

各向异性多层扁壳的大挠度方程*

王震鸣 刘国玺 吕明身

(北京中国科学院力学研究所, 1980年7月18日收到)

摘 要

本文在文献[1]的基础上加以改进和推广, 探讨各向异性多层扁壳在静载、动载和热载作用下的大挠度方程, 考虑了最一般的弯曲拉伸间的耦合关系和沿厚度方向的剪切变形, 给出了平衡方程、边界条件和初始条件, 得到了以广义位移 u_0 , v_0 , ϕ_x , ϕ_y 和 ω 表示的微分方程组, 由此可求解应力、变形、稳定和振动等问题, 对于若干常见情况, 给出了简化的方程和方法。

一、引 言

以碳纤维-环氧为代表的先进复合材料, 具有比强度高、比刚度大、抗疲劳性能好和容易加工成型等优点, 已在航空、宇航等部门得到越来越广泛的应用。

纤维增强复合材料, 具有各向异性、不均匀性(呈层性)、层间剪切模量较低和层间剪切强度很低等力学特点。为了充分发挥复合材料的优良性能, 提高结构的刚度, 减轻结构的重量, 常做成板壳结构和薄壁杆件的形式, 因此结构的稳定问题显得很突出很重要。对于多层板壳, 由于层间剪切模量较低, 一般应考虑由层间剪切产生的沿厚度方向剪切变形的影响, 特别是对于稳定和振动问题。对于夹层板壳, 由于夹心的剪切模量只有多层板壳层间剪切模量的百分之几, 因此必须考虑沿厚度方向的剪切变形。但是, 考虑层间剪切变形的影响, 由于广义位移的数目增多, 将使问题变得更为复杂和困难。因此, 对于多层薄板壳, 当层间剪切所产生的变形影响很小时, 或者为了简单起见, 人们(例如文献[2~8])常常忽略沿厚度方向的剪切变形, 而采用Kirchhoff假定。

对于各向异性多层板壳, 若要严格考虑沿厚度方向剪切变形的影响, 精确计算多层板壳的剪切刚度和层间的剪应力分布, 那是相当复杂和困难的问题^[9~12]。对于求解变形、稳定和振动问题, 采用简化的近似方法计算剪切刚度, 从实用上来说, 已能得到比较精确的计算结果, 满足设计要求。对于应力分析问题, 特别是精确计算层间剪应力问题, 则必须采用更严格和复杂的推导和计算。

为了使复合材料的结构能长期、安全而又经济地使用, 需要选择合理的安全系数。取了一定的安全系数以后, 在应变不大的情况下, 纤维增强复合材料的应力应变关系, 非线性的

* 胡海昌推荐。

影响很小,尤其是起主要作用的沿纤维方向的拉伸和压缩模量,几乎是个常数,因此可假定材料是线性弹性的.在一般情况下,这种假定已能满足结构设计的要求;只有在一些特殊情况下,才需要考虑材料的物理非线性问题.

对于复合材料的板壳结构,为了确保结构的安全,必须探讨它的应力、变形、稳定和振动等问题,因此有必要研究各向异性多层壳在复杂情况下的大挠度方程,作为研究许多具体问题的理论基础.

本文在[1]的基础上加以改进和推广,探讨各向异性多层扁壳的一般方程和边界条件等.本文的多层扁壳,在考虑沿厚度方向剪切变形的情况下,和夹层扁壳属于同类的问题,不过剪切刚度的计算公式有所不同.以金属作表板的夹层板壳,通常对表板采用 Kirchhoff 假定,只考虑夹心沿厚度方向的剪切变形,而本文所探讨的复合材料夹层板壳,假定表板和夹心具有相同的剪切变形,由于表板很薄,这样处理既方便又实用.

本文采用 Donnell 的基本假设,考虑了几何的非线性.假定温差分布 $T(x, y, z)$ 是任意的.以树脂为基体的复合材料板壳,由于吸收或放出水分所引起的膨胀或收缩问题,可折合为当量温差进行计算.为了使问题不致于过分复杂,每层材料的弹性常数必须相同,而各层材料的弹性常数则可以不同.考虑了惯性力的作用,外载荷 q_x, q_y, q_z 和外力矩 m_x, m_y 为坐标 x, y 和时间 t 的函数,因而可求解振动问题.在广义力和广义位移方面,考虑了最一般的弯曲拉伸间的耦合关系,适用于复合材料最一般的铺层情况(不同材料,不同厚度,不同取向等).用平衡法列出了平衡方程,用力学和物理概念给出了边界条件和初始条件.对于若干最常用的特殊情况,给出了简化的方程和方法.本文给出了较为合理的计算剪切刚度的公式,给出了比较精确地计算层间剪应力的公式.

二、基本关系

选取与扁壳表面平行的某一合适的曲面作为坐标面,对于对称构造的多层壳,当然采用中曲面作为 OXY 坐标面,对于不对称构造的多层壳,最好选某一方面的中性面作为坐标面,也可取中曲面作为坐标面,详细情况以后再讨论.坐标系如图 1 所示,坐标面与扁壳内表面的距离由图 2 所示的 h_0 确定.取中曲面为坐标面时, $h_0 = \frac{h}{2}$.

在 OXY 坐标面上,壳体变形在 X, Y, Z 方向的位移分别为 u_0, v_0 和 w_0 , 变形前壳体的法线,由于弯曲变形和沿厚度方向的剪切变形,在 X, Y 方向的转角分别为 ϕ_x, ϕ_y . 假定壳体在横向不可压缩.则壳体中任一点在 X, Y, Z 方向的位移 u, v, w 可分别表达为

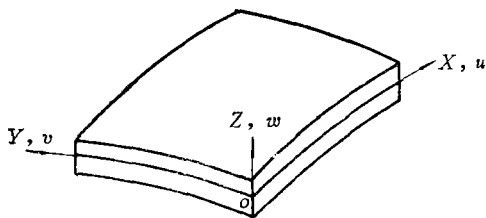


图 1

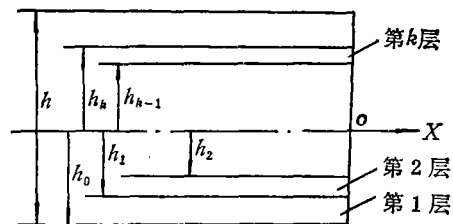


图 2

$$u = u_0 + z\phi_x, \quad v = v_0 + z\phi_y, \quad w = w_0 \quad (2.1)$$

当温差分布为 $T(x, y, z)$ 时, 多层壳中第 k 层因应力所引起的应变为

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + z \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) + \frac{2w}{R_{xy}} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k T \quad (2.2)$$

在(2.2)中, 列矩阵的下标 k 表示第 k 层, $\alpha_x T$, $\alpha_y T$, $\alpha_{xy} T$ 分别为温差 T 在 X , Y 方向引起的拉伸和剪切应变. R_x , R_y 为扁壳在 X , Y 方向的曲率半径, $\frac{1}{R_{xy}}$ 为扭曲率. 和通常一样, 忽略

R_x , R_y , R_{xy} 因 z 所引起的微小变化.

设 α_1 , α_2 分别为纤维方向与横向的线膨胀系数, 当纤维与 X 轴成 θ 角时, 记 $m = \cos \theta$, $n = \sin \theta$, 则对于第 k 层

$$\begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} m^2 & n^2 \\ n^2 & m^2 \\ 2mn & -2mn \end{Bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}_k \quad (2.3)$$

令 N^T 和 M^T 为温差引起的当量内力和内力矩, 上标 T 表示与温度有关.

$$\{N^T\} = \begin{Bmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} T dz \quad (2.4)$$

$$\{M^T\} = \begin{Bmatrix} M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^n \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_{xy} \end{Bmatrix}_k \int_{h_{k-1}}^{h_k} T z dz \quad (2.5)$$

在(2.4), (2.5)中, h_{k-1} , h_k 为第 k 层在 z 轴方向的坐标, 总和号上的 n , 在此代表总层数. 对于第 k 层,

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{11} \\ \bar{Q}_{12} \\ \bar{Q}_{22} \\ \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{66} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} Q_{11}m^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}n^4 \\ (Q_{11} + Q_{22} - 4Q_{66})m^2n^2 + Q_{12}(m^4 + n^4) \\ Q_{11}n^4 + 2(Q_{12} + 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{22}m^4 \\ (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})m^3n + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})mn^3 \\ (Q_{11} - Q_{12} - 2Q_{66})mn^3 + (Q_{12} - Q_{22} + 2Q_{66})m^3n \\ (Q_{11} + Q_{22} - 2Q_{12} - 2Q_{66})m^2n^2 + Q_{66}(m^4 + n^4) \end{Bmatrix}_k \quad (2.6)$$

需要注意, (2.4)(2.5)式中的 N^T 和 M^T , 只有当应变和曲率完全受到限制时, 才成为真正的由温差引起的内力和内力矩.

记 E_{11} , E_{22} 分别为多层扁壳中平行和垂直于纤维方向的弹性模量, ν_{12} 和 ν_{21} 为相应的

泊桑比, 则 $\nu_{12}E_{22}=\nu_{21}E_{11}$. G_{12} 为面内的剪切模量, G_{23} 和 G_{31} 分别为相应的沿厚度方向的剪切模量. 则第 k 层的

$$\begin{pmatrix} Q_{11} \\ Q_{12} \\ Q_{22} \\ Q_{66} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \frac{E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ \frac{\nu_{21}E_{11}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ \frac{E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}} \\ G_{12} \end{pmatrix}_k \quad (2.7)$$

在(2.7)中, $Q_{21}=Q_{12}=\frac{\nu_{12}E_{22}}{1-\nu_{12}\nu_{21}}$.

第 k 层面内的应力应变关系为

$$\begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k = \begin{pmatrix} \bar{Q}_{11} & \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{16} \\ \bar{Q}_{12} & \bar{Q}_{22} & \bar{Q}_{26} \\ \bar{Q}_{16} & \bar{Q}_{26} & \bar{Q}_{66} \end{pmatrix}_k \begin{pmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{pmatrix}_k \quad (2.8)$$

记

$$\{N\} = \begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k dz \quad (2.9)$$

$$\{M\} = \begin{pmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{pmatrix}_k z dz \quad (2.10)$$

将(2.2)代入(2.8), 然后代入(2.9)和(2.10), 经化简后可得

$$\begin{pmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{12} & B_{22} & B_{26} & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{2w}{R_{xy}} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N_x^T \\ N_y^T \\ N_{xy}^T \\ M_x^T \\ M_y^T \\ M_{xy}^T \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

在(2.11)中, 对于各向异性多层壳, A_{ij} 为拉伸刚度, D_{ij} 为弯曲刚度, B_{ij} 为弯曲拉伸间的耦合刚度. 它们可由下式求得. ($i, j=1, 2, 6$)

$$\left. \begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \bar{Q}_{ij}^{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} (h_k - h_{k-1}) \\ B_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z dz = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ D_{ij} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \bar{Q}_{ij}^{(k)} z^2 dz = \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

在(2.11)中, 记

$$\{\varepsilon\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{w}{R_x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{\partial v_0}{\partial y} + \frac{w}{R_y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} + \frac{2w}{R_{xy}} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{array} \right\}, \quad \{\kappa\} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \end{array} \right\} \quad (2.13)$$

在(2.13)中, ε 表示应变, κ 表示曲率. 则(2.11)化为

$$\left\{ \begin{array}{l} N \\ M \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \\ \kappa \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} N^T \\ M^T \end{array} \right\} \quad (2.14)$$

其中, $\begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix}$ 是刚度矩阵, 因而是正定的, 根据矩阵的性质, $[A]$, $[D]$ 也是正定的. 于是可将(2.14)变为

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \\ M + M^T \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} A^* & B^* \\ C^* & D^* \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} N + N^T \\ \kappa \end{array} \right\} \quad (2.15)$$

在(2.15)中,

$$\left. \begin{aligned} [A^*] &= [A]^{-1}, [B^*] = -[A]^{-1}[B] \\ [C^*] &= [B][A]^{-1}, [D^*] = [D] - [B][A]^{-1}[B] \end{aligned} \right\} \quad (2.16)$$

可以证明, $[D^*]$ 也是正定的.

在(2.15)中, 对于任意的非零的 $\{\varepsilon\}$ 和 $\{\kappa\}$, 可得

$$\frac{1}{2} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \\ \kappa \end{array} \right\}^T \begin{bmatrix} A & B \\ B & D \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{l} \varepsilon \\ \kappa \end{array} \right\} > 0 \quad (2.17)$$

列矩阵右上角的 T 为矩阵转置符号. 由(2.17)式得

$$\{\varepsilon\}^T [A] \{\varepsilon\} + \{\varepsilon\}^T [B] \{\kappa\} + \{\kappa\}^T [B] \{\varepsilon\} + \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} > 0 \quad (2.18)$$

在(2.15)中, 当 $\{N + N^T\} = 0$ 时,

$$\{\varepsilon\} = [B^*] \{\kappa\} = -[A]^{-1}[B] \{\kappa\} \quad (2.19)$$

将(2.19)代入(2.18)得

$$\{\kappa\}^T ([D] - [B][A]^{-1}[B]) \{\kappa\} > 0 \quad (2.20)$$

即 $\{\kappa\} [D^*] \{\kappa\} > 0$, 所以 $[D^*]$ 是正定的. 因为 $[A]^{-1}$ 是正定的, 所以 $[B][A]^{-1}[B]$ 是半正定

的. 对于任意的非零的 $\{\kappa\}$,

$$\{\kappa\}^T [D^*] \{\kappa\} = \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} - \{\kappa\}^T [B] [A]^{-1} [B] \{\kappa\} \leq \{\kappa\}^T [D] \{\kappa\} \quad (2.21)$$

所以

$$[D^*] \leq [D] \quad (2.22)$$

在(2.16)中, 当 $[B]=0$ 时, 则 $[D^*]=[D]$.

对于各向异性多层扁壳和夹层扁壳, 为了考虑沿厚度方向剪切变形的影响, 需要计算剪切刚度 C_{ij} , ($i, j=4, 5$). 使得

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= C_{65} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) + C_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) \\ Q_y &= C_{45} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \right) + C_{44} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \right) \end{aligned} \right\} \quad (2.23)$$

在(2.23)中, 整个多层壳截面的平均剪应变为

$$\bar{\gamma}_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x, \quad \bar{\gamma}_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \quad (2.24)$$

它是将(2.1)中的位移代入 $\gamma_{xz} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}$ 和 $\gamma_{yz} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$ 后得到的. Q_x, Q_y 为整个截面沿厚度方向单位宽度上的剪力.

$$Q_x = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tau_{xz}^{(k)} dz, \quad Q_y = \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \tau_{yz}^{(k)} dz \quad (2.25)$$

要计算 C_{ij} , 就需要知道 τ_{xy} 和 τ_{yz} 沿壳厚的分布, 而不确定 C_{ij} , 也就不能用本文后面给出的以广义位移 $u_0, v_0, \phi_x, \phi_y, w$ 作为未知量的基本方程和相应的边界条件、初始条件去求解这五个广义位移. 只有在解得了广义位移 u_0, v_0, ϕ_x, ϕ_y 和 w 以后, 才能从(2.2)式算得 $\varepsilon_x^{(k)}, \varepsilon_y^{(k)}, \gamma_{xy}^{(k)}$, 从(2.8)算得 $\sigma_x^{(k)}, \sigma_y^{(k)}, \tau_{xy}^{(k)}$, 再由下列平衡方程

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= \rho^{(k)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} &= \rho^{(k)} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} \end{aligned} \right\} \quad (2.26)$$

去求解多层壳的层间剪应力:

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz} \Big|_{z=h_{k-1}} &= \sum_{k=1}^{k_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz = \sum_{k=1}^{k_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\rho^{(k)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} \right] dz \\ \tau_{yz} \Big|_{z=h_{k-1}} &= \sum_{k=1}^{k_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} dz = \sum_{k=1}^{k_1} \int_{h_{k-1}}^{h_k} \left[\rho^{(k)} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} \right] dz \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

在(2.26), (2.27)中, $\rho^{(k)} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, \rho^{(k)} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}$ 为单位体积的惯性力, $\rho^{(k)}$ 为第 k 层的密度. 在第 k 层中, τ_{xz} 和 τ_{yz} 沿该层厚度呈抛物线状分布.

大家知道, 对于单层壳, 在采用 Kirchhoff 假定以后, 算得的剪应变为零, 客观上存在着剪应力和算得的等于零的剪应变之间, 不再满足虎克定律. 可是, 从平衡方程(2.26)式积分, 可以算得相当精确的 τ_{xz} 和 τ_{yz} , 它们沿壳厚呈抛物线状分布.

对于各向异性多层扁壳的情况, 由平均剪应变按下式算出的剪应力是不符合实际情况的.

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{Bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \end{Bmatrix} \quad (2.28)$$

其中

$$\begin{Bmatrix} \bar{Q}_{44} \\ \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{55} \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} Q_{44}m^2 + Q_{55}n^2 \\ (Q_{55} - Q_{44})mn \\ Q_{44}n^2 + Q_{55}m^2 \end{Bmatrix}_k \quad (2.29)$$

在(2.29)中, $Q_{44} = G_{23}$, $Q_{55} = G_{31}$, 其中 1 代表纤维方向, 2 代表在面内和纤维垂直的方向, 3 为 z 的方向, $m = \cos\theta$, $n = \sin\theta$, θ 角如图 3 所示. 通常, G_{13} 和 G_{23} 在数值上是很接近的.

(2.28)式给出的剪应力分布, 沿壳厚呈阶梯状变化, 在壳体表面, 剪应力不等于零, 在每一层中, 剪应力分布也不是抛物线状的, 因此是不符合实际情况的.

在文献[1]中第233页, 他们将(2.28)式的剪应力乘一个权函数, $f(z) = \frac{5}{4} \left[1 - \frac{4}{h^2} \cdot \left(z - \frac{h}{2} - h_0 \right)^2 \right]$, 得到

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}_k = \frac{5}{4} \left[1 - \frac{4}{h^2} \left(z - \frac{h}{2} - h_0 \right)^2 \right] \begin{Bmatrix} \bar{Q}_{55} & \bar{Q}_{45} \\ \bar{Q}_{45} & \bar{Q}_{44} \end{Bmatrix}_k \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} + \phi_x \\ \frac{\partial w}{\partial y} + \phi_y \end{Bmatrix} \quad (2.30)$$

虽能使壳体表面的剪应力等于零, 而在 $z = h_k$ 时, 层间剪应力不连续, 这是不合理的. 在[1]中也没有给出比较精确地计算层间剪应力的公式或方法, 对于层间剪切强度很低的复合材料来说, 这是很重要的. 因此这是文献[1]的一种欠缺, 而本文在这方面前进了一步. [1]中给出的计算剪切刚度的算式, 在本文选用的坐标系中为

$$C_{ij} = \frac{5}{4} \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} \left[h_k - h_{k-1} - \frac{4}{3} \frac{(h_k - \frac{h}{2} - h_0)^3 - (h_{k-1} - \frac{h}{2} - h_0)^3}{h^2} \right], \quad (i, j=4, 5) \quad (2.31)$$

下面我们按剪切余能相等的原则, 另行推导剪切刚度的算式, 也是一种近似计算公式. 为了计算 C_{ij} , 假定各向异性多层壳中剪应力沿壳厚呈抛物线状分布.

$$\begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{3}{2} \left[1 - \frac{4}{h^2} \left(z - \frac{h}{2} - h_0 \right)^2 \right] \frac{Q_x}{h} \\ \frac{3}{2} \left[1 - \frac{4}{h^2} \left(z - \frac{h}{2} - h_0 \right)^2 \right] \frac{Q_y}{h} \end{Bmatrix} \quad (2.32)$$

在(2.32)中, $\frac{Q_x}{h}$, $\frac{Q_y}{h}$ 为截面上的平均剪应力, 乘以 $\frac{3}{2}$ 后是最大剪应力. 与剪应力 τ_{xz} , τ_{yz} 有关的余能密度沿厚度的积分为

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \{\tau_{xz} \quad \tau_{yz}\} \begin{bmatrix} \overline{Q}_{65} & \overline{Q}_{45} \\ \overline{Q}_{45} & \overline{Q}_{44} \end{bmatrix}_k^{-1} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \\
 &= \frac{9}{8h^2} \sum_{k=1}^n \frac{\overline{Q}_{44}^{(k)} Q_x^2 - 2 \overline{Q}_{45}^{(k)} Q_x Q_y + \overline{Q}_{65}^{(k)} Q_y^2}{\overline{Q}_{65}^{(k)} \overline{Q}_{44}^{(k)} - [\overline{Q}_{45}^{(k)}]^2} \\
 &\quad \cdot \left[h_k - h_{k-1} - \frac{8}{3} \frac{(h_k - \frac{h}{2} - h_0)^3 - (h_{k-1} - \frac{h}{2} - h_0)^3}{h^2} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{16}{5} \frac{(h_k - \frac{h}{2} - h_0)^5 - (h_{k-1} - \frac{h}{2} - h_0)^5}{h^4} \right] \quad (2.33)
 \end{aligned}$$

由(2.23)可得

$$V = \frac{1}{2} \{Q_x \quad Q_y\} \begin{bmatrix} C_{65} & C_{45} \\ C_{45} & C_{44} \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \frac{C_{44} Q_x^2 - 2C_{45} Q_x Q_y + C_{65} Q_y^2}{C_{65} C_{44} - C_{45}^2} \quad (2.34)$$

令(2.33), (2.34)式的能量相等, 经运算后得

$$C_{44} = \frac{a}{ab - c^2}, \quad C_{65} = \frac{b}{ab - c^2}, \quad C_{45} = \frac{c}{ab - c^2} \quad (2.35a)$$

其中

$$\left. \begin{aligned}
 a &= \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^n \frac{\overline{Q}_{44}^{(k)}}{\overline{Q}_{65}^{(k)} \overline{Q}_{44}^{(k)} - [\overline{Q}_{45}^{(k)}]^2} H_k \\
 b &= \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^n \frac{\overline{Q}_{65}^{(k)}}{\overline{Q}_{65}^{(k)} \overline{Q}_{44}^{(k)} - [\overline{Q}_{45}^{(k)}]^2} H_k \\
 c &= \frac{9}{4h^2} \sum_{k=1}^n \frac{\overline{Q}_{45}^{(k)}}{\overline{Q}_{65}^{(k)} \overline{Q}_{44}^{(k)} - [\overline{Q}_{45}^{(k)}]^2} H_k
 \end{aligned} \right\} \quad (2.35b)$$

而

$$\begin{aligned}
 H_k &= h_k - h_{k-1} - \frac{8}{3} \frac{(h_k - \frac{h}{2} - h_0)^3 - (h_{k-1} - \frac{h}{2} - h_0)^3}{h^2} \\
 &\quad + \frac{16}{5} \frac{(h_k - \frac{h}{2} - h_0)^5 - (h_{k-1} - \frac{h}{2} - h_0)^5}{h^4} \quad (2.35c)
 \end{aligned}$$

它和(2.31)式不同.

需要指出, (2.32)式的剪应力分布, 只有对沿壳厚 h 是均匀的材料才是精确的, 对于其他铺层情况的多层壳, 只能是不同程度的近似. 但是, 在计算应力、变形、稳定和振动问题时, 用(2.32)式近似的剪应力分布来计算剪切刚度 C_{ij} , 以考虑沿厚度方向剪切变形的影响, 这样算得的结果要比采用 $C_{ij} = \infty$ 的Kirchhoff假定算得的相应结果精确得多了. 在精度上已能满足设计要求. 对于单层均匀材料的壳, 按(2.31)和(2.35)式算得的 C_{ij} , 数值相同.

对于具有蜂窝夹心的以复合材料作面板的各向异性夹层扁壳, 仍假定在表板中剪应力近似地按抛物线状分布, 在夹心中剪应力是均匀分布的, 由于表板一般很薄, 算 C_{ij} 时近似地认为

$$C_{ij} = \bar{Q}_{ij} h, \quad (i, j=4, 5) \quad (2.36)$$

即 C_{ij} 仅与夹心中的 \bar{Q}_{ij} 有关, 与表板无关. h 为夹层壳的厚度. 对于夹心, 仍设 $Q_{55} = G_{31}$, $Q_{44} = G_{23}$, θ 角如图 3 所示. 则按(2.29)式算得夹心层的 \bar{Q}_{ij} , 即为所求的夹层壳的 \bar{Q}_{ij} .

三、平衡方程和边界条件

根据单元体在大挠度情况下的平衡, 可以导得多层扁壳的平衡方程如下:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} - \bar{\rho} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - Q \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + q_x &= 0 \\ \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} - \bar{\rho} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - Q \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + q_y &= 0 \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} - Q_x - Q \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} - I \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} + m_x &= 0 \\ \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y - Q \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} - I \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} + m_y &= 0 \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} - \frac{N_x}{R_x} - \frac{N_y}{R_y} - \frac{2N_{xy}}{R_{xy}} + \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) + q_z - \bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

其中, 对于多层壳, $\bar{\rho}$ 为单位面积上的质量, I 为单位面积的质量对所取坐标系的转动惯量, 而 Q 为与单位面积的质量相应的耦合 (直线运动与转动的耦合) 惯量.

$$\left. \begin{aligned} \bar{\rho} &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} dz = \sum_{k=1}^n \rho^{(k)} (h_k - h_{k-1}) \\ Q &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} z dz = \sum_{k=1}^n \rho^{(k)} \frac{1}{2} (h_k^2 - h_{k-1}^2) \\ I &= \sum_{k=1}^n \int_{h_{k-1}}^{h_k} \rho^{(k)} z^2 dz = \sum_{k=1}^n \rho^{(k)} \frac{1}{3} (h_k^3 - h_{k-1}^3) \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

其中, $\rho^{(k)}$ 为第 k 层的密度.

在(3.1)式中, q_x, q_y, q_z 分别为单位面积壳体内外表面上的分布外力在 X, Y, Z 方向的分力; m_x, m_y 分别为单位面积壳体内外表面上的分布外力对所选坐标轴的力矩, 取与

M_x, M_y 方向相同时为正值, 它们都是 x, y, t 的函数. $\frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2}$ 分

别为有关方向的线加速度和角加速度.

对于非矩形扁壳, 取边界的外法线方向为 $+n$ 方向, 边界的正切线方向 $+t$ 如下确定: 即在 ntZ 和 XYZ 坐标系中, 从 $+n$ 方向转到 $+t$ 方向与从 X 方向转到 Y 方向相同, 则边界条件为,

$$\left. \begin{aligned} N_n &= \bar{N}_n, \text{ 或 } u_n = \bar{u}_n; N_{nt} = \bar{N}_{nt}, \text{ 或 } u_t = \bar{u}_t, \\ M_n &= \bar{M}_n, \text{ 或 } \phi_n = \bar{\phi}_n; M_{nt} = \bar{M}_{nt}, \text{ 或 } \phi_t = \bar{\phi}_t, \\ Q_n + N_n \frac{\partial w}{\partial n} + N_{nt} \frac{\partial w}{\partial t} &= \bar{Q}_n, \text{ 或 } w = \bar{w} \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

其中, N_n, M_n, Q_n 为垂直于边界上的内力、弯矩和沿厚度方向的剪力; N_{nt}, M_{nt} 为边界上的面内剪力和扭矩; u_n 和 u_t 为 n 和 t 方向的位移, ϕ_n 和 ϕ_t 为相应的转角. 边界上的已知值用加一横来表示.

需要注意, 边界条件与 OXY 坐标面的选取有关, 例如在边界中面上作用有 \bar{N}_n, \bar{N}_{nt} , 选中面作坐标面, 则边界上不存在由 \bar{N}_n 和 \bar{N}_{nt} 产生的 \bar{M}_n 和 \bar{M}_{nt} , 而不取中面作坐标面时, 则出现 M_n 和 \bar{M}_{nt} . 因此, 对于具体问题, 应结合坐标面的选择, 正确地给出相应的边界条件.

根据物理概念, 我们给出初始条件. 当 $t=t_0$ 时,

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= (u_0)_0, v_0 = (v_0)_0, \phi_x = (\phi_x)_0, \phi_y = (\phi_y)_0, w = (w)_0; \\ \frac{\partial u_0}{\partial t} &= \left(\frac{\partial u_0}{\partial t} \right)_0, \frac{\partial v_0}{\partial t} = \left(\frac{\partial v_0}{\partial t} \right)_0, \frac{\partial \phi_x}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi_x}{\partial t} \right)_0, \frac{\partial \phi_y}{\partial t} = \left(\frac{\partial \phi_y}{\partial t} \right)_0, \frac{\partial w}{\partial t} = \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right)_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

四、用广义位移作为未知量的一般方程

将(2.11), (2.23)代入(3.1)式, 化简后, 引用记号 $\{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{e\}$ 和 $\{f\}$, 可导得用广义位移 u_0, v_0, ϕ_x, ϕ_y 和 w 作为未知量的最一般方程, 即

$$\{a\} + \{b\} + \{c\} + \{d\} + \{e\} + \{f\} = 0 \quad (4.1)$$

在(4.1)式中,

$$\{a\} = \begin{Bmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} & L_{15} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} & L_{25} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} & L_{35} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} & L_{45} \\ L_{51} & L_{52} & L_{53} & L_{54} & L_{55} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_0 \\ v_0 \\ \phi_x \\ \phi_y \\ w \end{Bmatrix} \quad (4.2)$$

其中

$$L_{11} = A_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{12} = L_{21} = A_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (A_{12} + A_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{13} = L_{31} = B_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{14} = L_{41} = L_{23} = L_{32} = B_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (B_{12} + B_{66}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{15} = \left[\left(\frac{A_{11}}{R_x} + \frac{A_{12}}{R_y} + \frac{2A_{16}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{A_{16}}{R_x} + \frac{A_{26}}{R_y} + \frac{2A_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] - \left[\left(\frac{A_{11}}{R_x^2} \frac{\partial R_x}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{A_{12}}{R_y^2} \frac{\partial R_y}{\partial x} + \frac{2A_{16}}{R_{xy}^2} \frac{\partial R_{xy}}{\partial x} \right) + \left(\frac{A_{16}}{R_x^2} \frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{A_{26}}{R_y^2} \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{2A_{66}}{R_{xy}^2} \frac{\partial R_{xy}}{\partial y} \right) \right]$$

$$L_{22} = A_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2A_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + A_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2},$$

$$L_{21} = L_{42} = B_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2B_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + B_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

$$L_{25} = \left[\left(\frac{A_{16}}{R_x} + \frac{A_{26}}{R_y} + \frac{2A_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{A_{12}}{R_x} + \frac{A_{22}}{R_y} + \frac{2A_{26}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] - \left[\left(\frac{A_{16}}{R_x^2} \frac{\partial R_x}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{A_{26}}{R_y^2} \frac{\partial R_y}{\partial x} + \frac{2A_{66}}{R_{xy}^2} \frac{\partial R_{xy}}{\partial x} \right) + \left(\frac{A_{12}}{R_x^2} \frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{A_{22}}{R_y^2} \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{2A_{26}}{R_{xy}^2} \frac{\partial R_{xy}}{\partial y} \right) \right]$$

$$L_{33} = D_{11} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{66} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{65}$$

$$L_{34} = L_{43} = D_{16} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + (D_{66} + D_{12}) \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{26} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{45}$$

$$L_{35} = \left[\left(\frac{B_{11}}{R_x} + \frac{B_{12}}{R_y} + \frac{2B_{16}}{R_{xy}} - C_{65} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{B_{16}}{R_x} + \frac{B_{26}}{R_y} + \frac{2B_{66}}{R_{xy}} - C_{45} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] - \left[\left(\frac{B_{11}}{R_x^2} \frac{\partial R_x}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{B_{12}}{R_y^2} \frac{\partial R_y}{\partial x} + \frac{2B_{16}}{R_{xy}^2} \frac{\partial R_{xy}}{\partial x} \right) + \left(\frac{B_{16}}{R_x^2} \frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{B_{26}}{R_y^2} \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{2B_{66}}{R_{xy}^2} \frac{\partial R_{xy}}{\partial y} \right) \right]$$

$$L_{44} = D_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2D_{26} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + D_{22} \frac{\partial^2}{\partial y^2} - C_{44}$$

$$L_{45} = \left[\left(\frac{B_{16}}{R_x} + \frac{B_{26}}{R_y} + \frac{2B_{66}}{R_{xy}} - C_{45} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{B_{12}}{R_x} + \frac{B_{22}}{R_y} + \frac{2B_{26}}{R_{xy}} - C_{44} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] - \left[\left(\frac{B_{16}}{R_x^2} \frac{\partial R_x}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{B_{26}}{R_y^2} \frac{\partial R_y}{\partial x} + \frac{2B_{66}}{R_{xy}^2} \frac{\partial R_{xy}}{\partial x} \right) + \left(\frac{B_{12}}{R_x^2} \frac{\partial R_x}{\partial y} + \frac{B_{22}}{R_y^2} \frac{\partial R_y}{\partial y} + \frac{2B_{26}}{R_{xy}^2} \frac{\partial R_{xy}}{\partial y} \right) \right]$$

$$L_{51} = - \left[\left(\frac{A_{11}}{R_x} + \frac{A_{12}}{R_y} + \frac{2A_{16}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{A_{16}}{R_x} + \frac{A_{26}}{R_y} + \frac{2A_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

$$L_{52} = - \left[\left(\frac{A_{16}}{R_x} + \frac{A_{26}}{R_y} + \frac{2A_{66}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{A_{12}}{R_x} + \frac{A_{22}}{R_y} + \frac{2A_{26}}{R_{xy}} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right]$$

$$\begin{aligned}
 L_{63} &= -\left[\left(\frac{B_{11}}{R_x} + \frac{B_{12}}{R_y} + \frac{2B_{16}}{R_{xy}} - C_{66} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{B_{16}}{R_x} + \frac{B_{26}}{R_y} + \frac{2B_{66}}{R_{xy}} - C_{46} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \\
 L_{64} &= -\left[\left(\frac{B_{16}}{R_x} + \frac{B_{26}}{R_y} + \frac{2B_{66}}{R_{xy}} - C_{46} \right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{B_{12}}{R_x} + \frac{B_{22}}{R_y} + \frac{2B_{26}}{R_{xy}} - C_{44} \right) \frac{\partial}{\partial y} \right] \\
 L_{65} &= -\left(\frac{A_{11}}{R_x^2} + \frac{2A_{12}}{R_x R_y} + \frac{4A_{16}}{R_x R_{xy}} + \frac{A_{22}}{R_y^2} + \frac{4A_{26}}{R_y R_{xy}} + \frac{4A_{66}}{R_{xy}^2} \right) + C_{66} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2C_{46} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\
 &\quad + C_{44} \frac{\partial^2}{\partial y^2}
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

在(4.1)式中,

$$\{b\} = \begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \\ m_x \\ m_y \\ q_s \end{Bmatrix} \tag{4.4}$$

$$\{c\} = \begin{Bmatrix} -\left(\frac{\partial N_x^T}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}^T}{\partial y} \right) \\ -\left(\frac{\partial N_{xy}^T}{\partial x} + \frac{\partial N_y^T}{\partial y} \right) \\ -\left(\frac{\partial M_x^T}{\partial x} + \frac{\partial M_{xy}^T}{\partial y} \right) \\ -\left(\frac{\partial M_{xy}^T}{\partial x} + \frac{\partial M_y^T}{\partial y} \right) \\ \left(\frac{N_x^T}{R_x} + \frac{N_y^T}{R_y} + \frac{2N_{xy}^T}{R_{xy}} \right) \end{Bmatrix} \tag{4.5}$$

$$\{d\} = \begin{Bmatrix} \left(\frac{\partial w}{\partial x} L_{11} + \frac{\partial w}{\partial y} L_{12} \right) w \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} L_{12} + \frac{\partial w}{\partial y} L_{22} \right) w \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} L_{13} + \frac{\partial w}{\partial y} L_{23} \right) w \\ \left(\frac{\partial w}{\partial x} L_{14} + \frac{\partial w}{\partial y} L_{24} \right) w \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} L_{51} + \frac{\partial w}{\partial y} L_{52} \right) w \end{Bmatrix} \tag{4.6}$$

$$\{e\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} + N_y \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{Bmatrix} \tag{4.7}$$

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \bar{\rho} \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + Q \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ \bar{\rho} \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + Q \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \\ Q \frac{\partial^2 u_0}{\partial t^2} + I \frac{\partial^2 \phi_x}{\partial t^2} \\ Q \frac{\partial^2 v_0}{\partial t^2} + I \frac{\partial^2 \phi_y}{\partial t^2} \\ \bar{\rho} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} \end{Bmatrix} \quad (4.8)$$

五、若干特殊情况

用广义位移 u_0 , v_0 , ϕ_x , ϕ_y 和 w 表示的一般方程(4.1)式, 非常复杂, 求解具体问题相当困难, 现在讨论若干特殊情况, 方程(4.1)可得到一定程度的化简.

(1) 对于小挠度问题, (4.1)式中的 $\{d\} = 0$.

(2) 对于没有温差的情况, (4.1)式中的 $\{c\} = 0$.

(3) 对于某些扁壳, 当 R_x , R_y , R_{xy} 沿 X , Y 方向变化不大时, 则在(4.1)中的 L_{15} , L_{25} , L_{35} , L_{45} 中与 $\frac{\partial R_x}{\partial x}$, $\frac{\partial R_y}{\partial x}$, $\frac{\partial R_{xy}}{\partial x}$, $\frac{\partial R_x}{\partial y}$, $\frac{\partial R_y}{\partial y}$, $\frac{\partial R_{xy}}{\partial y}$ 有关的那个方括号中的值为较小的量, 为简单起见可以略去.

(4) 当 $\left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y}\right)$ 和 $\left(\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y}\right)$ 为零或可以略去时, (4.7)式 $\{e\}$ 中最后一行可以写成 $\left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)$.

(5) 对于一般的应力和变形分析问题, 采用小应变小挠度理论, 在有温差的情况下, 一般方程(4.1)化为

$$\{a\} + \{b\} + \{c\} = 0 \quad (5.1)$$

(6) 对于小挠度, 有初始中面力 (N_x, N_y, N_{xy}) 情况的自由振动, 一般方程(4.1)化为

$$\{a\} + \{c\} + \{e\} + \{f\} = 0 \quad (5.2)$$

(7) 对于线性稳定问题, 一般方程(4.1)化为

$$\{a\} + \{e\} = 0 \quad (5.3)$$

需要说明, 在方程(5.3)中, 有关的位移分量, u_0 , v_0 , ϕ_x , ϕ_y 和 w 等应理解为从失稳前的平衡位置到失稳后的平衡位置的增量, 且失稳前处于薄膜应力状态. 而 $\{e\}$ 中的 N_x , N_y , N_{xy} 应理解为失稳时的内力, 有时记为 N_x^0 , N_y^0 , N_{xy}^0 .

(8) 对于平板问题, 可取 $R_x = R_y = R_{xy} = \infty$; 对于扁壳, 如 R_x , R_y 为主曲率半径时, $R_{xy} = \infty$; 对于圆柱壳, $R_x = R_{xy} = \infty$, $R_y = R$; 对于扁球壳, $R_x = R_y = R$, $R_{xy} = \infty$.

(9) 对于以树脂为基体的复合材料板壳, 由于吸收(或放出)水份所引起的膨胀(或收缩), 可通过实验求出当量温差来进行分析计算.

(10)若涉及吸或放出水份和由于温度变化所引起的材料性能变化,为了使问题不致于过分复杂,要求每一层的弹性常数和密度等必须相同(可取其平均值).而各层的性能,在前面的公式中,是可以不同的.因而可用于混合复合材料的板壳.

(11)刚度系数可以化简的若干情况:

(a)对称构造的多层壳,取中面为坐标面,在中面的一侧,每一层的材料、厚度和纤维取向可以不同,这时,

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, [B]=0, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

(b)对于正交铺层的最一般情况,每一层的材料和厚度可以不同,当坐标轴 X, Y 与纤维的纵、横方向重合时,

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & 0 \\ B_{12} & B_{22} & 0 \\ 0 & 0 & B_{66} \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (5.5)$$

(c)正交铺层,每一层的材料和厚度都相等,纤维的纵、横向与 X, Y 方向相重合,层数为

1. 偶数层时,例如 $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ$ 的情况

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{11} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} B_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{11} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

当层数趋于无穷时, $B_{11}=0$. 实际上,只要层数大于 8 层或 6 层时,就可取 $B_{11} \approx 0$, 误差也很小^[2].

2. 奇数层时,例如 $0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ/90^\circ/0^\circ$ 的情况

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, [B]=0, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

(d)斜交铺层,每一层的材料和厚度都相等,当层数为

1. 偶数层时,例如 $+\theta/-\theta/+\theta/-\theta/+\theta/-\theta$ 的情况

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, [B] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & B_{16} \\ 0 & 0 & B_{26} \\ B_{16} & B_{26} & 0 \end{bmatrix}, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

当层数趋于无穷时, $B_{16}=B_{26}=0$, 实际上,只要层数大于 8 层或 6 层时,就可取 $B_{16} \approx B_{26} \approx 0$, 误差也很小^[2].

2. 奇数层时,例如 $+\theta/-\theta/+\theta/-\theta/+\theta/-\theta/+\theta$ 的情况

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} \end{bmatrix}, [B]=0, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

当层数趋于无穷时, $A_{16} = A_{26} = D_{16} = D_{26} = 0$, 实际上, 只要层数相当多, 譬如说大于 15 层时, 取 $A_{16} \approx A_{26} \approx D_{16} \approx D_{26} \approx 0$, 对所求的结果 (指计算应力, 变形, 稳定和振动问题) 影响亦较小.

(e) 既有正交铺层又有斜交铺层, 每一层的材料和厚度相同, 在中面的一侧, 当出现 $+\theta$ 铺层时, 紧接着就是 $-\theta$ 铺层, 这种情况是实际的结构设计中常常遇到的, 或者是可以考虑采用的, 这时,

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, [B] = 0, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \quad (5.10)$$

如果将斜交铺层安排在壳厚的 $\frac{2}{3}$ 以内, 则 D_{16} 和 D_{26} , 与 D_{11} 、 D_{12} 、 D_{22} 相比为可略去的小量, 为简单起见, 取 $D_{16} \approx D_{26} \approx 0$, 对所求的结果误差也较小. 这时,

$$[A] = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & 0 \\ A_{12} & A_{22} & 0 \\ 0 & 0 & A_{66} \end{bmatrix}, [B] = 0, [D] = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & 0 \\ D_{12} & D_{22} & 0 \\ 0 & 0 & D_{66} \end{bmatrix} \quad (5.11)$$

这种铺层的安排方式与处理方法, 既能满足设计需要, 计算起来也比较方便.

(12) 在计算 B_{ij} 和 D_{ij} 时用的是原来的 XYZ 坐标系, 若改用新的坐标系 XYZ' , 使 $z' = z - z_0$, 其中 z_0 为坐标面平移的距离, 则在新坐标中, 弯曲拉伸间的耦合刚度和弯曲刚度分别为

$$\left. \begin{aligned} B_{ij}' &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} \frac{1}{2} [(h_k - z_0)^2 - (h_{k-1} - z_0)^2] = B_{ij} - A_{ij} z_0 \\ D_{ij}' &= \sum_{k=1}^n \bar{Q}_{ij}^{(k)} \frac{1}{3} [(h_k - z_0)^3 - (h_{k-1} - z_0)^3] = D_{ij} - 2B_{ij} z_0 + A_{ij} z_0^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.12)$$

由(5.12)中第一式可得

$$z_0 = \frac{B_{ij}}{A_{ij}} \quad (i, j=1, 2, 6) \quad (5.13)$$

由于 $\frac{B_{11}}{A_{11}}$, $\frac{B_{12}}{A_{12}}$, \dots , $\frac{B_{66}}{A_{66}}$ 在一般情况下并不相等, 因此, 由(5.13)算得的 z_0 , 一般只能使 B_{11}' , B_{12}' , \dots , B_{66}' 中的一个等于零, 在某些情况下可出现数个等于零的情况. 只有对于由泊桑比相同的各向同性或横观各向同性材料做成的多层壳, $\frac{B_{ij}}{A_{ij}}$ 是个常数, 因而按(5.13)式算得 z_0 以后, 可使 B_{ij}' 全为零.

总之, 采用新的坐标系以后, 能使耦合刚度中的一个或数个为零, 得到不同程度的简化. 如坐标面选择适当, 可使边界条件变得简单一些, 也可使计算工作量减小, 如何选择与铺层设计的安排和边界条件等有关, 视具体问题而定. 一般说来, 对于多层板壳和夹层板壳, 在开始计算时, 取中面作坐标面, 比较常用.

需要指出, 采用实验方法测得的弯曲刚度, 通常是对中性面而言的, 如在计算时没有取这个方向的中性面作为 $z=0$ 的坐标面, 则弯曲刚度的计算值和实验值不同, 应按(5.12)中第

二式进行换算。

关于复合材料多层板壳和夹层板壳刚度问题的研究，本身就是一项重要的而且实验工作量很大的工作，不能在本文中详细讨论。

最后还应指出，对于变厚度的复合材料扁壳，由于温度和湿度引起材料的密度、线膨胀系数、弹性常数等变化的情况，固化和加载过程中某些铺层出现开裂的情况等，本文所推导的方程不再适用。要推导出能满足上述条件的基本方程，用解析法求解也过于复杂，难于应用。这时采用有限元法进行计算，最为合适。

本文承蒙胡海昌教授审阅和指正，深表谢意。

参 考 文 献

1. Vinson, J. R. and Chou, T. W., Composite materials and their use in structures, (1975).
2. Jones, R. M., Mechanics of Composite Materials, (1975).
3. Bert, C. W. and Davis M. Eagle, Dynamics of composite sandwich and stiffened shell-type structures, *J. of Spacecraft and Rockets*, 6, 12, (1969), 1341-1361.
4. Tennyson, R. C., Buckling of laminated composite cylinders; A review, *Composites*, Jan. (1975), 17-24.
5. Deitz, A., Composite Engineering Laminates, MIT Press, Cambridge, Mass., (1969).
6. Ashton, J. E. and Whitney, J. M., Theory of Laminated Plates, (1970).
7. Bert, C. W. and Francis, P. H., Composite material mechanics; Structural mechanics, *AIAA J.* 12, 9, (1974), 1173-1186.
8. 林毅, 《复合材料工学》, 第十章, 日科技连, (1971).
9. Whitney, J. M., Stress analysis of thick lamilated composite and sandwich plates, *J. Composite Materials*, 6, (1972), 425-440.
10. Whitney, J. M. and Pagano, N. J., Shear deformation in heterogeneous anisotropic plates, *J. Applied Mechanics*, 37, (1970), 1031-1036.
11. Reissner, E., A consistent treatment of transverse shear deformation in laminated plates, *AIAA J.* (1972), 716-718.
12. Cohen, G. A., Transverse shear stiffness of laminated anisotropic shells, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 13, (1978), 205-220.

The Finite Deflection Equations of Anisotropic Laminated Shallow Shells

Wang Zhen-ming Liu Guo-xi Lü Ming-shen

(*Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing*)

Abstract

In this paper, we based on reference[1], improved and extended that which it is concerned to investigate the finite deflection equations of anisotropic laminated shallow shells subjected to static loads, dynamic loads and thermal loads. We have considered the most general bending-stretching couplings and the shear deformations in the thickness direction, and derived the equilibrium equations, boundary conditions and initial conditions. The differential equations expressed in terms of generalized displacements u_0 , v_0 , ϕ_x , ϕ_y and w are obtained. From them, we could solve the problems of stress analysis, deformation, stability and vibration. For some commonly encountered cases, we derived the simplified equations and methods.