

两种叠合流体间界面波的非线性调制*

邹启芬

(广州中山大学力学系, 1981年8月22日收到)

摘 要

本文用多重尺度法研究等深度及固定壁面的两种叠合流体间界面上的重力-表面张力波的缓慢调制, 推出第一阶的调制波的演化由非线性 Schrödinger 方程所描述, 然后讨论了所谓的“Stokes 波”的稳定性.

一、引 言

近年来一些作者对水波的非线性调制问题进行了研究, 并得到了一些有意义的结果. 在用多重尺度法方面, 较早及较典型的工作是由日本的 H. Hasimoto 和 H. Ono(1972)所进行的. 他们研究了二维等深度重力水波, 并证明了第一阶扰动是由非线性 Schrödinger 方程所决定, 同时对此方程找到一个称为 Stokes 波的解, 它的稳定性可以很容易地加以讨论. 后来 Davey 和 Stewartson(1974)推广了他们的结果到三维的情形. 而 Djordjevic 和 Redekopp(1977)则研究了三维的重力-表面张力波, 他们证明了调制波的演化由两个偏微分方程所描述: 一个带有强迫项的非线性 Schrödinger 方程和一个线性方程.

本文研究两种叠合流体间界面的重力-表面张力波, 努力推广 Hasimoto 和 Ono 的结果至本情形, 并且还揭示了存在着两个单独的共鸣现象, 它们已被 Djordjevic 等所注意到. 最后, 较详细地讨论了 Stokes 波串的稳定性问题.

二、问题的提法

我们考虑两种叠合流体的界面的运动, 并设它们不可溶混, 在二维情形, 界面方程可表达为:

$$y = \zeta(x, t)$$

假设界面的平衡位置在平面 $y=0$ 上 (如图 1), 两种流体的密度分别为 ρ_1 、 ρ_2 , 深度为 h_1 、 h_2 , 压力为 $p^{(1)}(x, y, t)$ 、 $p^{(2)}(x, y, t)$. 假如两种流体为理想不可压的, 且运动是无旋的, 在重力作用下, 则在两个区域内存在速度势 $\Phi^{(1)}(x, y, t)$ 、 $\Phi^{(2)}(x, y, t)$, 且它们满足 Laplace 方程:

$$\nabla^2 \Phi^{(l)}(x, y, t) = 0, \quad l=1, 2; \quad (2.1)$$

* 李家春推荐.

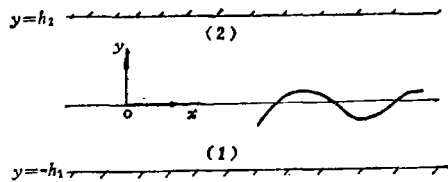


图1 所考虑的问题.

在固壁处满足条件:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial y} \Big|_{y=-h_1} &= 0 \\ \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial y} \Big|_{y=h_2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

在两个区域内 (包括界面上) Bernoulli 方程成立:

$$p^{(l)} = -\rho_l \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial t} - \frac{\rho_l}{2} (\nabla \Phi^{(l)})^2 - g\rho_l y, \quad l=1, 2; \quad (2.3)$$

在两种流体间界面上满足运动学条件:

$$\frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial y} - \frac{\partial \zeta}{\partial t} - \frac{\partial \Phi^{(l)}}{\partial x} \frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0, \quad \text{在 } y=\zeta(x, t) \text{ 上}, \quad l=1, 2; \quad (2.4)$$

以及动力学条件:

$$p^{(1)} - p^{(2)} = T \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) = -T \frac{\zeta_{xx}}{(1+\zeta_x^2)^{3/2}}, \quad \text{在 } y=\zeta(x, t) \text{ 上};$$

或

$$\left[\rho_2 \frac{\partial \Phi^{(2)}}{\partial t} + \frac{\rho_2}{2} (\nabla \Phi^{(2)})^2 + g\rho_2 \zeta \right] - \left[\rho_1 \frac{\partial \Phi^{(1)}}{\partial t} + \frac{\rho_1}{2} (\nabla \Phi^{(1)})^2 + g\rho_1 \zeta \right] = -\frac{T \zeta_{xx}}{(1+\zeta_x^2)^{3/2}} \quad \text{在 } y=\zeta(x, t) \text{ 上}; \quad (2.5)$$

其中 T 为表面张力系数, $\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ 为 Gauss 曲率, 对二维情况, 表达式如上所述.

三、线性理论结果

当界面的振幅很小时, 通过方程、边界条件的线性化, 可证明存在如下形式的界面波:

$$y = \zeta(x, t) = \eta e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.1)$$

其中波幅 η 为小量. 相应的速度势为:

$$\Phi^{(1)}(x, y, t) = -\frac{i\omega\eta \cosh k(y+h_1)}{k \sinh kh_1} e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.2)$$

$$\Phi^{(2)}(x, y, t) = \frac{i\omega\eta \cosh k(y-h_2)}{k \sinh kh_2} e^{i(kx - \omega t)} \quad (3.3)$$

色散关系为:

$$\omega^2 = \frac{[g(\rho_1 - \rho_2) + Tk^2]k}{\frac{\rho_1}{\sigma_1} + \frac{\rho_2}{\sigma_2}}, \quad \sigma_l = \tanh kh_l, \quad l=1, 2 \quad (3.4)$$

由此可得 Rayleigh-Taylor 稳定性: 在 $\rho_1 < \rho_2$, 即下部流体比上部流体轻时, 当 $k > k_c = \left[\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{T} \right]^{1/2}$ 时, 运动是稳定的, $k < k_c$ 时则不稳定, k_c 称为临界波数. 而当 $\rho_1 > \rho_2$ 时,

这种波总是稳定的.

四、非线性调制

首先, 我们将在 $y=\zeta(x, t)$ 上所满足的界面条件(2.4)、(2.5)通过展开为 ζ 的幂级数而使它在 $y=0$ 上满足.

其次, 我们将 $\Phi^{(1)}$ 和 ζ 展开成如下形状的渐近级数:

$$\Phi^{(1)}(x, y, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Phi^{(n)}, \quad \Phi^{(n)} = \sum_{m=-n}^n \Phi^{(n,m)}(\xi, y, \tau) Z^m \quad l=1, 2 \quad (4.1)$$

$$\zeta(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \zeta^{(n)}, \quad \zeta^{(n)} = \sum_{m=-n}^n \zeta^{(n,m)}(\xi, \tau) Z^m \quad (4.2)$$

其中 $\xi = \varepsilon(x - Vt)$, $\tau = \varepsilon^2 t$

$$Z = \exp\{i(kx - \omega t)\}$$

$$\Phi^{(1)}(n, -m) = \overline{\Phi^{(1)}(n, m)}, \quad \zeta^{(n, -m)} = \overline{\zeta^{(n, m)}}$$

上面一横线表共轭, 因为 $\Phi^{(1)}$ 、 ζ 均为实函数. 注意到与线性情况时解(3.1)–(3.3)的形式相比, 由于非线性相互作用, 出现了 Z 的高次项(高次谐波项)及 Z 的零次项(非波动项).

然后, 将上述的级数展式代入到方程(2.1)及固壁条件(2.2)以及对 ζ 展开了的界面条件(2.4)、(2.5)中去, 并令这些等式两端的 ε 同次幂及 Z 的同次幂的系数相等, 就得到一系列的方程及在固壁处以及 $y=0$ 处满足的条件:

$$\Phi_{yy}^{(1)(n,m)} - m^2 k^2 \Phi^{(1)(n,m)} = -2imk \Phi_{\xi}^{(1)(n-1,m)} - \Phi_{\xi\xi}^{(1)(n-2,m)} \quad l=1, 2 \quad (4.3)$$

$$\Phi_y^{(1)(n,m)} \Big|_{y=-h_1} = 0, \quad \Phi_y^{(2)(n,m)} \Big|_{y=h_2} = 0 \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \Phi_y^{(1)(n,m)} + im\omega \zeta^{(n,m)} = & -V \zeta_{\xi}^{(n-1,m)} + \zeta_{\tau}^{(n-2,m)} - \langle \zeta^{(n',m')} \Phi_{yy}^{(1)(n'',m'')} \rangle_{n,m} \\ & - \frac{1}{2} \langle \zeta^{(n',m')} \zeta^{(n'',m'')} \Phi_{yyy}^{(1)(n''',m''')} \rangle_{n,m} - k^2 \langle m' m'' \zeta^{(n',m')} \Phi^{(1)(n''',m''')} \rangle_{n,m} \\ & + ik \langle m' \zeta^{(n',m')} \Phi_{\xi}^{(1)(n'',m'')} \rangle_{n-1,m} + ik \langle m'' \zeta^{(n',m')} \Phi^{(1)(n'',m'')} \rangle_{n-1,m} \\ & - k^2 \langle m'' m''' \zeta^{(n',m')} \zeta^{(n'',m'')} \Phi_y^{(1)(n''',m''')} \rangle_{n,m}, \quad l=1, 2 \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \{g\rho_2 \zeta^{(n,m)} - im\omega \rho_2 \Phi^{(2)(n,m)} - \rho_2 V \Phi_{\xi}^{(2)(n-1,m)} + \rho_2 \Phi_{\tau}^{(2)(n-2,m)} \\ - i\omega \rho_2 \langle m'' \zeta^{(n',m')} \Phi_y^{(2)(n'',m'')} \rangle_{n,m} - \rho_2 V \langle \zeta^{(n',m')} \Phi_{\xi y}^{(2)(n'',m'')} \rangle_{n-1,m} \\ - \frac{i}{2} \rho_2 \omega \langle m'' \zeta^{(n',m')} \zeta^{(n'',m'')} \Phi_{yy}^{(2)(n''',m''')} \rangle_{n,m} \\ - \frac{1}{2} \rho_2 k^2 \langle m' m'' \Phi^{(2)(n',m')} \Phi^{(2)(n'',m'')} \rangle_{n,m} + i\rho_2 k \langle m' \Phi^{(2)(n',m')} \Phi_{\xi}^{(2)(n'',m'')} \rangle_{n-1,m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} \rho_2 \langle \overset{(2)}{\Phi}_y(n', m') \overset{(2)}{\Phi}_y(n'', m'') \rangle_{n, m} - \rho_2 k^2 \langle m'' m' \xi(n', m') \overset{(2)}{\Phi}(n'', m'') \overset{(2)}{\Phi}_y(n''', m''') \rangle_{n, m} \\
& + \rho_2 \langle \xi(n', m') \overset{(2)}{\Phi}_y(n'', m'') \overset{(2)}{\Phi}_{yy}(n''', m''') \rangle_{n, m} - \{1\} = m^2 k^2 T \xi(n, m) \\
& - 2i T m k \xi_{\xi}^{(n-1, m)} - T \xi_{\xi \xi}^{(n-2, m)} + \frac{3}{2} k^4 T \langle m'^2 m'' m''' \xi(n', m') \xi(n'', m'') \xi(n''', m''') \rangle_{n, m} \quad (4.6)
\end{aligned}$$

其中 $\{1\}$ 表示前面 $\langle \rangle_{n, m}$ 中各项将带下标2和顶标(2)的各量换为带下标1及顶标(1)的量. 而记号 $\langle \rangle_{n, m}$ 表示括弧中使 $n' + n'' = n$, $m' + m'' = m$ 或使 $n' + n'' + n''' = n$, $m' + m'' + m''' = m$ 的所有各项之和. 例如

$$\langle \xi(n', m') \overset{(2)}{\Phi}_{\xi y}(n'', m'') \rangle_{2, 1} = \xi^{(1, 0)} \overset{(2)}{\Phi}_{\xi y}^{(1, 1)} + \xi^{(1, 1)} \overset{(2)}{\Phi}_{\xi y}^{(0, 1)}$$

在上面各式中, 如 $n-1 < m$, 则 $\overset{(1)}{\Phi}(n-1, m)$, $\xi^{(n-1, m)}$ 应取为零, 若 $n-2 < m$, 则 $\overset{(1)}{\Phi}(n-2, m)$, $\xi^{(n-2, m)}$ 也应取为零. 如 $n=1$, 则 $\overset{(1)}{\Phi}(n-1, m)$, $\xi^{(n-1, m)}$ 取为零, 如 $n \leq 2$, 则 $\overset{(1)}{\Phi}(n-2, m)$, $\xi^{(n-2, m)}$ 亦取为零.

(4.3)–(4.5)式便为求解所用的方程, 我们只用到 $n \leq 3$ 的情形. 顺序地由低阶到高阶求解可得前两阶结果为:

$$\overset{(1)}{\Phi}^{(1)} = \overset{(1)}{\Phi}^{(1, 0)}(\xi, \tau) + \frac{\cosh k(y+h_1)}{\cosh kh_1} (A(\xi, \tau)Z + \bar{A}Z^{-1}) \quad (4.7)$$

$$\overset{(1)}{\Phi}_{\xi}^{(1, 0)} = \gamma_1 |A|^2 \quad (4.8)$$

$$\overset{(2)}{\Phi}^{(1)} = \overset{(2)}{\Phi}^{(1, 0)}(\xi, \tau) - \frac{\cosh k(y-h_2)}{\cosh kh_2} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (AZ + \bar{A}Z^{-1}) \quad (4.9)$$

$$\overset{(2)}{\Phi}_{\xi}^{(1, 0)} = \gamma_2 |A|^2 \quad (4.10)$$

$$\xi^{(1)} = \frac{ik\sigma_1}{\omega} (AZ - \bar{A}Z^{-1}) \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned}
\overset{(1)}{\Phi}^{(2)} &= \overset{(1)}{\Phi}^{(2, 0)}(\xi, \tau) + \frac{\cosh k(y+h_1)}{\cosh kh_1} (B(\xi, \tau)Z + \bar{B}Z^{-1}) \\
&\quad - i \frac{(y+h_1) \sinh k(y+h_1)}{\cosh kh_1} (A_{\xi}Z - \bar{A}_{\xi}Z^{-1}) \\
&\quad + i \frac{\cosh 2k(y+h_1)}{\cosh 2kh_1} \alpha_1 (A^2 Z^2 - \bar{A}^2 Z^{-2}) \quad (4.12)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overset{(2)}{\Phi}^{(2)} &= \overset{(2)}{\Phi}^{(2, 0)}(\xi, \tau) - \frac{\cosh k(y-h_2)}{\cosh kh_2} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (BZ + \bar{B}Z^{-1}) \\
&\quad + i \frac{\cosh k(y-h_2)}{\cosh kh_2} \left(\frac{h_1}{\sigma_2} - \frac{h_2 \sigma_1}{\sigma_2^2} \right) (A_{\xi}Z - \bar{A}_{\xi}Z^{-1}) \\
&\quad + i \frac{(y-h_2) \sinh k(y-h_2)}{\cosh kh_2} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} (A_{\xi}Z - \bar{A}_{\xi}Z^{-1}) \\
&\quad - i \frac{\cosh 2k(y-h_2)}{\cosh 2kh_2} \alpha_2 (A^2 Z^2 - \bar{A}^2 Z^{-2}) \quad (4.13)
\end{aligned}$$

$$\xi^{(2)} = \beta_2 |A|^2 + \frac{ik\sigma_1}{\omega} (BZ - \bar{B}Z^{-1}) + \frac{(\omega - kV)\sigma_1 + k\omega h_1}{\omega^2} (A_{\xi}Z + \bar{A}_{\xi}Z^{-1})$$

$$+\beta_1(A^2Z^2+\bar{A}^2Z^{-2}) \quad (4.14)$$

其中

$$\alpha_1 = \frac{k^2(1+\sigma_1^2)}{4\omega\sigma_1 E} \left[3\rho_1(1-\sigma_1^2) + \rho_2(\sigma_1^2 - 3\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} - 2\sigma_1\sigma_2) + \frac{6Tk^3\sigma_1}{\omega^2} \right]$$

$$E = \rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2 - \frac{3Tk^3}{\omega^2}$$

$$\alpha_2 = \frac{k^2(1+\sigma_2^2)}{4\omega\sigma_2 E} \left[\rho_1 \left(3 - \sigma_1^2 + 2\frac{\sigma_1^3}{\sigma_2} \right) + 3\rho_2\sigma_1^2 \left(1 - \frac{1}{\sigma_2^2} \right) - \frac{6Tk^3}{\omega^2} \frac{\sigma_1^2}{\sigma_2} \right]$$

$$\beta_1 = -\frac{k^3}{2\omega^2 E} \left[\rho_1(3 - \sigma_1^2) + \rho_2\sigma_1^2 \left(1 - \frac{3}{\sigma_2^2} \right) \right]$$

$$\beta_2 = \frac{1}{F} \left[\frac{2k^2V\sigma_1}{\omega} \left(\frac{h_1\sigma_1}{h_2\sigma_2} \rho_2 - \rho_1 \right) - k^2h_1\sigma_1^2 G \right]$$

$$F = gh_1(\rho_1 - \rho_2) - \left(\rho_1 + \rho_2 \frac{h_1}{h_2} \right) V^2, \quad G = \frac{\rho_1}{s_1^2} - \frac{\rho_2}{s_2^2}$$

$$\gamma_1 = \frac{1}{F} \left[\frac{2k^2V^2\rho_2\sigma_1}{\omega h_2} \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) - k^2V\sigma_1^2 G - \frac{2gk^2\sigma_1(\rho_1 - \rho_2)}{\omega} \right]$$

$$\gamma_2 = \frac{1}{F} \frac{h_1}{h_2} \left[\frac{2k^2V^2\rho_1\sigma_1}{\omega h_1} \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) + k^2V\sigma_1^2 G - \frac{2gk^2\sigma_1^2(\rho_1 - \rho_2)}{\omega\sigma_2} \right]$$

$$\sigma_l = \tanh kh_l, \quad s_l = \sinh kh_l, \quad l=1, 2$$

$\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ 均为常数. 以及

$$\omega^2 = \frac{[g(\rho_1 - \rho_2) + Tk^2]k^2}{\frac{\rho_1}{\sigma_1} + \frac{\rho_2}{\sigma_2}} \quad (4.15)$$

$$V = \frac{1}{2 \left(\frac{\rho_1}{\sigma_1} + \frac{\rho_2}{\sigma_2} \right)} \left[\frac{g(\rho_1 - \rho_2) + 3Tk^2}{\omega} + \frac{\omega\rho_1 h_1}{s_1^2} + \frac{\omega\rho_2 h_2}{s_2^2} \right] = \frac{d\omega}{dk} \quad (4.16)$$

A 满足方程:

$$iA_\tau + \mu A_{\xi\xi} + \nu |A|^2 A = 0 \quad (4.17)$$

其中

$$\begin{aligned} \mu = \frac{1}{2} V'(k) = \frac{1}{2} \frac{d^2\omega}{dk^2} = \frac{1}{2 \left(\frac{\rho_1}{\sigma_1} + \frac{\rho_2}{\sigma_2} \right)} & \left[-\frac{V}{k} \left(\rho_1 + \rho_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \right. \\ & + \frac{V^2}{\omega} \left(\rho_1 + \rho_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) - \frac{2TVk^2\sigma_1}{\omega^2} + \frac{3Tk\sigma_1}{\omega} + \rho_1 h_1 \frac{V\sigma_1 - \omega h_1}{s_1^2} \\ & \left. + \rho_2 h_2 \frac{V\sigma_1 - \omega h_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}}{s_2^2} \right] \end{aligned} \quad (4.18)$$

$$\nu = \frac{1}{2 \left(\frac{\rho_1}{\sigma_1} + \rho_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)} \left[\frac{k^4}{2\omega\sigma_1\sigma_2 \left(\rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2 - \frac{3Tk^3}{\omega^2} \right)} \right] \left\{ -\rho_1^2\sigma_1^2(9\sigma_1^2 \right.$$

$$\begin{aligned}
& -10\sigma_1^2+9)+\rho_1\rho_2(-8\sigma_1^2\sigma_2+4\frac{\sigma_1^5}{\sigma_2}+2\sigma_1^4\sigma_2^2-6\sigma_1^3-8\sigma_1^3\sigma_2^2+18\sigma_1^2+4\sigma_1\sigma_2^2 \\
& -6\sigma_1^2\sigma_2^2)-\rho_2^2\frac{\sigma_1^4}{\sigma_2^2}(9\sigma_1^4-10\sigma_2^2+9)+\frac{3Tk^3\sigma_1}{\omega^2\sigma_2}[\rho_1\sigma_2^3(\sigma_1^4+8\sigma_1^2-4) \\
& +\rho_2\sigma_1^3(\sigma_2^4+8\sigma_2^2-4)]-\frac{9T^2k^6\sigma_1^4\sigma_2^2}{\omega^4}\} \\
& +\frac{k^3\sigma_1}{gh_1(\rho_1-\rho_2)-(\rho_1+\rho_2\frac{h_1}{h_2})V^2}\left\{-\frac{4V^2\rho_1\rho_2}{\omega h_2}\left(1+\frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2\right. \\
& \left.-4V\sigma_1G\left(\rho_2\frac{h_1\sigma_1}{h_2\sigma_2}-\rho_1\right)+\frac{4g(\rho_1-\rho_2)}{\omega}\left(\rho_2\frac{h_1\sigma_1^2}{h_2\sigma_2^2}+\rho_1\right)+\omega h_1\sigma_1^2G^2\right\} \quad (4.19)
\end{aligned}$$

而 $B(\xi, \tau)$ 应由更高阶的方程所决定.

正如在其他的非线性调制问题一样, 所得到的色散关系与线性理论时相同, 弱非线性调制的传播速度 V 为群速度, 一个基本的量 A 满足非线性 Schrödinger 方程.

在上面的结果中令 $\rho_2=0, T=0$, 便得到不计表面张力的二维重力水波的结果, 且与 Hasimoto 和 Ono 的结果一致. 如单令 $\rho_2=0$, 就得到二维重力-表面张力波的结果, 且这里的方程(4.17)与 Djordjevic 等人的结果中方程(2.13)取二维情况相一致.

五、Stokes 波串的稳定性问题

由于色散关系(4.15)与线性理论时(3.4)相同, 故线性理论中的不稳定情况, 即 $k < k_0$ $= \left[\frac{g(\rho_2 - \rho_1)}{T} \right]^{1/2}$ ($\rho_2 > \rho_1$) 时, 我们的非线性调制波也是不稳定的, 因为这时 $\omega^2 < 0$. 但在线性理论中稳定的情况下, 非线性调制波也会产生不稳定性. 我们讨论 Stokes 波串的稳定性的, 它可由方程(4.17)中系数 μ, ν 的乘积的符号来判定, 当 $\mu\nu < 0$ 时是稳定的, $\mu\nu > 0$ 时则不稳定 (参看[1]).

注意到系数 ν 的表达式中当 $\rho_1\sigma_1 + \rho_2\sigma_2 - \frac{3Tk^3}{\omega^2} = 0$ 时, ν 变为无穷大, 这便是二次谐波共鸣现象, 因为这时二阶谐波的系数 $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ 变成无穷大. 而当 $gh_1(\rho_1 - \rho_2) - (\rho_1 + \rho_2 \cdot \frac{h_1}{h_2})V^2 = 0$ 时, ν 也为无穷大, 这是长短波共鸣现象, 因为这时群速度 V 满足:

$$V^2 = \frac{g(\rho_1 - \rho_2)}{\frac{\rho_1}{h_1} + \frac{\rho_2}{h_2}}$$

而等式右端正好是长波 ($k \rightarrow 0$) 的相速 $c = \frac{\omega}{k}$ 的平方.

当不是很接近上面两个共鸣情况时, 我们可以按 μ, ν 的上述表达式来讨论 Stokes 波串的稳定性的, 下面考虑几个特殊情形.

(1) 在临界波数附近的稳定性.

在上面的公式(4.18)、(4.19)中令 $\omega^2 \rightarrow 0$ (设 $\rho_2 > \rho_1$), 则这时

$$\mu \approx -\frac{g^2(\rho_2 - \rho_1)^2 \sigma_1^2}{2\left(\rho_1 + \rho_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)^2 \omega^3} < 0 \quad (\text{设 } \omega > 0)$$

$$\nu \approx \frac{3Tk^2\sigma_1^3}{4\left(\rho_1 + \rho_2 \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\right)\omega^3} > 0$$

所以 $\mu\nu < 0$, 即若假定 $k > k_c$ 且与 k_c 很接近时, Stokes 波串是稳定的.

(2) 在两边流体的深度为无穷大的情况.

为方便起见, 先将 μ, ν 用无量纲数来表示, 令

$$\hat{k} = kh_1, \quad \hat{h} = \frac{h_2}{h_1}, \quad \hat{\rho} = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}, \quad \hat{T} = \frac{Tk^2}{g(\rho_1 + \rho_2)}$$

则 $\hat{k}, \hat{h}, \hat{\rho}, \hat{T}$ 皆为无量纲数, 并有

$$\hat{\omega}^2 = \frac{\omega^2}{gk} = \frac{2\hat{\rho} - 1 + \hat{T}}{\rho^*}, \quad \rho^* = \frac{\hat{\rho}}{\sigma_1} + \frac{1 - \hat{\rho}}{\sigma_2}$$

$$\hat{V} = \frac{V\omega}{g} = \frac{1}{2\rho^*} \left[2\hat{\rho} - 1 + 3\hat{T} + \frac{\hat{\rho}\hat{\omega}^2\hat{k}}{s_1^2} + \frac{(1 - \hat{\rho})\hat{\omega}^2\hat{k}\hat{h}}{s_2^2} \right]$$

$$\begin{aligned} \mu = \frac{g}{2\rho^*\omega k\sigma_1} & \left[-\rho^*\hat{V}\sigma_1 + \rho^* \frac{\hat{V}^2\sigma_1}{\hat{\omega}^2} - \frac{2\hat{T}\hat{V}\sigma_1}{\hat{\omega}^2} + 3\hat{T}\sigma_1 + \frac{\hat{\rho}\hat{k}}{s_1^2} (\hat{V}\sigma_1 - \hat{\omega}^2\hat{k}) \right. \\ & \left. + (1 - \hat{\rho}) \frac{\hat{k}\hat{h}}{s_2^2} \left(\hat{V}\sigma_1 - \hat{\omega}^2\hat{k}\hat{h} \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right) \right] \end{aligned} \quad (5.1)$$

$$\begin{aligned} \nu = \frac{k^2}{2\rho^*\omega\sigma_1} & \left[\frac{1}{2\sigma_1\sigma_2 \left[\hat{\rho}\sigma_1 + (1 - \hat{\rho})\sigma_2 - \frac{3\hat{T}}{\hat{\omega}^2} \right]} \left\{ -\hat{\rho}^2\sigma_2^2(9\sigma_1^4 - 10\sigma_1^2 + 9) \right. \right. \\ & + \hat{\rho}(1 - \hat{\rho}) \left(-8\sigma_1^3\sigma_2 + 4\frac{\sigma_1^4}{\sigma_2} + 2\sigma_1^2\sigma_2^2 - 6\sigma_1 - 8\sigma_1^3\sigma_2^2 - 18\sigma_1^2 + 4\sigma_1\sigma_2^2 - 6\sigma_1^2\sigma_2^2 \right) \\ & - (1 - \hat{\rho})^2 \frac{\sigma_1^4}{\sigma_2^2} \left(9\sigma_2^2 - 10\sigma_2^2 + 9 \right) + \frac{3\hat{T}\sigma_1}{\hat{\omega}^2\sigma_2} \left[\hat{\rho}\sigma_2^2(\sigma_1^4 + 8\sigma_1^2 - 4) \right. \\ & \left. \left. + (1 - \hat{\rho})\sigma_2^2(\sigma_1^4 + 8\sigma_2^2 - 4) \right] - \frac{9\hat{T}^2\sigma_1^2\sigma_2^2}{\hat{\omega}^4} \right\} + \frac{\sigma_1}{\hat{\omega}^2\hat{k}(2\hat{\rho} - 1) - \left(\hat{\rho} + \frac{1 - \hat{\rho}}{\hat{h}} \right) \hat{V}^2} \\ & \cdot \left\{ -\frac{4\hat{V}^2}{\hat{k}\hat{h}} \hat{\rho}(1 - \hat{\rho}) \left(1 + \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \right)^2 - 4\hat{V}\hat{\omega}^2\sigma_1 \left(\frac{\hat{\rho}}{s_1^2} - \frac{1 - \hat{\rho}}{s_2^2} \right) \left(\frac{\sigma_1}{\sigma_2} \frac{1 - \hat{\rho}}{\hat{h}} - \hat{\rho} \right) \right. \\ & \left. + 4\hat{\omega}^2(2\hat{\rho} - 1) \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \frac{1 - \hat{\rho}}{\hat{h}} + \hat{\rho} \right) + \hat{\omega}^4\hat{h}\sigma_1^2 \left(\frac{\hat{\rho}}{s_1^2} - \frac{1 - \hat{\rho}}{s_2^2} \right)^2 \right\} \end{aligned} \quad (5.2)$$

在深界面波情形, $\hat{k} \rightarrow \infty, \hat{k}\hat{h} \rightarrow \infty, \epsilon kh \ll 1, \sigma_1 \rightarrow 1, \sigma_2 \rightarrow 1$, 得

$$\hat{\omega}^2 = 2\hat{\rho} - 1 + \hat{T}$$

$$\hat{V} = \frac{1}{2}(2\hat{\rho} - 1 + 3\hat{T})$$

$$\mu = -\frac{1}{8} \frac{\omega}{k^2} \frac{(2\hat{\rho} - 1)^2 - 6\hat{T}(2\hat{\rho} - 1) - 3\hat{T}^2}{(2\hat{\rho} - 1 + \hat{T})^2}$$

$$\nu = \frac{\hat{k}^4}{4\omega} \frac{\hat{\omega}^2}{(2\hat{\rho}-1-2\hat{T})} \left[-16\hat{\rho}^2 + 16\hat{\rho} - 8 + \frac{15\hat{T}}{2\hat{\rho}-1+\hat{T}} - \frac{9\hat{T}^2}{(2\hat{\rho}-1+\hat{T})^2} \right]$$

由此可得 $(\hat{T}, \hat{\rho})$ 平面上的稳定区域图(图2), 其中 S 表示稳定区域, U 表示不稳定区域. 曲线①、⑤对应 $\mu=0$, 曲线②对应 $\hat{T} = \frac{1}{2}(2\hat{\rho}-1)$, 为二次谐波共鸣的情形. 曲线③、④对应 $\nu=0$, 曲线⑥方程为 $\hat{T} = 1-2\hat{\rho}$, 对应临界波数. $\hat{\rho}$ 变化范围为0到1. 并且长短波共鸣现象不存在.

(3) 在深度不是很大时, 对四个参数 $\hat{\rho}, \hat{h}, \hat{k}, \hat{T}$ 的不同组合, 可分别计算 Stokes 波串的稳定判据 $\mu\nu$, 下面对几个特殊情形, 算得结果如下(参看图3—图8).

图3是 $\hat{h}=10$ 的情形, 图形与深界面波时类似, 但已有长短波共鸣现象出现(曲线②),

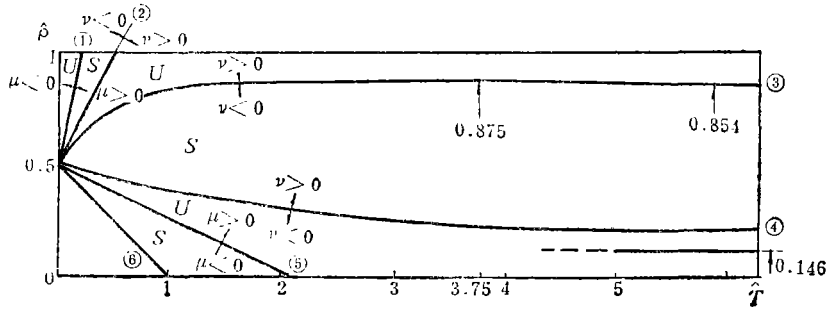


图2 深界面波情形.

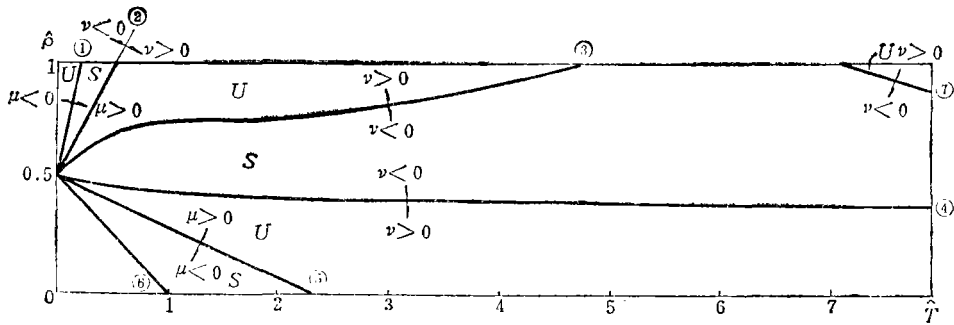


图3 近似深界面波情形 $\hat{h}=10, \hat{k}=1$.

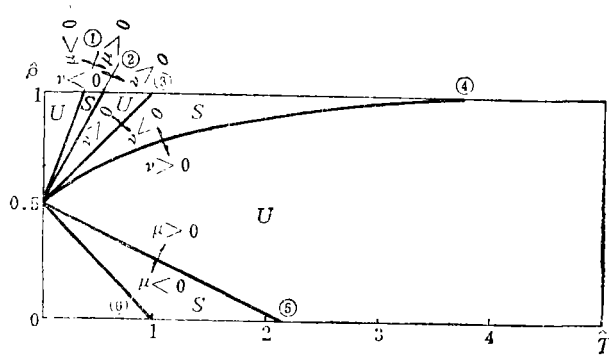


图4 $\hat{h}=2, \hat{k}=1$.

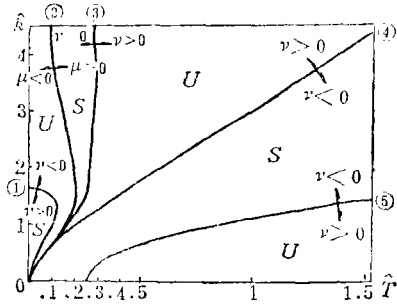


图5 $\hat{\rho}=0.8, \hat{k}=2$.

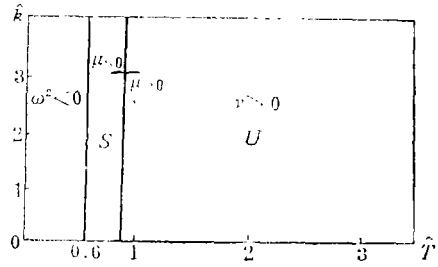


图6 $\hat{\rho}=0.2, \hat{k}=0.1$.

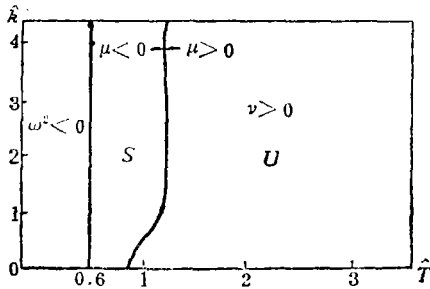


图7 $\hat{\rho}=0.2, \hat{k}=2$ (局部).

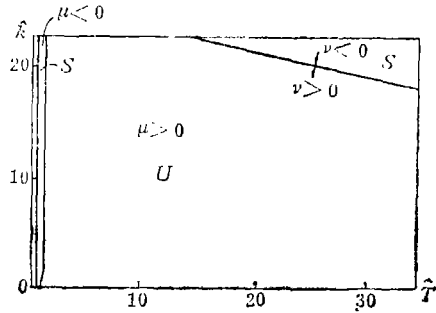


图8 $\hat{\rho}=0.2, \hat{k}=2$.

而当 $\hat{k}=2$ 时, 稳定图形已与深界面波情形有显著差别 (图 4). 在图 3 和图 4 中, 曲线①、⑥仍对应 $\mu=0$, 曲线⑦对应临界波数 ($\hat{T}=1-2\hat{\rho}$), 曲线②为二次谐波共鸣, 曲线③为长短波共鸣, 曲线④为 $\nu=0$, 图 3 中曲线⑦对应 $\nu=0$.

图 5 为 $\hat{\rho}=0.8, \hat{k}=2$ 的情形, 在 (\hat{k}, \hat{T}) 平面上的稳定图形与 Djordjevic 等人所得到的重力-表面张力水波的稳定图形相似 (参看 [3]). 他们的情形相当于我们的问题在 $\hat{\rho}=1$ 时的情形. 这里, 曲线①、⑤对应 $\nu=0$, 曲线②对应 $\mu=0$, 曲线③对应二次谐波共鸣, 曲线④对应长短波共鸣.

图 6、7、8 都是 $\hat{\rho}=0.2$ 的情形, 这时上部流体比下部重, 但当波数大于临界波数时仍然可能稳定, 并且这时稳定图形很简单.

由上面的稳定图形可见 $\hat{\rho}$ 、 \hat{T} 、 \hat{k} 、 \hat{h} 各因素对稳定性的影响并不是单调地起作用的. 比如, 在某些情形下, 如图 3 中的曲线①、⑥附近, 当 \hat{T} 增加时, 运动由不稳变为稳定, 这体现了表面张力的致稳作用. 但在曲线②前后, 当 \hat{T} 增加时, 运动由稳定变为不稳, 注意到曲线②相当于二次谐波共鸣现象, 故此种不稳定性也许可用出现共鸣现象来解释. 在曲线⑥、⑦附近, 运动亦由稳定到不稳 (当 \hat{T} 增加). 关于这点, 在水波情形下, Djordjevic 等已指出单纯的表面张力波是调制不稳定的.

在两个共鸣现象的附近, 上述的展开不再有效, 这时需引入另外的多重尺度. Djordjevic 等给出了一个对长短波共鸣现象的分析. 本文不准备进行这一分析了.

参 考 文 献

1. Hasimoto, H. and Ono, H., Nonlinear modulation of gravity waves, *J. Phys. Soc. Japan*, 33, (1972), 805—811.
2. Davey, A. and Stewartson, K., On three-dimensional packets of surface waves. *Proc. R. Soc.*, London, A388, (1974) 101-110.
3. Djordjevic, V. D. and Redekopp, L. G., On two-dimensional packets of capillary-gravity waves, *J. Fluid Mech.* 79, Part.4, (1977), 703-714.
4. 谢定裕, 《流体力学中的渐近方法》, 中国科学院力学所, 北京, (1979), 86—90.

Nonlinear Modulation of the Interfacial Waves of Two Superposed Fluids

Zou Qi-su

(*Zhongshan University, Guangzhou*)

Abstract

The slow modulation of the interfacial capillary-gravity waves of two superposed fluids with uniform depths and solid walls is investigated by using the method of multiple scales. The evolution of a packet is described by the nonlinear Schrödinger equation, and then the stability of the so-called Stokes wave train is discussed.