

# 论复合型脆断的周向应变因子准则\*

樊蔚勋

(南京航空学院, 1980年9月16日收到)

## 摘 要

本文讨论了线弹性断裂力学的复合型断裂准则, 推荐了周向应变因子准则.

## 一、引 言

线弹性断裂力学从诞生之日起, 它的发展一直和航空及航天工程的发展紧密联系着. 英国皇家航空科学研究院工程硕士A. A. Griffith (1920)<sup>[1]</sup>原先目的是要研究金属机器零件表面加工状态(诸如锉、磨或抛光)对其疲劳强度的影响, 结果提出了张开型裂缝失稳扩展的能量准则, 或裂缝扩展力准则. 美国海军科学研究实验室G. R. Irwin(1957)<sup>[2]</sup>研究了五个张开型裂缝端点附近弹性应力场的共同特征, 提出了应力强度因子的概念, 建立了裂缝扩展力与应力强度因子的平方正比关系, 当然也就有与裂缝扩展力准则等效的应力强度因子准则. 接着他假定, 延性材料(金属)在平面应变条件下的塑性逸散率是材料常数, 应用Griffith-Orowan-Irwin能量准则, 提出了延性材料(金属)平面应变张开型断裂的应力强度因子准则.

线弹性断裂力学酝酿着一个重大突破, 即建立复合型脆断准则. A. A. Griffith (1924)<sup>[3]</sup>继承历史上材料宏观强度的最大应力理论思想, 利用Inglis(1913)关于板内椭圆孔附近应力分布的解答, 直接推导得双向应力状态的断裂条件. 他假定, 当材料中最危险取向的最长裂缝(狭扁椭圆孔)的最高局部拉应力达到了, 相等于材料分子内聚力(理论强度)的一个固定临界值时, 则断裂发生. 美国Lehigh大学F. Erdogan和G. C. Sih(1963)<sup>[4]</sup>仍然继承历史上最大应力理论的思想, 提出了复合型脆断的周向应力因子准则. 由于裂缝扩展开始于其端点而沿径向, 则很自然地想到了, 以作用在径向平面上而其方向垂直于该平面的周向正应力做为参数; 由于数学裂缝端点附近应力场具有奇异性, 于是仿照应力强度因子的概念, 采用周向应力因子做为断裂准则的参数.

G. C. Sih(薛昌明)教授(1972)<sup>[5][6][7]</sup>继承材料宏观强度的Beltrami弹性应变能理论的思想, 提出了复合型脆断的应变能密度因子准则. 这样, 材料宏观强度的两个理论都有了对应的复合型脆断准则; 那么, 很自然, 对应于历史上材料宏观强度的最大弹性应变理论的, 必然是复合型脆断的周向应变因子准则.

\* 钱伟长推荐.

## 二、复合型脆断准则

设材料中含有一条直线穿透裂缝，无论是平面应变或广义平面应力条件，裂端附近各点元的应力分量奇异项都为（图1）

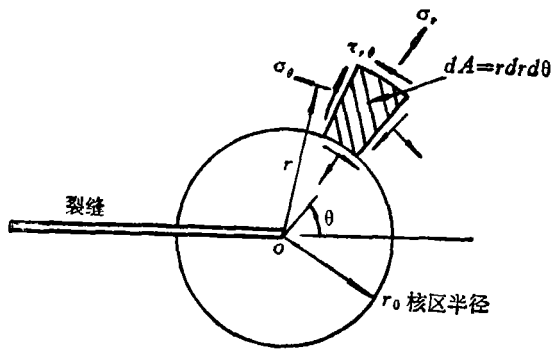


图1 裂端附近各点元的应力分量(圆柱极坐标).

$$\sigma_r = \frac{1}{4\sqrt{2r}} \left[ k_1 \left( 5\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3}{2}\theta \right) + k_2 \left( -5\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3}{2}\theta \right) \right] \quad (2.1a)$$

$$\sigma_\theta = \frac{1}{4\sqrt{2r}} \left[ k_1 \left( 3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3}{2}\theta \right) + k_2 \left( -3\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3}{2}\theta \right) \right] \quad (2.1b)$$

$$\tau_{r,\theta} = \frac{1}{4\sqrt{2r}} \left[ k_1 \left( \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3}{2}\theta \right) + k_2 \left( \cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3}{2}\theta \right) \right] \quad (2.1c)$$

式中 $k_1$ ,  $k_2$ 分别是应力强度因子的对称和斜对称分量，并为外载的已知函数。我们定义各应力分量因子

$$\tilde{\sigma}_r = 4\sqrt{2r} \sigma_r = k_1 \left( 5\cos\frac{\theta}{2} - \cos\frac{3}{2}\theta \right) + k_2 \left( -5\sin\frac{\theta}{2} + 3\sin\frac{3}{2}\theta \right) \quad (2.2a)$$

$$\tilde{\sigma}_\theta = 4\sqrt{2r} \sigma_\theta = k_1 \left( 3\cos\frac{\theta}{2} + \cos\frac{3}{2}\theta \right) + k_2 \left( -3\sin\frac{\theta}{2} - 3\sin\frac{3}{2}\theta \right) \quad (2.2b)$$

$$\tilde{\tau}_{r,\theta} = 4\sqrt{2r} \tau_{r,\theta} = k_1 \left( \sin\frac{\theta}{2} + \sin\frac{3}{2}\theta \right) + k_2 \left( \cos\frac{\theta}{2} + 3\cos\frac{3}{2}\theta \right) \quad (2.2c)$$

两维静水应力因子

$$\tilde{\sigma}_r + \tilde{\sigma}_\theta = 8 \left( k_1 \cos\frac{\theta}{2} - k_2 \sin\frac{\theta}{2} \right) \quad (2.3a)$$

两维Mohr圆半径因子

$$\tilde{r}_0 = 4\sqrt{2r} \left[ \left( \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{2} \right)^2 + \tau_{r,\theta}^2 \right]^{1/2} = 2 \left[ k_1^2 \sin^2\theta + k_2^2 (3\cos^2\theta + 1) + 2k_1 k_2 \sin 2\theta \right]^{1/2} \quad (2.3b)$$

这样不难推导两维主应力因子 $\tilde{\sigma}_1$ ,  $\tilde{\sigma}_2$  ( $\tilde{\sigma}_1 \geq \tilde{\sigma}_2$ )和板厚方向主应力因子

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\sigma}_z &= 0 \quad (\text{平面应力}) \\ \tilde{\sigma}_z &= \nu(\tilde{\sigma}_r + \tilde{\sigma}_\theta) \quad (\text{平面应变}) \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

以及最大剪应力(按H. Tresca)因子 $\tilde{\tau}_{\max}$ ，式中 $\nu$ 为材料泊松比。上述各因子都仅仅是极角 $\theta$ 的单变量函数(当应力强度因子 $k_1$ ,  $k_2$ 被确定以后)，而与极径 $r$ 无关。

复合型脆断的周向应力因子准则认为：

- (a) 裂缝扩展开始于其端点而沿径向；
- (b) 按周向应力因子取极大值的条件，确定裂缝扩展起始方向 $\theta$ 。

$$\bar{\sigma}_\theta(\theta_0) > 0, \bar{\sigma}'_\theta(\theta_0) = 0, \bar{\sigma}''_\theta(\theta_0) < 0 \quad (2.5)$$

(c) 当外载按比例增加, 应力强度因子 $k_1$ 和 $k_2$ 按比例增加,  $\bar{\sigma}_\theta(\theta_0)$ 增加到其临界值时, 裂缝开始扩展.

根据静力平衡方程 (略去体积力)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0 \quad (2.6)$$

及应力分量具有 $r^{-\frac{1}{2}}$ 的奇异性, 则

$$\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = -\left(-\frac{1}{2} + 2\right) \tau_{r\theta} = -\frac{3}{2} \tau_{r\theta} \quad (2.7)$$

周向应力因子取极值的条件 $\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} = 0$ 等效于 $\tau_{r\theta} = 0$ 的条件. 这与张开型裂缝的一个性质, 即在裂缝扩展方向上无剪切, 是相同的. 如果周向应力因子不取极值 (例如其它准则确定的裂缝扩展起始方向), 则必存在剪应力.

因 $\cos \frac{\theta_0}{2} \neq 0$  (否则 $\theta_0 = \pm \pi$ 对应于裂缝自由表面), 周向应力因子取极值的条件 $\bar{\sigma}'_\theta(\theta_0) = 0$ 等效于方程

$$k_1 \sin \theta_0 + k_2 (3 \cos \theta_0 - 1) = 0 \quad (2.8)$$

也可化为 $p = \tan \frac{\theta_0}{2}$ 的二次方程.

平面应力条件下的周向应变因子

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon}_\theta(\theta) = 4\sqrt{\frac{1}{2r}} \epsilon_\theta = \frac{1}{E} (\bar{\sigma}_r - \nu \bar{\sigma}_t) &= \frac{k_1}{E} \left[ (3-5\nu) \cos \frac{\theta}{2} + (1+\nu) \cos \frac{3}{2}\theta \right] \\ &- \frac{k_2}{E} \left[ (3-5\nu) \sin \frac{\theta}{2} + 3(1+\nu) \sin \frac{3}{2}\theta \right] \end{aligned} \quad (2.9)$$

它仅仅是极角 $\theta$ 的单变量函数 (当应力强度因子 $k_1$ 和 $k_2$ 被确定以后), 而与极径 $r$ 无关. 周向应变因子准则认为:

(a) 裂缝扩展开始于其端点而沿径向;

(b) 按周向应变因子取极大值的条件, 确定裂缝扩展起始方向 $\theta_0$ ;

$$\bar{\tau}_\theta(\theta_0) > 0, \bar{\tau}'_\theta(\theta_0) = 0, \bar{\tau}''_\theta(\theta_0) < 0 \quad (2.10)$$

(c) 当外载按比例增加, 应力强度因子 $k_1$ 和 $k_2$ 成比例增加,  $\bar{\tau}_\theta(\theta_0)$ 增加到其临界值时, 裂缝开始扩展.

因为 $\cos \frac{\theta_0}{2} \neq 0$ , 周向应变因子取极值的条件 $\bar{\tau}'_\theta(\theta_0) = 0$ 等效于 $p = \tan \frac{\theta_0}{2}$ 的三次方程

$$2\nu k_1 p^3 + 2(3+4\nu)k_2 p^2 - (3+\nu)k_1 p - (3+\nu)k_2 = 0 \quad (2.11)$$

为求解平面应变问题, 只需把适用于平面应力条件的方程(2.9)和(2.11)中的拉伸弹性模量 $E$ 和泊松比 $\nu$ , 分别代换以

$$E_1 = E/1-\nu^2, \nu_1 = \nu/1-\nu \quad (2.12)$$

又剪切弹性模量

$$\mu = E/2(1+\nu) = E_1/2(1+\nu_1)$$

在代换过程中保持不变.

应变能密度因子<sup>[6]</sup>

$$\bar{W}(\theta) = r \bar{W} = a_{11}(\theta) k_1^2 + 2a_{12}(\theta) k_1 k_2 + a_{22}(\theta) k_2^2 \quad (2.13)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{系数} \quad a_{11}(\theta) &= \frac{1}{16\mu}(1+\cos\theta)(\lambda-\cos\theta) \\ a_{12}(\theta) &= \frac{1}{16\mu} \cdot \sin\theta(3\cos\theta-\lambda+1) \\ a_{22}(\theta) &= \frac{1}{16\mu} [(\lambda+1)(1-\cos\theta) + (1+\cos\theta)(3\cos\theta-1)] \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

都仅仅是极角 $\theta$ 的单变量函数(当应力强度因子 $k_1$ 和 $k_2$ 被确定以后),而与极径 $r$ 无关.

$$\left. \begin{aligned} \lambda &= (3-\nu)/1+\nu \text{ (平面应力)} \\ \lambda &= 3-4\nu \text{ (平面应变)} \end{aligned} \right\} \quad (2.15)$$

这与方程(2.12)所表明的平面应力与平面应变条件之间的相互关系是一致的. 应变能密度因子准则认为:

- (a) 裂缝扩展开始于其端点而沿径向;
- (b) 按应变能密度因子取极小值的条件, 确定裂缝扩展起始方向 $\theta_0$ ,

$$\bar{W}'(\theta_0) = 0, \quad \bar{W}''(\theta_0) > 0 \quad (2.16)$$

(c) 当外载按比例增加, 应力强度因子 $k_1$ 和 $k_2$ 成比例增加,  $\bar{W}(\theta_0)$ 增加到达其临界值时, 裂缝开始扩展.

应变能密度因子取极值的条件

$$\bar{W}'(\theta_0) = a'_{11}(\theta_0)k_1^2 + 2a'_{12}(\theta_0)k_1k_2 + a'_{22}(\theta_0)k_2^2 = 0 \quad (2.17)$$

可化为  $p = \tan \frac{\theta_0}{2}$  的四次方程.

### 三、物 理 意 义

三个复合型脆断准则分别选取周向应力因子、周向应变因子和应变能密度因子做为参数. 周向应力因子和周向应变因子都是应力强度因子的线性齐次函数, 而应变能密度因子则是 $k_1$ 和 $k_2$ 的二次齐次函数.

为确定裂缝扩展起始方向 $\theta_0$ , 周向应力因子准则要求解一个相当于  $p = \tan \frac{\theta_0}{2}$  的二次方程, 周向应变因子准则的为三次方程, 应变能密度因子准则的为四次方程. 中国科学院北京力学研究所十二室(1976)<sup>[8]</sup>提出的“一个新的复合型断裂准则”, 则为  $p = \tan \frac{\theta_0}{2}$  的六次方程. 随着方程次数的提高, 解算步骤增加复杂性, 可能的不等实根数目也增加, 应一一检视讨论, 从中选取恰当的实根.

通常对周向应力因子准则的责难是, 周向应力因子与材料的泊松比无关(当应力强度因子被确定以后), 与平面问题的平面应力或平面应变条件无关. 但我们看到, 当泊松比 $\nu=0$ , 从关系式(2.12)有

$$E_1 = E, \quad \nu_1 = \nu$$

即平面应力和平面应变条件等效. 又当 $\nu=0$ , 从关系式(2.9)有

$$\bar{\sigma}_\theta = E\bar{\epsilon}_\theta$$

即周向应力因子与周向应变因子之间有一一对应的正比关系, 周向应力因子准则与周向应变

因子准则等效。我们可以说，周向应力因子准则已经指定了材料泊松比数值，它是周向应变因子准则在 $\nu=0$ 的特殊情形。它的物理意义可以从周向应变因子准则的获得。

周向应力因子准则和周向应变因子准则都遵循历史常态，即选择一个参数：当此参数小于其临界值时，裂缝不会扩展；当此参数达到和超过其临界值时，裂缝失稳扩展；裂缝扩展起始方向 $\theta_0$ ，就是该参数在加载过程中最先一个到达其临界值的方向。

但是，应变能密度因子准则违反历史常态，它采用了互相矛盾的两条规定。实际上，如果相对于其它方向取极小值的 $\tilde{W}(\theta_0)$ ，在加载过程中十分接近而尚未达到其临界值时，其它方向上的 $\tilde{W}(\theta)$ 大都早已达到和超过其临界值了。为什么裂缝不首先在这些方向扩展，而必须等到 $\tilde{W}(\theta_0)$ 达到其临界值，然后在 $\theta_0$ 方向扩展呢？既然假定材料均匀和各向同性，又假定应变能密度因子临界值是一个与方向无关的材料常数，那么就应当对各个不同方向一视同仁地采用一致的原则，而不能偏爱 $\theta_0$ 方向。

“裂缝扩展”意味着在材料中形成新的裂缝，即形成新的自由表面。新裂缝两侧质点之间的相对分开位移，一定要超过连续介质力学所许可的相对位移概念（如弹性位移，塑性位移）；否则，这部份材料仍可采用连续性假设，而不能形成新的裂缝和新的自由表面。据此，人们很自然地想到了一个最简单和直观的办法，即以相对分开位移为参数，来建立断裂准则，全面屈服断裂力学的裂端张开位移(COD)准则，就是遵循了这个指导思想；线弹性断裂力学的周向应变因子准则，仍然遵循这个指导思想，所不同的是：前者包围裂端的是塑性变形区，可直接采用裂端张开位移（主要是塑性位移）做为断裂准则的参数；后者采用了线弹性假设，出现了裂端弹性奇异点的困难，即出现了线弹性分析失效的裂端核区（图1）。线弹性断裂力学假定，包围裂端核区的弹性区，能够完全决定核区的力学行为和裂缝扩展行为。张开型应力强度因子准则就是以弹性区应力场强度因子做为参数，来建立裂缝失稳扩展准则的。当然，弹性区应力场强度因子是各个应力分量所共有的因子，也可以把它特殊地解释为沿开裂方向 $\theta_0=0$ 的周向应力因子\*，或者特殊地解释为沿开裂方向 $\theta_0=0$ 的周向应变因子。对于张开型裂缝，无论是周向应力因子准则，或是周向应变因子准则，都跟应力强度因子准则等效。这两个复合型断裂准则都是张开型应力强度因子准则的推广。周向应变因子直接跟弹性分开位移相联系，而这又被假定为，决定了裂端核区分开位移和裂缝扩展行为。再者，化学的和电化学的腐蚀过程主要是在裂端进行的，过程反应速率可认为与裂端核区分开位移有关。这就很容易解释了，为什么应力强度因子，能够成为决定张开型裂缝的应力腐蚀开裂速率和疲劳\*\*裂缝增长速率的参数。我们同样有理由预计，周向应变因子将被用来做为一个参数，以决定复合型裂缝的应力腐蚀开裂速率和疲劳裂缝增长速率。

再从微观方面辅助说明，用相对分开位移做为断裂准则的参数是合理的。按照近代物理学的观点，单晶体是由许多质点（离子、原子或分子）排列而成的空间格子构成的。格子的每一对质点间兼有吸引力和排斥力，两个力都是质点间距 $t$ 的函数；当 $t=t_0$ 时，吸引力和排斥力的数值相等，这就是质点的平衡位置；当 $t<t_0$ 时，排斥力占优势；当 $t>t_0$ 时，吸引力占优势；而当 $t>10t_0$ 时，质点间作用力成为很小。对于晶体来说，如果断裂表面是结晶的，断裂一般服从Sohneck(1869)定律，即当垂直于起作用的解理面的拉应力达到一个临界值时，则断裂发生。我们认为，对于晶体单向拉伸脆性断裂来说，临界拉应力对应着临界外载，也对应着临界弹性拉应变，即临界拉应力定律可解释为临界弹性拉应变定律。

\*  $\bar{\sigma}_0(0)=4k_1$ ，与 $k_1$ 相差一个常数倍数(这里是4倍)。

\*\*疲劳破坏的大多数是腐蚀疲劳，仅发生于绝对真空中的疲劳能称作“纯疲劳”<sup>[12]</sup>。

## 四、张 开 型 裂 缝

对于张开型裂缝,  $k_1 \neq 0$ ,  $k_2 = 0$  代入(2.13), 得应变能密度因子

$$\tilde{W}(\theta) = a_{11}(\theta) k_1^2 \quad (4.1)$$

令 
$$\tilde{W}'(\theta_0) = a_{11}'(\theta_0) k_1^2 = 0 \quad (4.2)$$

得 
$$\theta_0 = 0 \quad \text{或} \quad \pm \cos^{-1}\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)$$

其中  $\theta_0 = 0$  相应于  $\tilde{W}(\theta)$  取极小值, 按  $\tilde{W}$  准则, 这是裂缝扩展方向, 即裂缝沿其自身平面扩展.

这个结论符合于张开型裂缝扩展的普通常识,  $\tilde{W}$  准则不能违反这个常识.  $\theta_0 = \pm \cos^{-1}\left(\frac{\lambda-1}{2}\right)$

相应于  $\tilde{W}(\theta)$  取极大值, 按  $\tilde{W}$  准则, 这不是裂缝扩展的方向.

### 1) 泊松比 $\nu = 0$

这时无无论是平面应力或平面应变, 都有  $\lambda = 3$ . 方程(4.2)的第二组根

$$\theta_0 = \pm \cos^{-1}\left(\frac{\lambda-1}{2}\right) = \pm \cos^{-1}1 = 0$$

即与第一组根相等. 以  $\lambda = 3$  代入方程(4.1)

$$\tilde{W}(\theta) = \frac{k_1^2}{16\mu} (1 + \cos\theta) (3 - \cos\theta) = \frac{k_1^2}{16\mu} [4 - (1 - \cos\theta)^2] \quad (4.3)$$

这个函数在  $\theta_0 = 0$ ,  $\cos\theta_0 = 1$  取极大值

$$\tilde{W}_{\max} = \tilde{W}(0) = k_1^2 / 4\mu$$

按照  $\tilde{W}$  准则,  $\theta_0 = 0$  不是裂缝扩展方向, 即张开型裂缝不沿其自身平面扩展. 这个结论违反了普通常识.

### 2) 泊松比 $\nu = \frac{1}{2}$ 平面应变

在张开型裂缝 ( $\nu = \frac{1}{2}$  平面应变) 的扩展方向  $\theta_0 = 0$  上, 各点元处于静水拉力状态 (略去非奇异项), 体积不变, 线应变为零, 周向应变因子在加载过程中恒为零, 而始终达不到其临界值; 又体积改变能为零, 应变能密度为零, 应变能密度因子在加载过程中恒为零, 而始终达不到其临界值. 复合型脆断的这两个准则遇到了困难.

我们应当把泊松比  $\nu$  接近于  $1/2$  的材料, 排除出脆断准则的适用范围之外 (橡胶  $\nu = 0.47$ , 石蜡  $\nu = 0.5$ ).

## 五、滑 动 型 裂 缝

以  $k_1 = 0$ ,  $k_2 \neq 0$  代入方程(2.11)并考虑方程(2.10), 则周向应变因子准则预计的纯滑动型裂缝扩展起始方向为

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= \mp \cos^{-1}\left(\frac{3+7\nu}{9+9\nu}\right) \quad (\text{平面应力, 当 } k_2 \geq 0) \\ \theta_0 &= \mp \cos^{-1}\left(\frac{3+4\nu}{9}\right) \quad (\text{平面应变, 当 } k_2 \geq 0) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

式中令 $\nu=0$ 得周向应力因子准则预计的纯滑动型裂缝扩展起始方向

$$\theta_0 = \mp \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) = \mp 70.5^\circ \quad (\text{当 } k_2 \geq 0) \quad (5.2)$$

以(5.1)代入(2.9)并考虑到 $k_1=0$ , 得到纯滑动型裂缝在开裂方向的周向应变因子

$$\left. \begin{aligned} \bar{\epsilon}_{\theta, \max} &= \frac{8|k_2|}{9E}(3+\nu)\sqrt{\frac{3+\nu}{1+\nu}} \quad (\text{平面应力}) \\ \bar{\epsilon}_{\theta, \max} &= \frac{8|k_2|}{9E}(1+\nu)(3-2\nu)\sqrt{3-2\nu} \quad (\text{平面应变}) \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

以 $\theta_0=0$ ,  $k_2=0$ 代入(2.9), 得纯张开型裂缝在开裂方向的周向应变因子

$$\left. \begin{aligned} \bar{\epsilon}_{\theta, \max} &= \frac{4k_1}{E}(1-\nu) \quad (\text{平面应力}) \\ \bar{\epsilon}_{\theta, \max} &= \frac{4k_1}{E}(1+\nu)(1-2\nu) \quad (\text{平面应变}) \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

按周向应变因子准则, 方程(5.4)和(5.3)应具有相等的临界值, 则

$$\left. \begin{aligned} k_{2c}/k_{1c} &= \frac{9(1-\nu)}{2(3+\nu)}\sqrt{\frac{1+\nu}{3+\nu}} \quad (\text{平面应力}) \\ k_{2c}/k_{1c} &= \frac{9(1-2\nu)}{2(3-2\nu)\sqrt{3-2\nu}} \quad (\text{平面应变}) \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

对于纯滑动型裂缝  $k_1=0$ ,  $k_2 \neq 0$ , 按应变能密度因子取极小值的条件, 求得裂缝扩展起始方向

$$\left. \begin{aligned} \theta_0 &= \pm \cos^{-1}\left(\frac{1-\nu}{3+3\nu}\right) \quad (\text{平面应力}) \\ \theta_0 &= \pm \cos^{-1}\left(\frac{1-2\nu}{3}\right) \quad (\text{平面应变}) \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

以及相应于上述方向的应变能密度因子

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_{\min} &= \frac{k_2^2}{12\mu} \cdot \frac{(2+2\nu-\nu^2)}{(1+\nu)^2} \quad (\text{平面应力}) \\ \bar{W}_{\min} &= \frac{k_2^2}{12\mu} (2-2\nu-\nu^2) \quad (\text{平面应变}) \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

以 $\theta_0=0$ ,  $k_2=0$ 代入(2.13)和(2.14), 得纯张开型裂缝在开裂方向的应变能密度因子

$$\left. \begin{aligned} \bar{W}_{\min} &= \frac{k_1^2}{4\mu} \left(\frac{1-\nu}{1+\nu}\right) \quad (\text{平面应力}) \\ \bar{W}_{\min} &= \frac{k_1^2}{4\mu} (1-2\nu) \quad (\text{平面应变}) \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

按应变能密度因子准则, 方程(5.8)和(5.7)应具有相等的临界值, 则

$$\left. \begin{aligned} k_{2c}/k_{1c} &= \sqrt{\frac{3(1-\nu)(1+\nu)}{2+2\nu-\nu^2}} \quad (\text{平面应力}) \\ k_{2c}/k_{1c} &= \sqrt{\frac{3(1-\nu)}{2-2\nu-\nu^2}} \quad (\text{平面应变}) \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

滑动型应力场关于裂缝平面为斜对称, 而其应变能密度场则为对称. 按照应变能密度因子取极小值的条件, 求得两个互为对称的方向如式(5.6)所示, 都对应于相同的极小值如式(5.7)所示. 准则本身无法再从这两个互为对称的方向中挑选出开裂方向.

G. C. Sih曾用这个准则研究中心斜裂缝平板单向压缩问题<sup>[6]</sup>

$$k_1 = (-\sigma)\sqrt{a}\sin^2\beta, \quad k_2 = (-\sigma)\sqrt{a}\sin\beta\cos\beta. \quad (5.10)$$

式中 $(-\sigma)$ 是均匀压缩载荷,  $a$ 是中心裂缝半长,  $\beta$ 是载荷作用线与斜裂缝的交角. 以式(5.10)代入方程(2.3a), 得两维静水应力因子

$$\bar{\sigma}_r + \bar{\sigma}_\theta = -8\sigma\sqrt{a}\sin\beta\sin\left(\beta - \frac{\theta}{2}\right) \quad (5.11)$$

从G. C. Sih文计算曲线可见, 当 $\beta$ 足够大(例如 $\beta=90^\circ$ )时, 有 $\beta > \frac{\theta_0}{2}$ , 则在计算的开裂方向上的静水应力为负(静水压力). 由此可见, 这个准则不是以静水应力的正、负号来判定其是否为开裂方向的.

按照周向应变因子准则的概念和条件, 在滑动型裂缝两个互相对称的方向上, 对应于数值相等而符号相反的周向应变因子 $\bar{\epsilon}_\theta$ , 裂缝扩展只可能发生在 $\bar{\epsilon}_\theta > 0$ (拉伸)的情形. 由此可见, 应变能密度因子准则为了确定裂缝扩展起始方向, 有时还必须借助于周向应变因子准则的概念和条件.

以下为确定起见, 假定 $k_2 > 0$ . 方程(5.1)和(5.6)的数值计算结果列于表1. 当 $\nu=0$ , 两个

表1 准则预计的开裂偏角 $(-\theta_0)$

泊 松 比 $\nu$		0	0.1	0.2	0.25	0.3	0.333	0.4
$\bar{W}$ 准则	平面应力	70.5°	74.2°	77.2°	78.5°	79.7°	80.4°	81.8°
	平面应变	70.5°	74.5°	78.5°	80.4°	82.3°	83.6°	86.2°
$\bar{\epsilon}_\theta$ 准则	平面应力	70.5°	68.1°	66°	65°	64.2°	63.7°	62.6°
	平面应变	70.5°	67.9°	65°	63.7°	62.2°	61.2°	59.3°

准则都给出, 相同于周向应力因子准则预计的开裂偏角 $70.5^\circ$ . 随着 $\nu$ 值的增加, 两个准则预计的开裂偏角有着截然相反的变化趋势:  $\bar{W}$ 准则的在增加,  $\bar{\epsilon}_\theta$ 准则的在减少.

F. Erdogan和G. C. Sih(1963)<sup>[4]</sup>为了很好近似均匀、各向同性、线弹性理想脆性和平面应力条件, 选用厚度0.12吋(3MM)的有机玻璃(Plexiglas) (Plexiglas II的商业改型), 做了三组滑动型试验. 第一组试件为中心裂缝平板, 裂缝两侧加上一对数值相等而方向相反的集中的面内剪切载荷; 列出8个试件的16个裂端开裂偏角数据, 我们求得其算术平均值 $69.9^\circ$ 并从其照片上量得约 $70^\circ$ . 第二组试件为纵向裂缝薄管扭转, 我们从其照片上量得约 $70^\circ$ . 第三组试件为中心裂缝平板, 在距离裂缝远处承受分布剪切, 我们从其照片上量得约 $64^\circ$ . 这三组试件数据都不符合应变能密度因子准则在泊松比 $\nu=0.333$ 平面应力条件预计的开裂偏角 $80.4^\circ$ . 我们认为, 这三组试件以第三组最接近滑动型理想条件, 其试验结果约 $64^\circ$ 很好符合周向应变因子准则预计的 $63.7^\circ$ .

M. A. Hussain等(1974)<sup>[9]</sup>在四块6吋 $\times$ 16吋 $\times$ 0.002吋(0.05MM)钢箔中央开一条直径1.3吋的圆弧裂缝, 其半中心角 $\eta=79.6^\circ$ . 则在钢箔单向拉伸时造成纯滑动型裂缝, 其所测得的开裂偏角范围 $(79.6^\circ-6^\circ)\sim(79.6^\circ-3^\circ)$ , 其平均值

$$79.6^\circ - 4.2^\circ = 75.4^\circ$$



为此, 我们首先指出, 该文计算有误. 实际上, 为了造成纯滑动型裂缝, 需要求解方程

$$-3\cos^4(\eta/2) + 10\cos^2(\eta/2) - 5 = 0 \quad (5.12)$$

计算得 $\eta=77^\circ$ 或 $2\eta=154^\circ$ . 该文试验的圆弧裂缝半中心角 $\eta=79.6^\circ$ 或中心角 $2\eta=159.2^\circ$ , 不是纯滑动型而是复合型的, 这时 $k_1 < 0$ ,  $k_2 < 0$ ,  $k_1/k_2=7.45\%$ . 我们还要指出, 该文测量开裂偏角的方法有误. 从其照片上清楚地看出, 裂缝扩展路径曲线是一条反向曲线. 曲线从裂端到拐点间一段表明裂缝稳定扩展, 这是由于材料延性的影响. 我们从其照片上作出稳定扩展曲线段在裂端处的切线(它与拐点以后的曲线段相交), 并量得开裂偏角约 $65^\circ$ (而不是该文的约 $75^\circ$ ). 这很好符合周向应变因子准则在 $\nu=0.29$ (钢)平面应力条件所预计的 $64.4^\circ$ .

方程(5.5)和(5.9)的数值计算结果列于表2. 应变能密度因子准则预计的 $k_{2c}/k_{1c}$ 在很多情形大于一. 对于中心裂缝无限板: 周边均匀剪切 $\tau$ (平行和垂直于中心裂缝),  $k_2=\tau\sqrt{a}$ ( $a$ 是中心裂缝半长); 周边均匀正拉伸(垂直于中心裂缝) $\sigma$ ,  $k_1=\sigma\sqrt{a}$ , 则

$$\tau_c/\sigma_c = k_{2c}/k_{1c} > 1, \tau_c > \sigma_c$$

即剪切应力临界值超过拉伸应力临界值. 对于均匀各向同性材料, 这个推论恐怕很难被工程技术界所接受.

表2 准则预计的  $k_{2c}/k_{1c}$

泊松比 $\nu$		0	0.1	0.2	0.25	0.29	0.3	0.333	0.4
$\bar{W}$ 准则	平面应力	1.22	1.16	1.10	1.07	1.05	1.04	1.02	0.978
	平面应变	1.22	1.16	1.07	1.02	0.972	0.957	0.905	0.760
$\tau_0$ 准则	平面应力	0.866	0.786	0.691	0.643	0.610	0.600	0.569	0.511
	平面应变	0.866	0.768	0.644	0.568	0.503	0.485	0.421	0.276

周向应变因子准则在平面应力条件下预计的 $k_{2c}/k_{1c}$ 值: 当 $\nu=0$ 时(周向应力因子准则),  $k_{2c}/k_{1c}=0.866$ ; 当常用结构材料 $\nu=0.25\sim 0.3$ 时,  $k_{2c}/k_{1c}=0.600\sim 0.643$ , 这很好接近于应变能释放率准则预计的 $k_{2c}/k_{1c}=0.63^{[9]}$ .

航空用钢 $\nu=0.29$ , 其抗剪强度与抗拉强度之比 $\tau_b/\sigma_b=0.6\sim 0.7$ (随着钢材抗拉强度的提高,  $\tau_b/\sigma_b$ 接近下限). 航空铝合金 $\nu=0.26\sim 0.33$ ,  $\tau_b/\sigma_b=0.6\sim 0.65$ . 航空镁合金 $\nu=0.25\sim 0.3$ ,  $\tau_b/\sigma_b=0.5\sim 0.6$ . 周向应变因子准则预计的 $k_{2c}/k_{1c}$ 值很好接近于航空合金的 $\tau_b/\sigma_b$ 值.

G. C. Sih(1977)<sup>[7]</sup>把应变能密度因子准则预计的当 $\nu=0.333$ ,  $k_{2c}/k_{1c}=0.905$ , 跟F. Erdogan和G. C. Sih(1963)<sup>[4]</sup>在有机玻璃平板上的实验平均值 $k_{2c}/k_{1c}=0.915$ 相比较, 做为这个准则满意地符合实验结果的强有力证据. 为此, 我们提出下列讨论意见:

(第一)  $\nu=0.333$ ,  $k_{2c}/k_{1c}=0.905$ 是这个准则在平面应变条件下的计算结果. F. Erdogan和G. C. Sih(1963)已明确指出, 他们的实验是在平面应力条件下进行的. 这个准则在 $\nu=0.333$ 平面应力(与实验相同)条件下预计的 $k_{2c}/k_{1c}=1.02 > 1$ .

(第二) 该文<sup>[4]</sup>列举了9个试件 $k_{2c}$ 实验值384~465, 我们求得算术平均值422磅吋<sup>-3/2</sup>. 该文给出4个 $k_{1c}$ 的平均值472, 我们从其附图上量得4个 $k_{1c}$ 值范围439~521磅吋<sup>-3/2</sup>. 两个平均值之比 $k_{2c}/k_{1c}=422/472=0.890$ .

9个 $k_{2c}$ 值和4个 $k_{1c}$ 值组成数学上可能的 $9 \times 4 = 36$ 个比值; 其最大者 $k_{2c}/k_{1c}=465/439=1.06 > 1$ ;

其最小者 $k_{2c}/k_{1c}=384/521=0.737$ .

\*本文所用应力强度因子记号 $k_1, k_2$ 一律用小写字母, 不用大写字母, 两种记法相差 $\sqrt{a}$ 倍.

如果我们在这些数学上可能的36个比值中, 抛弃那些在工程技术上难以置信的  $k_{2c}/k_{1c} \geq 1$  或  $k_{2c}/k_{1c} = 1$  者, 然后求得的平均值一定会比原有平均值0.890大为减少, 而向0.737一方靠近.

(第三) 该文<sup>[4]</sup>也作了中心裂缝平板9吋×18吋斜拉伸实验, 其结果表现为  $(k_1, k_2)$  图上的实验点. 我们看到,  $k_1$ 轴上4个实验点(纯张开型  $k_{1c}$ ) 分布与斜拉伸实验点趋势明显不符. 4个实验点平均值  $k_{1c} = 472$ , 而斜拉伸  $\beta = 80^\circ$  的4个实验点平均位置点, 其横坐标  $k_1 = 533 > 472$ , 其纵坐标  $k_2 = 100$  磅吋<sup>-3/2</sup>. 这显然不合理. 如果我们把纯张开型  $k_{1c}$  值仅仅从472提高到533磅吋<sup>-3/2</sup>, 就会使  $k_{2c}/k_{1c}$  减少为原有值的

$$472/533 = 88.4\%;$$

而原有数学上可能的36个比值的最小者0.737减少为  $0.737 \times 88.4\% = 0.652$ .

(第四) 该文<sup>[4]</sup>列举的9个试件  $k_{2c}$  实验值都属于第一组滑动型实验的, 其开裂偏角约  $70^\circ$ , 我们认为第三组最接近滑动型理想条件, 其开裂偏角约  $64^\circ$ . 按周向应变因子准则,  $-63.7^\circ$  是周向应变因子取极大值的方向, 其临界应力(相对于其它方向开裂)为极小. 因此我们预计第三组滑动型实验测得的  $k_{2c}$  值稍低于第一组实验的. 另外, 应变能密度因子准则预计的开裂方向  $-80.4^\circ$ , 应该拿试件开裂方向  $-80.4^\circ$  的实验数据  $k_{2c}$  来验证这个准则的合理性.

(第五) 精确测量有机玻璃(Plexiglas)的泊松比是必要的. 如将  $\nu = 0.333$  减少为0.3, 则周向应变因子准则预计的  $k_{2c}/k_{1c}$  值提高为0.600, 而应变能密度因子准则预计的  $k_{2c}/k_{1c}$  值提高为1.04.

## 六、斜 拉 伸

我们对表3列出的斜拉伸开裂偏角数值, 提出以下讨论意见:

(第一) F. Erdogan和G. C. Sih(1963)<sup>[4]</sup>已明确指出, 有机玻璃(Plexiglas)试件厚度

表3 斜拉伸的开裂偏角( $-\theta_0$ )

偏 角 $\beta$	$0^\circ$	$20^\circ$	$30^\circ$	$40^\circ$	$50^\circ$	$60^\circ$	$70^\circ$	$80^\circ$
实验平均值 <sup>[4]</sup> , 平面应力	$64^\circ$		$62.4^\circ$	$55.6^\circ$	$51.6^\circ$	$43.1^\circ$	$30.7^\circ$	$17.3^\circ$
$\bar{W}$ 准则 $\nu = \frac{1}{3}$ , 平面应变 <sup>[6]</sup>	$83.6^\circ$		$63.5^\circ$	$56.7^\circ$	$49.5^\circ$	$41.5^\circ$	$31.8^\circ$	$18.5^\circ$
$\bar{\sigma}_\theta$ 准则 $\nu = 0$ (即 $\bar{\sigma}_\theta$ 准则)	$70.5^\circ$		$60.2^\circ$	$55.7^\circ$	$50.2^\circ$	$43.2^\circ$	$33.2^\circ$	$18.9^\circ$
$\bar{\epsilon}_\theta$ 准则 $\nu = \frac{1}{3}$ , 平面应力	$63.7^\circ$	$58.4^\circ$	$55.3^\circ$	$51.8^\circ$	$47.3^\circ$	$41.2^\circ$	$32.6^\circ$	$18.7^\circ$

0.120吋(3MM)为平面应力条件. G. C. Sih(1974)<sup>[6]</sup>在引用该文时把试件厚度说成是  $3''/16$  (4.76MM), 并按平面应变条件计算. 我们认为, 平面应变条件的计算值与平面应力条件的

实验值相比较, 说明不了什么问题. 按方程(2.12)的换算关系:  $\nu = \frac{1}{3}$  平面应变条件的开

裂偏角值完全等同于  $\nu = 1/2$  平面应力条件的;  $\nu = \frac{1}{3}$  平面应力条件的开裂偏角计算值完全等

同于  $\nu = \frac{1}{4} = 0.25$  平面应变条件的. 后者可从G. C. Sih文<sup>[6]</sup>平面应变计算曲线  $\nu = 0.2$  和

$\nu = 0.3$  之间用插入法量得. 应变能密度因子准则在  $\nu = \frac{1}{3}$  平面应力条件斜拉伸的开裂

偏角计算值与实验值的偏差,并不比周向应变因子准则的为小.

(第二)精确测定(Plexiglas)有机玻璃的泊松比是必要的.如将 $\nu = \frac{1}{3} = 0.333$ 减少为 $\nu = 0.3$ ,则使应变能密度因子准则预计的开裂偏角值减少,而周向应变因子准则预计的则增加.这样,前者与实验值的偏差超过了后者的.

(第三)中心斜裂缝远处均匀拉伸

$$k_1 = \sigma \sqrt{a} \sin^2 \beta, \quad k_2 = \sigma \sqrt{a} \sin \beta \cos \beta \quad (6.1)$$

当 $\beta \rightarrow 0$ ,  $k_1/k_2 = \tan \beta \rightarrow 0$

其极限情形为纯滑动型.我们把文[4]第三组滑动型试件照片开裂偏角 $64^\circ$ 做为实验值填入表3内.应变能密度因子准则严重偏离这个实验结果,而周向应变因子准则很好符合.

(第四)F. Erdogan和G. C. Sih(1963)<sup>[4]</sup>也测量了 $\beta = 20^\circ$ 斜拉伸不少于6个试件的实验结果(图2和图3).G. C. Sih(1974)<sup>[6]</sup>没有发表这6个试件12个开裂偏角实验值.我们没有看到开裂偏角全部测量结果分布的总趋势.

I. Finnie等(1974)<sup>[10]</sup>提供了交叉轧制铝箔的实验结果.试件5吋 $\times$ 9吋 $\times$ 0.004吋(0.1MM),中心斜裂缝2吋 $\times$ 0.005吋,偏角 $\beta = 45^\circ$ ,最后断裂时的应变仪读数表明,该材料在箔平面内的泊松比基本上为零 $\nu = 0$ ,开裂偏角( $-\theta_0$ )的测量值 $50^\circ$ ,  $50^\circ$ 和 $52^\circ (\pm 1^\circ)$ .这严重偏离应变能密度因子准则当 $\nu = 0$ 所预计的 $34.5^\circ$ ,相当好地符合周向应变因子准则当 $\nu = 0$ (即周向应力因子准则)所预计的 $53^\circ$ .如果考虑到泊松比不严格为零 $\nu \neq 0$ ,则按周向应变因子准则预计的开裂偏角值要比 $53^\circ$ 还要稍微小一些.这样就更好地符合实验结果了.

A. A. Griffith(1920, 1924)和G. R. Irwin(1957)都研究了线弹性断裂力学张开型裂缝的平面应力情形. A. A. Griffith假定,平面应力和平面应变条件下的裂缝扩展力临界值相等,都等于材料常数即材料表面张力 $T$ 的两倍.这样求出临界应力<sup>[3]</sup>

$$\sigma_c = \sqrt{E(2T)/\pi a} \quad (\text{平面应力, 薄板})$$

$$\sigma_c = \sqrt{E(2T)/\pi a(1-\nu^2)} \quad (\text{平面应变, 厚板})$$

式中 $a$ 是承受均匀正拉伸无限板的中心裂缝半长.因为 $0 \leq \nu \leq \frac{1}{2}$ ,  $1 \leq \sqrt{1/(1-\nu^2)} \leq \sqrt{\frac{4}{3}} =$

1.15,平面应力条件下的临界应力小于平面应变的.即张开型平面应力断裂发生在平面应变断裂之先.

A. A. Griffith(1920)<sup>[11]</sup>用较硬的英国无机玻璃薄球瓶和薄圆管开裂试件进行充压爆破试验,以验证其张开型脆断准则,其中球瓶厚度约0.01吋(0.25MM)和圆管厚度约0.02吋(0.5MM),以近似实现平面应力条件. F. Erdogan和G. C. Sih(1963)用有机玻璃(Plexiglas)平板和薄圆管开裂试件,以验证其复合型脆断的周向应力因子准则,所用试件厚度约0.120吋(3MM),以近似实现平面应力条件.我们相信,复合型脆断也如同张开型脆断一样,即平面应力断裂发生在平面应变断裂之先.如果有机玻璃试件再比3MM稍厚些,则在加载过程中,接近两自由表面处(平面应力)首先断裂,这就会促进整体断裂;即仍可按平面应力处理. G. C. Sih(1974)<sup>[11]</sup>说了这样的经验事实:“PMMA\*是一个验证裂缝扩展两维理论的更为适合的材料,它较少敏感于板厚改变”.我们对此作以上理解.

按照Griffith-Orowan-Irwin能量准则,在Griffith能量准则中,除考虑表面功以外,还

\*聚甲基丙烯酸甲酯,即有机玻璃.

必须考虑塑性变形功；并且，对于较为延性的材料，表面功与塑性功相比较，一般是不重要的，因而可以略去。平面应力条件下的塑性逸散率还与开裂试件几何性质有关，它一般大于平面应变条件的。平面应力断裂一般发生在平面应变断裂之后，这个性质不同于脆性断裂的。

对于较为延性的材料，张开型平面应变断裂可按线弹性断裂力学处理。实际上，在张开型的开裂方向 $\theta_0=0$ 上，两个主应力因子 $\bar{\sigma}_1=\bar{\sigma}_2=4k_1$ 。

(1) 平面应力： $\bar{\sigma}_z=0$ ， $\bar{\tau}_{\max}=2k_1$ ；(2) 平面应变： $\bar{\sigma}_z=4k_1 \cdot 2\nu$ ， $\bar{\tau}_{\max}=2k_1(1-2\nu)$ ，它仅为平面应力情形的 $(1-2\nu) \times 100\%$ 。当泊松比 $\nu=0.3$ ，它仅为平面应力情形的40%。根据H. Tresca理论，这就大大减缓塑性变形的产生和发展。

滑动型平面应变的开裂方向，当 $\nu=0.3$ ， $\theta_0=-62.2^\circ$ （表1，周向应变因子准则）。在此方向上的两维主应力因子 $\bar{\sigma}_1=4.64k_2$ ， $\bar{\sigma}_2=-0.50k_2$ 。试件厚度方向的主应力因子

$$\bar{\sigma}_z=\nu(\bar{\sigma}_1+\bar{\sigma}_2)=1.24k_2$$

它不影响 $\bar{\tau}_{\max}$ 的计算。最大剪应力因子

$$\bar{\tau}_{\max}=(\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2)/2=2.57k_2$$

考虑到平面应变 $\nu=0.3$ 时， $k_{2c}/k_{1c}=0.485$ （表2），把滑动型平面应变断裂的最大剪应力因子与张开型的比较

$$2.57k_{2c}/0.8k_{1c}=1.56>1$$

根据H. Tresca理论，材料延性对滑动型平面应变断裂的影响，要比对张开型平面应变的大得多。材料延性使得在平面应变条件下的 $k_{2c}/k_{1c}$ 值提高，即高于复合型脆断的周向应变因子准则的预计值（表2）。

仍以 $\nu=0.3$ 为例，考虑滑动型平面应力断裂。按周向应变因子准则，开裂方向 $\theta_0=-64.2^\circ$ （表1），在此方向上的两维主应力因子 $\bar{\sigma}_1=4.63k_2$ ， $\bar{\sigma}_2=-0.37k_2$ ，厚度方向主应力因子 $\bar{\sigma}_z=0$ 不影响 $\bar{\tau}_{\max}$ 的计算，最大剪应力因子

$$\bar{\tau}_{\max}=(\bar{\sigma}_1-\bar{\sigma}_2)/2=2.50k_2$$

它与张开型平面应力断裂 $\bar{\tau}_{\max}=2k_1$ 相比，要小25%（考虑到 $k_{2c}/k_{1c}=0.600$ ）。它与滑动型平面应变断裂 $\bar{\tau}_{\max}=2.57k_2$ 相比，要小2.7%。材料延性对滑动型平面应变断裂的影响，不比对滑动型平面应力的为小。这样，对于较为延性的材料，复合型平面应变断裂，一般不服从线弹性断裂力学理论，而要具体分析材料延性的影响。

对于中心斜裂缝平板单向拉伸平面应力问题，周向应变因子准则计算出，最弱裂缝不是正裂缝（ $\beta=90^\circ$ ），而是斜裂缝 $\beta=60^\circ$ ；当 $\nu=0.25$ ，最小临界载荷（ $\beta=60^\circ$ ）要比正裂缝临界载荷小8%；当 $\nu=0.333$ ，则小11%。复合型断裂的应变能释放率准则也同样预计出，最弱裂缝不是正裂缝而是斜裂缝 $\beta=60^\circ$ 。这完全出乎意料，很需进一步实验证实。J. G. Williams和P. D. Ewing(1972)的实验结果<sup>[13]</sup>，表明了这样的趋势<sup>[9]</sup>。

F. Erdogan和G. C. Sih(1963)<sup>[4]</sup>曾把其斜拉伸实验结果表示在 $(k_1, k_2)$ 平面上。我们现在把这些实验结果跟应变能密度因子准则平面应力（与实验条件相同）计算曲线加以比较（图2）。由于G. C. Sih在讨论斜拉伸开裂偏角<sup>[6]</sup>和 $k_{2c}/k_{1c}$ 比值<sup>[7]</sup>时都按平面应变，图2中一并作出平面应变计算曲线。从图2可见，应变能密度因子准则平面应力计算曲线在大 $\beta$ 角时过于保守，而在小 $\beta$ 角时又过于冒险，它得到 $k_{2c}/k_{1c}=1.02>1$ 的结论。如果保持泊松比 $\nu=0.333$ ，而把平面应力条件换成平面应变条件，这相当于保持平面应力条件而把泊松比 $\nu$ 值从0.333提高为0.5（石蜡）；这样使得曲线稍向内侧收缩，情况似乎稍微改善一些。由于4个 $k_{1c}$ 实验点分布显然和斜拉伸的不协调，因而有理由怀疑 $k_{1c}$ 值偏低。如果我们把 $k_{1c}$ 值提高，

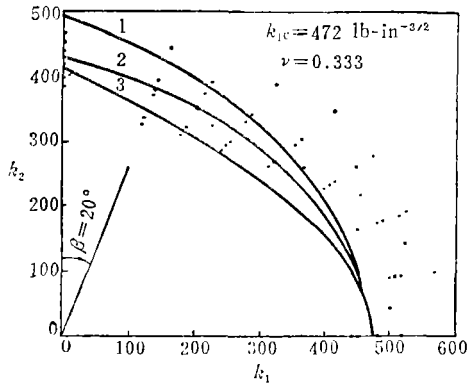


图2 应变能密度因子准则(曲线1—平面应力, 2—平面应变)和周向应力因子准则(曲线3)。

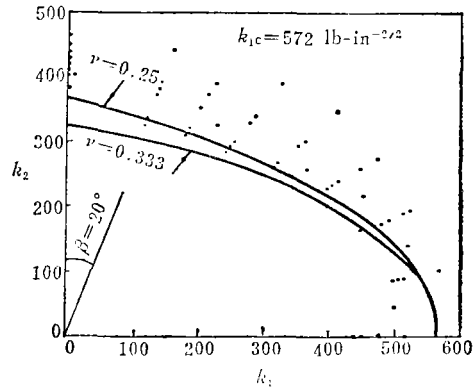


图3 周向应变因子准则(平面应力)。

或是把泊松比 $\nu$ 值从0.333降至0.3, 都会使计算曲线向外膨胀, 致使绝大多数实验点落在曲线内侧; 这对于工程结构抗断裂设计是不安全的。

再把周向应变因子准则和实验结果比较(图3)。无论是这个准则预计的 $k_{2c}/k_{1c}$ 比值, 或是在 $(k_1, k_2)$ 平面上计算曲线的形状, 都很好接近于应变能释放率准则的<sup>[9]</sup>。我们把 $k_{1c}$ 值从472增至572磅吋 $^{-3/2}$ , 这样, 绝大多数实验点都落在或刚刚落在计算曲线的外侧。这对于工程结构抗断裂设计是安全的。

材料延性使得裂缝尖端钝化、塑性区应力松弛、弹性区应力重分布, 并使断裂功提高。如果不计材料延性影响而按脆断准则设计, 则一般偏向安全。

航空和航天结构高强度合金往往敏感于环境介质。例如许多高强度铝合金, 在特定条件下, 由于应力腐蚀开裂, 能在远低于其屈服强度的应力水平下发生破坏。这样, 应用线弹性断裂力学的原理就是适宜的, 而并非保守的了。

## 七、结 论

本文详细讨论了复合型脆断准则, 周向应变因子准则是合理的和安全的。

和张开型平面应变断裂不同, 较为延性材料(金属)复合型平面应变断裂, 一般不服从线弹性断裂力学理论。

E. Orowan (1949)<sup>[3]</sup>早就指出: “断裂不是一个单一的物理现象。…过去存在并且仍旧存在于强度的物理理论中的大多数混乱, 是由于没有充分注意这个情况”。复合型脆断的周向应变因子准则是脆断(这样一个特定的断裂物理现象)的宏观(固体力学)理论。我们不可能奢望它能解释各式各样的复杂的断裂物理现象。

历史上有开了张开型断裂的应力强度因子准则以后, 应力强度因子被成功地用来做为一个参数, 以确定张开型裂缝的应力腐蚀开裂速率和疲劳裂缝增长速率。我们同样有理由预计: 在有了复合型断裂的周向应变因子准则以后, 周向应变因子将被用来做为一个参数, 以确定复合型裂缝的应力腐蚀开裂速率和疲劳裂缝增长速率。

## 参 考 文 献

1. Griffith, A. A. The phenomena of rupture and flow in solids, *Phil. Trans. Roy. Soc. (London)*, **A221**, (1921), 163—198, (1920年2月26日宣读, 1920年10月21日发表).
2. Irwin, G. R., Analysis of stresses and strains near the end of a crack traversing plate, *Trans. ASME, J. Appl. Mech.*, **24**, (1957), 361—364.
3. Orowan, E. Fracture and strength of solids, *Reports on Progress in Physics, Phy. Soc. (London)*, **12**, (1949), 185—232.
4. Erdogan, F. and Sih, G. C., On the Crack extension in plates under plane loading and transverse shear, *Trans. ASME, J. Bas. Eng.*, **85**, (1963), 519—527.
5. Sih, G. C. and Macdonald, B., What the designer must know about fracture mechanics, Lehigh University Report IFSM72-23, Nov. (1972).
6. Sih, G. C., Strain-energy-density factor applied to mixed mode crack problems, *Intern. J. Fracture*, **10**, (1974), 305—321.
7. Sih, G. C., Introductory Chapter: Strain energy density theory applied to plate bending problems, *Mechanics of Fracture*, **II**, Leyden (1977), 17—48.
8. 中国科学院北京力学研究所十二室, 一个新的复合型断裂准则, *力学* (1976), 98—103.
9. Hussain, M. A., Pu, S. L. and Underwood, J., Strain energy release rate for a crack under combined mode I and mode II, *Fracture Analysis*, ASTM STP560, (1974), 2—28.
10. Finnie, I. and Weiss H. D., Some observations on Sih's strain energy density approach for fracture prediction, *Intern. J. Fracture*, **10**, (1974), 136—138.
11. Sih, G. C., Discussion on [10], *Intern. J. Fracture*, **10** (1974), 279—283.
12. Duquette, D. J., A review of aqueous corrosion fatigue, *Corrosion Fatigue*, NACE-2, (1971), 12—24.
13. Williams, J. G. and Ewing, P. D., Fracture under complex stress—The angled crack problems, *Intern. J. Fract. Mech.*, **8**, (1972), 441—446.

## On the Circumferential Strain Factor Criterion of Mixed Mode Brittle Fracture

Fan Wei-xun

(Nanjing Aeronautical Institute, Nanjing)

### Abstract

In this paper, the criteria of mixed mode brittle fracture are carefully examined. It has been shown that, the circumferential strain factor criterion is rational and safe.

With the exception of the opening mode plane strain fracture, the mixed mode plane strain fracture of comparatively ductile materials (metals), in general, does not obey the theory of linear elastic fracture mechanics.

Like the stress intensity factor playing an important role in pure opening mode crack problems, we believe that, in mixed mode crack problems, the circumferential strain factor shall become a parameter to determine the rate of fatigue crack propagation per cycle, and of stress corrosion cracking per unit time.