}\vartheta^2(\xi)\\ &G(\rho,\xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho^2}+\lambda_1 & 0\leqslant\xi\leqslant\rho\\ \dfrac{1}{\xi^2}+\lambda_1 & \rho\leqslant\xi\leqslant 1\end{cases}\end{aligned}\right\}\tag{2.2}$$

* 本文是在钱伟长教授指导下写成的．钱伟长推荐．

$$\left.\begin{aligned}&K(\rho,\ \xi)=\begin{cases}\dfrac{1}{\rho^2}+\lambda_2 & 0\leqslant\xi\leqslant\rho\\[2ex] \dfrac{1}{\xi^2}+\lambda_2 & \rho\leqslant\xi\leqslant 1\end{cases}\\ &\lambda_1=\frac{1-\nu_1}{1+\nu_1}\qquad \lambda_2=\frac{1+\nu_2}{1-\nu_2}\end{aligned}\right\}$$

ν_1，ν_2与边界条件有关，对于固定夹紧边界，$\nu_1=\infty$，$\nu_2=\nu$．$\vartheta_0(\rho)$是小挠度解，p是载荷参数．在均布力q作用时

$$\left.\begin{aligned}&p=\frac{a^4q}{Eh^4}[12(1-\nu^2)]^{3/2}\\ &\vartheta_0(\rho)=[\rho^3-(2+\lambda_1)\rho]/16\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

在中心集中力Q作用时

$$\left.\begin{aligned}&p=\frac{a^2Q}{\pi E h^4}[12(1-\nu^2)]^{3/2}\\ &\vartheta_0(\rho)=\frac{\rho}{2}\ln\rho-\frac{\rho}{4}(1+\lambda_1)\end{aligned}\right\}\tag{2.4}$$

积分方程组（2.1）可由Kärmän方程及其边界条件导得．本文未加说明的符号均同文[3]．

中心挠度

$$y_0=\int_1^0\vartheta(\rho)d\rho\tag{2.5}$$

将(2.1a)式代入上式，可以得到

$$y_0=\alpha_0 p-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\ln\rho-\frac{\lambda_1+1}{4}\right)F(\rho)\rho d\rho\tag{2.6}$$

式中，$\alpha_0=\int_1^0\vartheta_0(\rho)d\rho$．当$\nu_1=\infty$，即$\lambda_1=-1$时，(2.6)式即文[3]导得的(3.6)式．

三、钱伟长解的一般表示

取无量纲中心挠度y_0为摄动参数，设

$$\left.\begin{aligned}&p=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n y_0^{2n-1},\quad \vartheta(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}\vartheta_n(\rho)y_0^{2n-1}\\ &S(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty}S_n(\rho)y_0^{2n}\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

将(3.1)代入(2.1)，比较y_0同次幂系数，可得

$$\left.\begin{aligned}&\vartheta_n=\alpha_n\vartheta_0-\frac{\rho}{2}\int_0^1 G(\rho,\xi)F_n(\xi)\xi d\xi\\&S_n=-\frac{\rho}{2}\int_0^1 K(\rho,\xi)f_n(\xi)\xi d\xi\end{aligned}\quad(n=1,2,\cdots)\right\}\tag{3.2}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}&F_n=-\sum_{m=1}^{n-1}S_m\vartheta_{n-m}\qquad F_1\equiv 0\\&f_n=\frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n}\vartheta_m\vartheta_{n-m+1}\end{aligned}\right\}\tag{3.3}$$

将(3.1)代入(2.6)式，比较y_0同次幂系数，可得

$$\left.\begin{aligned}&\alpha_1=\alpha_0^{-1}\\&\alpha_n=\int_0^1\left(\ln\xi-\frac{\lambda_1+1}{2}\right)F_n(\xi)\xi d\xi/2\alpha_0\qquad(n=2,3,\cdots\cdots)\end{aligned}\right\}\tag{3.4}$$

(3.2)—(3.4)式给出了钱伟长解的一般表示，这些解具有迭代结构，便于数值计算.

四、残 数 估 计

在实际计算中，我们只能做到有限次摄动，设摄动次数为N. 此时，解(3.1)取

$$\left.\begin{aligned}&p=\sum_{n=1}^{N+1}\alpha_n y_0^{2n-1},\qquad \vartheta(\rho)=\sum_{n=1}^{N+1}\vartheta_n(\rho)y_0^{2n-1}\\&S(\rho)=\sum_{n=1}^{N}S_n(\rho)y_0^{2n}\end{aligned}\right\}\tag{4.1}$$

式中α_n，ϑ_n,S_n由(3.2)—(3.4)迭代计算. 当然，解(4.1)只能使方程(2.1)近似满足. 为了估计解(4.1)的近似程度，我们借用加权残数法(MWR)的概念[2]，引入残数

$$\left.\begin{aligned}&\Delta R_\vartheta=\int_0^1\left[\vartheta-p\vartheta_0+\frac{\rho}{2}\int_0^1 G(\rho,\xi)F(\xi)\xi d\xi\right]W_1 d\rho\\&\Delta R_S=\int_0^1\left[S+\frac{\rho}{2}\int_0^1 K(\rho,\xi)f(\xi)\xi d\xi\right]W_2 d\rho\end{aligned}\right\}\tag{4.2a,b}$$

式中W_1，W_2是权函数. 为了简便，我们取$W_1\equiv W_2\equiv 1$. 当p、ϑ、S用(4.1)式代入时，残数ΔR_ϑ和ΔR_S是方程(2.1)被近似满足程度的一种平均度量.

将(4.1)代入(4.2)，并注意到(3.2)—(3.4)式，可以计算得到

$$\left.\begin{aligned}\Delta R_\vartheta&=\frac{1}{2}y_0{}^{2N+1}\sum_{n=1}^{N}\int_0^1\left(\ln\xi-\frac{1+\lambda_1}{2}\right)\widetilde{F}_n(\xi)\xi d\xi y_0{}^{2n}\\ \Delta R_S&=\frac{1}{2}y_0{}^{2N}\sum_{n=1}^{N+1}\int_0^1\left(\ln\xi-\frac{1+\lambda_2}{2}\right)\tilde{f}_n(\xi)\xi d y_0{}^{2n}\end{aligned}\right\}\tag{4.3}$$

式中，

$$\left.\begin{aligned}\widetilde{F}_n(\xi)&=\sum_{m=n}^{N}S_m\vartheta_{N+n-m+1}\\ \tilde{f}_n(\xi)&=\frac{1}{2}\sum_{m=n}^{N+1}\vartheta_m\vartheta_{N+n-m+1}\end{aligned}\right\}\tag{4.4}$$

(4.3)式表明，残数与摄动次数 N 和摄动参数 y_0 有关．研究 ΔR_ϑ 和 ΔR_S 随 N 和 y_0 的变化，对于解(4.1)的渐近特性，可以有所了解．

特别是，ΔR_ϑ 可以从(2.6)式得到，即

$$\Delta R_\vartheta=\left[a_0p-\frac{1}{2}\int_0^1\left(\ln\rho-\frac{\lambda_1+1}{2}\right)F(\rho)\rho d\rho\right]-y_0\tag{4.5}$$

将(4.1)式代入后，即为(4.3)第一式．因此，残数 ΔR_ϑ 的物理意义是明确的，即为中心挠度近似值与真值之差．因此，ΔR_ϑ 对于应用上最重要的弹性特征来说，给出的误差估计不是平均意义下的，而是准确的．

定义相对残数为

$$\left.\begin{aligned}\delta R_\vartheta&=\left|\frac{\Delta R_\vartheta}{y_0}\right|\\ \delta R_S&=\left|\frac{\Delta R_S}{\int_0^1 S(\rho)d\rho}\right|\end{aligned}\right\}\tag{4.6}$$

五、解的渐近特性

我们研究边缘固定夹紧，分别承受均布力和中心集中力的两个具体例子．利用(3.2)—(3.4)式用数值积分和迭代计算，并由(4.6)式计算相对残数，对于 $\nu=0.3$，摄动次数 $N\leqslant5$ 时，计算结果如表1和表2所示．表中只列出了摄动参数（此地回到了有量纲的中心挠度）的一个不大的变化区域，但已足以说明解的渐近特性了．

表1　　集中力作用时的残数

w_0/h		1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
δR_θ	$N=1$	0.0531	0.0677	0.0851	0.106	0.130	0.158	0.189	0.227	0.269	0.317
	$N=2$	0.0282	0.0323	0.0447	0.0606	0.0807	0.106	0.136	0.174	0.218	0.270
	$N=3$	0.0124	0.0198	0.0309	0.0470	0.0702	0.103	0.149	0.211	0.298	0.415
	$N=4$	0.0072	0.0129	0.0224	0.0373	0.0604	0.0948	0.145	0.214	0.308	0.428
	$N=5$	0.0046	0.0094	0.0182	0.0343	0.0627	0.112	0.196	0.340	0.585	1.01
δR_S	$N=1$	0.169	0.188	0.208	0.228	0.245	0.268	0.288	0.309	0.328	0.347
	$N=2$	0.0832	0.106	0.134	0.166	0.205	0.251	0.307	0.373	0.451	0.545
	$N=3$	0.0414	0.0584	0.0803	0.108	0.142	0.183	0.231	0.285	0.343	0.403
	$N=4$	0.0251	0.0404	0.0636	0.0982	0.149	0.226	0.339	0.513	0.784	1.23
	$N=5$	0.0156	0.0279	0.0481	0.0798	0.127	0.195	0.284	0.388	0.487	0.531

w_0—中心挠度，　　h—板厚

表2　　均布力作用时的残数

w_0/h		1.6	1.7	1.8	1.9	2.0	2.1	2.2	2.3	2.4	2.5
δR_θ	$N=1$	0.0127	0.0162	0.0204	0.0253	0.0311	0.0378	0.0455	0.0544	0.0644	0.0759
	$N=2$	0.0056	0.0099	0.0168	0.0274	0.0431	0.0661	0.0988	0.145	0.208	0.294
	$N=3$	0.0001	0.0008	0.0028	0.0064	0.0125	0.0219	0.0356	0.0543	0.0780	0.105
	$N=4$	0.0015	0.0018	0.0020	0.0004	0.0061	0.0195	0.0475	0.102	0.206	0.393
	$N=5$	0.0013	0.0021	0.0030	0.0038	0.0041	0.0037	0.0041	0.0126	0.0520	0.182
δR_S	$N=1$	0.306	0.361	0.424	0.494	0.572	0.661	0.759	0.869	0.991	1.12
	$N=2$	0.0889	0.118	0.154	0.197	0.248	0.306	0.370	0.440	0.514	0.589
	$N=3$	0.0266	0.0433	0.0682	0.104	0.157	0.230	0.334	0.479	0.681	0.962
	$N=4$	0.0105	0.0201	0.0364	0.0624	0.102	0.159	0.237	0.335	0.442	0.526
	$N=5$	0.0081	0.0175	0.0356	0.0695	0.131	0.242	0.438	0.787	1.41	2.54

表1和表2中残数变化的共同特点是：

1）当 w_0/h 增大时，残数值也随之增大；

2）存在一个 w_0/h 的区域（对表1，约是 $w_0/h\geqslant 2.2$，对表2，约是 $w_0/h\geqslant 2.3$）．在此区域内，摄动次数 N 的增加不能改善解的近似程度，甚至使近似性更坏．此区域可看做是解的发散区，或解的不适用区．

3）存在一个 w_0/h 的区域（对表1，约是 $w_0/h\leqslant 1.9$，对表2，约是 $w_0/h\leqslant 1.8$）．在此区域内，N 的增加可以显著改善解的近似性，使残数减小直到工程误差允许范围（比如 <0.05）此区域可看做是解的收敛区（平均值意义下的）或解的适用区．

4）在二者之间，有一个过渡性地段，当 N 增加时，残数值有较明显的波动，或者减小甚慢．

对于其他边界条件情形，计算表明，残数变化特点与上述相似．因此，钱伟长解作为一种正规摄动解，它存在着摄动参数的发散区域，收敛区域及二者之间的过渡性区域．文[4]得到均布力固定边情形，挠度曲线中心区下凹发生在 $w_0/h\geqslant 2.44$，与表2的发散区基本一致．迄今作者们[5-9]习惯认为，钱伟长解仅适用于 $w_0/h\leqslant 1$ 的情形．上述讨论表明，钱伟长解可以在整个收敛区适用．（在算例情形，$w_0/h\leqslant 1.8$ 或 1.9）

我们可以仅考虑 δR_θ 来估计弹性特征的近似程度，而且正如前述，这个估计是准确的．

利用残数在过渡区的波动性，我们可以适当选择摄动次数N，使δR_θ较小，以提高解的适用范围．例如，在均布力情形，如取$N=1$或5，弹性特征在$w_0/h=2.3\sim2.4$时仍有相当好的准确度，与文[4]的结论一致．

一般来说，为了得到有足够精度的应力的结果，高次渐近解的计算是必要的．本文实际上提供了钱伟长解高次渐近及其误差估计的一种数值迭代算法．因此，本文工作或许可看做是对钱伟长教授的正规摄动方法的某种补充．

参 考 文 献

1. Chien Wei-zang (钱伟长), *Chinese Journal of Physics*, 7(1947), 102—113.
2. 徐次达，加权残数法解固体力学问题，力学与实践，2, 4 (1980), 12—20.
3. 陈山林，浅正弦波纹圆板在均布载荷下的大挠度弹性特征，应用数学和力学，1,2(1980), 261—272.
4. 陈山林，光积昌，圆薄板大挠度问题的摄动参数，应用数学和力学，2, 1 (1981), 131—144.
5. Schimidt, R., *Jonrnal of the Engineering Mechanics Division, Proc. ASCE*, **94**, EM6 (1968), 1603—1606.
6. Schmidt, R., *Industrial Mathematics*, **23**, Part 1 (1973), 45—51.
7. Tucker, J. R., Schmidt, R. and Dadeppo, D. A., *Industrial Mathematics*, **25**, Part 1 (1975), 17—28.
8. Nash, W. A. and Cooley, I. D., *J. of Appl. Mech.*, **26**, 2(1959), 291—293.
9. Alzheimer, W. E. and Davis, R. T., *J. of Appl. Mech.*, **35**, 1 (1968), 190—192.

Chien's Solution and Its Asymptotic Behavior in Large Deflection of Circular Plates

Chen Shan-lin

(Qinghua University, Beijing)

Abstract

General treatment and residual values of Chien's solution in large deflection of circular plates are given. By means of above results, asymptotic behavior of Chien's solution is studied. Two examples of uniform load and concentrated load are discussed respectively.