应用数学和力学，第3卷第1期（1982年1月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

润滑理论中的广义雷诺方程和不等变分问题*

李开泰　黄艾香

（西安交通大学，1980年6月17日收到）

摘　要

本文运用张量分析工具和S-坐标系，推导了润滑理论中的广义雷诺方程及相应的不等变分问题，它计及了润滑流动中的弯曲效应，轴和轴瓦曲面内蕴性质对流动的影响.

一、前　　言

润滑理论是以雷诺方程为研究的出发点，雷诺方程是在略去惯性项，并假定轴和轴瓦曲面S_b，S_a的曲率半径为无限大时，线性化Navier-Stokes方程而得到的，因而它忽略了曲线运动产生的弯曲效应．1950年G．H．Wannier[2]及1960年H．G．Elrod[3]，分别用小参数方法，在一级近似里，导出了圆柱坐标系中的不可压的广义雷诺方程：

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{h^3\left(1-\frac{h}{D}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\right\}+\frac{\partial}{\partial z}\left\{h^3\left(1+\frac{h}{D}\right)\frac{\partial p}{\partial z}\right\}=6\mu U\frac{\partial}{\partial x}\left\{h\left(1-\frac{h}{3D}\right)\right\} \tag{1.1}$$

其中D为轴径，x是旋转方向之弧长．而G．Capriz[1]导出了在正交曲线坐标系中不可压广义雷诺方程.

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left\{\frac{h^3}{\mu}\sqrt{\frac{a_2}{a_1}}\frac{\partial p}{\partial x^1}\right\}+\frac{\partial}{\partial x^2}\left\{\frac{h^3}{\mu}\sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\frac{\partial p}{\partial x^2}\right\}$$
$$=12\sqrt{a_1a_2}\,V_3+6h^2\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\sqrt{a_2}V_1}{h}\right)+6h^2\frac{\partial}{\partial x^2}\left\{\frac{\sqrt{a_1}V_2}{h}\right\} \tag{1.2}$$

其中S_a之度量张量是 $a_{11}=a_1$，$a_{12}=a_{21}=0$，$a_{22}=a_2$.

本文采用S_θ——坐标系，运用张量分析工具，导出了可压和不可压之广义雷诺方程

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\rho\sqrt{a}}{12\mu}h^3B^\alpha_\beta a^{\beta\sigma}\frac{\partial p}{\partial x^\sigma}\right)=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\rho^2h^3\sqrt{a}}{12\mu}B^\alpha_\beta X^\beta\right)$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{1}{2}\rho\sqrt{a}hB^\alpha_\beta(V^\beta_b-U^\beta)\right)+\sqrt{a}\frac{\partial}{\partial t}(h\rho)+\sqrt{a}\rho(V^3_b-U^3) \tag{1.3}$$

其中 B^α_β 是由(3.20)所确定的二阶混合张量，$a_{\alpha\beta}$，$b_{\alpha\beta}$ 分别为曲面S_a之第一、第二基本型，a为度量张量 $a_{\alpha\beta}$ 的行列式，μ为流体粘性系数.

* 钱伟长推荐.

方程(1.3)直接包含了曲面 S_a，S_b 之内蕴性质，它不但在方程右端，而且在方程主部内包含了第一、第二基本型，平均曲率和全曲率，直接反映了曲线运动性质，体现了由于曲线运动所产生的弯曲效应．

方程 (1.3) 在某种约束条件和满足一定的边值条件下求解，由于它对应于一个凸集上泛函的极小化问题，因而是一个不等变分问题，它可借助数学规划理论，进行数值计算．

方程(1.3)对可压和不可压情形均适用．

二、S_g—坐标系

润滑流体在两个曲面 S_a、S_b 之间，经受曲线运动，曲面 S_a、S_b 在某一方面是封闭的，它们之间也作相对运动，S_a 与 S_b 所夹的空间是一个狭窄地带，沿 S_a 之法线方向，S_a，S_b之间距离 $h(x^\alpha)$称为这一地带之厚度，若 L 为 S_a,S_b 之特征长度，那么$\frac{h}{L}\ll 1$.

曲面 S 作为基础曲面，在上取其高斯坐标系(x^α)，空间任一点 P，它的矢径R可以表示为

$$\mathbf{R}=\mathbf{r}+x^3\mathbf{n}$$

其中 $\mathbf{r}$ 为 S 上M点之矢径，$\mathbf{n}$ 为 S 过 M 点之单位法线向量，P 在这一法线上任一点，x^3 坐标线恰是 S 的法 线．$x^3=\mathrm{const}$ 是 S 之“平行”曲面，它和 S 有同样的法线方向．

以后无特别声明，希腊字母 α，β，$\gamma\cdots$跑过 1，2，而拉丁字母 $i,j,k,\cdots$跑过 1，2，3，上下指标相同者，表示求和．

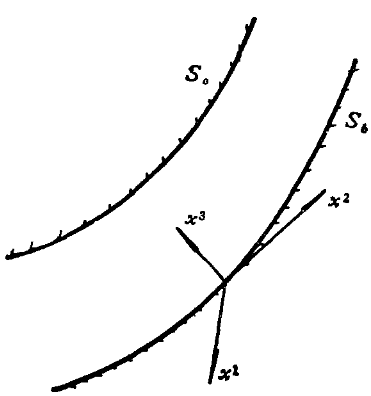

图 1　局部标架．

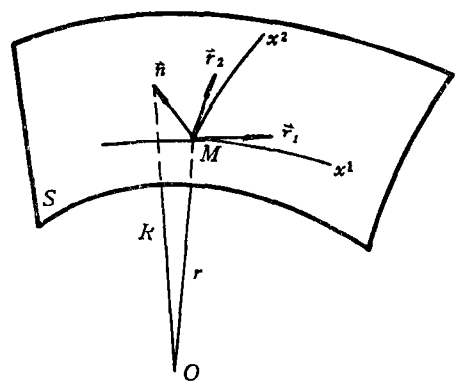

图 2　S_g——坐标系．

若取仿射标架之基矢量为

$$\mathbf{R}_\alpha=\mathbf{r}_\alpha+\mathbf{n}_\alpha x^3,\quad \mathbf{R}_3=\mathbf{n} \tag{2.1}$$

$\mathbf{r}_\alpha$ 是 S 上高斯坐标系之基矢量

$$\left.\begin{aligned}&\mathbf{n}_\alpha=\frac{\partial\mathbf{n}}{\partial x^\alpha}=-b_\alpha^\lambda\mathbf{r}_\lambda\\&b_\alpha^\lambda=a^{\lambda\beta}b_{\beta\alpha}\\&a^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}=\delta_\gamma^\alpha\end{aligned}\right\} \tag{2.2}$$

其中 $a_{\alpha\sigma}$，$b_{\alpha\beta}$ 为曲面 S 之第一、第二基本型．这样建立起来的坐标系，称为 S_0 一坐标系．

在 S_0——坐标系中，三维欧氏空间之度量张量 $g_{ij}=\mathbf{R}_i\mathbf{R}_j$ 可以通过第一、第二基本型表示：

$$\left.\begin{aligned}&g_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta}-2x^3b_{\alpha\beta}+(x^3)^2b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}\\&g_{\alpha3}=g_{3\alpha}=0,\quad g_{33}=1\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

记 $a=|a_{\alpha\beta}|\qquad g=|g_{ij}|$

则 $g=a\theta\qquad \theta=1-2Hx^3+K(x^3)^2$ (2.4)

其中 H，K 分别为曲面 S 之平均曲率和全曲率

$$\mathbf{n}=\frac{\mathbf{R}_1\times\mathbf{R}_2}{\sqrt{g}}=\frac{\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2}{\sqrt{a}}\tag{2.5}$$

这说明曲面 $\hat{S}$: $x^3=\text{const}$ 和 S 具有同样的法线．

逆变度量张量

$$\left.\begin{aligned}&g^{\alpha\beta}=\theta^{-2}\tilde{b}_\lambda^\alpha\tilde{b}^{\lambda\beta},\quad g^{\alpha3}=g^{3\alpha}=0,\quad g^{33}=1\\&\tilde{b}_\beta^\alpha=(1-2Hx^3)\delta_\beta^\alpha+x^3b_\beta^\alpha\end{aligned}\right\}\tag{2.6}$$

记 $\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda$，$\Gamma_{\alpha\beta,\lambda}$ 为曲面 S 之第二，第一 Christoffel 记号，而 G_{ij}^k，$G_{ij,k}$ 记空间的第二、第一 Christoffel 记号，那么它们之间有如下关系．

$$\left.\begin{aligned}&G_{\alpha\beta,\lambda}=\Gamma_{\alpha\beta,\lambda}-x^3(\nabla_\beta b_{\alpha\lambda}+2\Gamma_{\alpha\beta}^\sigma b_{\sigma\lambda})+(x^3)^2(b_\lambda^\sigma\nabla_\beta b_{\alpha\sigma}+\Gamma_{\alpha\beta}^\gamma b_{\lambda\sigma}b_\gamma^\sigma\\&G_{\alpha\beta,3}=-G_{\alpha3,\beta}=b_{\alpha\beta}-x^3b_\alpha^\lambda b_{\lambda\beta}\\&G_{\alpha3,3}=0,\quad G_{33,k}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.7}$$

$$\left.\begin{aligned}&G_{\alpha\beta}^\lambda=g^{\lambda\sigma}G_{\alpha\beta,\sigma}=\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda-x^3\nabla_\beta b_\alpha^\lambda-(x^3)^2b_\gamma^\lambda b_\beta^\gamma-\cdots\cdots\\&\qquad(\text{通项为}-(x^3)^n b_{\gamma_1}^\lambda b_{\gamma_2}^{\gamma_1}\cdots b_{\gamma_{n-1}}^{\gamma_{n-2}}\nabla_\alpha b_\beta^{\gamma_{n-2}})\\&G_{\alpha3}^\beta=g^{\beta\sigma}G_{\alpha3,\sigma}=b_\alpha^\beta-x^3b_\gamma^\beta b_\alpha^\gamma-(x^3)^2b_{\gamma_1}^\beta b_{\gamma_2}^{\gamma_1}b_\alpha^{\gamma_2}-\cdots\cdots\\&G_{3\alpha}^3=0,\ G_{33}^\alpha=0,\ G_{\alpha3}^3=0\end{aligned}\right\}\tag{2.8}$$

其中 ∇_β 表示曲面张量之一阶协变导数．

由于润滑流体区域 Ω 限于一个狭窄的空间，当我们取 S_0 作为基础曲面 S，那么在 Ω 内，$0\leqslant x^3\leqslant h$，并且一般都满足 $1\pm K_1h\approx1$，$1\pm K_2h\approx1$，其中 K_i 是主曲率，这时我们略去 x^3 高阶小量，则(2.3)，(2.6)，(2.7)，(2.8)变为

$$\left.\begin{aligned}&g_{\alpha\beta}=a_{\alpha\beta},\quad g_{\alpha3}=g_{3\alpha}=0,\ g_{33}=1,\quad g=a\\&g^{\alpha\beta}=a^{\alpha\beta},\quad g^{\alpha3}=g^{3\alpha}=0,\quad g^{33}=1\end{aligned}\right\}\tag{2.9}$$

$$\left.\begin{aligned}&G_{\alpha\beta,\lambda}=\Gamma_{\alpha\beta,\lambda}-x^3\nabla_\beta b_{\alpha\lambda},\quad G_{\alpha\beta,3}=b_{\alpha\beta}\\&G_{\alpha3,\beta}=-b_{\alpha\beta},\quad G_{\alpha3,3}=0,\quad G_{33,k}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.10}$$

$$\left.\begin{aligned}&G_{\alpha\beta}^\lambda=\Gamma_{\alpha\beta}^\lambda-x^3\nabla_\alpha b_\beta^\lambda,\quad G_{\alpha\beta}^3=b_{\alpha\beta}\\&G_{\alpha3}^\beta=-b_\alpha^\beta,\quad G_{\alpha3}^3=0,\quad G_{33}^k=0\end{aligned}\right\}\tag{2.11}$$

尤其当 S 是球面或圆柱面时，$\nabla_\sigma b_\alpha^\lambda=0$，因而有

$$\left.\begin{aligned}&G_{\alpha\beta,\lambda}=\Gamma_{\alpha\beta,\lambda},\quad G_{\alpha\beta,3}=b_{\alpha\beta},\quad G_{\alpha3,\beta}=-b_{\alpha\beta}\\&G_{\alpha3,3}=0,\quad G_{33,k}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.12}$$

$$\left.\begin{aligned}&G^{\lambda}_{\alpha\beta}=\Gamma^{\lambda}_{\alpha\beta},\ G^{3}_{\alpha\beta}=b_{\alpha\beta},\ G^{\beta}_{\alpha 3}=-b^{\beta}_{\alpha}\\&G^{3}_{\alpha 3}=0,\ G^{k}_{33}=0\end{aligned}\right\}\tag{2.13}$$

任一矢量 u 可以表示为

$$\mathbf{u}=u^{\alpha}\mathbf{R}_{\alpha}+u^{3}\mathbf{n},\quad u_{\alpha}=a_{\alpha\beta}u^{\beta}$$

记 $\tilde{\nabla}_i$ 为空间张量之一阶协变导数，那么

$$\tilde{\nabla}_i u^j=\frac{\partial u^j}{\partial x^i}+G^j_{ik}u^k\tag{2.14}$$

将(2.11)代入(2.14)得

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\nabla}_{\alpha}u^{\beta}=\nabla_{\alpha}u^{\gamma}-x^{3}\nabla_{\alpha}b^{\beta}_{\sigma}u^{\sigma}-b^{\beta}_{\alpha}u^{3}\\&\tilde{\nabla}_{\alpha}u^{3}=\frac{\partial u^{3}}{\partial x^{\alpha}}+b_{\alpha\sigma}u^{\sigma}\\&\tilde{\nabla}_{3}u^{\alpha}=\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{3}}-b^{\alpha}_{\beta}u^{\beta}\\&\tilde{\nabla}_{3}u^{3}=\frac{\partial u^{3}}{\partial x^{3}}\end{aligned}\right\}\tag{2.15}$$

其中

$$\nabla_{\alpha}u^{\beta}=\frac{\partial u^{\beta}}{\partial x^{\alpha}}+\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}u^{\sigma}$$

关于二阶张量的协变导数同样可以导出：

$$\tilde{\nabla}_k f^{ij}=\frac{\partial f^{ij}}{\partial x^k}+G^i_{km}f^{mj}+G^j_{km}f^{im}$$

对于 $f^{3\alpha}$，f^{33} 等分量，在曲面张量场中，视为一阶逆变张量和数量，因而利用 (2.11) 可得

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{\nabla}_{\sigma}f^{\alpha\beta}=\nabla_{\sigma}f^{\alpha\beta}-x^{3}(f^{\gamma\beta}\nabla_{\sigma}b^{\alpha}_{\gamma}+f^{\alpha\gamma}\nabla_{\sigma}b^{\beta}_{\gamma})-b^{\alpha}_{\sigma}f^{3\beta}-b^{\beta}_{\sigma}f^{\alpha 3}\\&\tilde{\nabla}_{\sigma}f^{\alpha 3}=\nabla_{\sigma}f^{\alpha 3}-x^{3}f^{\beta 3}\nabla_{\sigma}b^{\alpha}_{\beta}+b_{\sigma\beta}f^{\alpha\beta}-b^{\alpha}_{\sigma}f^{33}\\&\tilde{\nabla}_{\sigma}f^{3\alpha}=\nabla_{\sigma}f^{3\alpha}-x^{3}f^{3\beta}\nabla_{\sigma}b^{\alpha}_{\beta}+b_{\sigma\beta}f^{\beta\alpha}-b^{\alpha}_{\sigma}f^{33}\\&\tilde{\nabla}_{\sigma}f^{33}=\nabla_{\sigma}f^{33}+b_{\sigma\alpha}(f^{3\alpha}+f^{\alpha 3})\\&\tilde{\nabla}_{3}f^{\alpha\beta}=\frac{\partial f^{\alpha\beta}}{\partial x^{3}}-b^{\alpha}_{\sigma}f^{\sigma\beta}-b^{\beta}_{\sigma}f^{\alpha\sigma}\\&\tilde{\nabla}_{3}f^{3\alpha}=\frac{\partial f^{3\alpha}}{\partial x^{3}}-b^{\alpha}_{\sigma}f^{3\sigma}\\&\tilde{\nabla}_{3}f^{\alpha 3}=\frac{\partial f^{\alpha 3}}{\partial x^{3}}-b^{\alpha}_{\sigma}f^{\sigma 3}\\&\tilde{\nabla}_{3}f^{33}=\frac{\partial f^{33}}{\partial x^{3}}\end{aligned}\right\}\tag{2.16}$$

如果我们利用曲面论公式

$$\left.\begin{aligned}&b^{\alpha}_{\alpha}=a^{\alpha\beta}b_{\beta\alpha}=2H\\&\nabla_{\alpha}b_{\beta\sigma}-\nabla_{\sigma}b_{\beta\alpha}=0\\&b^1_1b^2_2-b^1_2b^2_1=K\end{aligned}\right\}\tag{2.17}$$

其中 H 为曲面 S 之平均曲率，K 为全曲率或 Gauss 曲率，那么可以推出

$$\nabla_\alpha b^\alpha_\sigma=\nabla_\sigma b^\alpha_\alpha=2\nabla_\sigma H \tag{2.18}$$

对(2.16)进行指标缩并，并利用(2.17)，(2.18)得

$$\tilde{\nabla}_i f^{i\alpha}=\nabla_\sigma f^{\sigma\alpha}+\tilde{\nabla}_3 f^{3\alpha}=\nabla_\sigma f^{\sigma\alpha}-x^3[2f^{\sigma\alpha}\nabla_\sigma H+f^{\sigma\beta}\nabla_\sigma b^\alpha_\beta]$$

$$-2Hf^{3\alpha}-b^\alpha_\sigma(f^{\sigma3}+f^{3\sigma})+\frac{\partial f^{3\alpha}}{\partial x^3} \tag{2.19}$$

$$\tilde{\nabla}_i f^{i3}=\tilde{\nabla}_\sigma f^{\sigma3}+\tilde{\nabla}_3 f^{33}=\nabla_\sigma f^{\sigma3}-2x^3f^{\sigma3}\nabla_\sigma H+b_{\sigma\beta}f^{\sigma\beta}-2Hf^{33}+\frac{\partial f^{33}}{\partial x^3} \tag{2.20}$$

尤其是，下列二阶张量将是我们所感兴趣的：

$$f^{i\alpha}=\mu[g^{\alpha m}\tilde{\nabla}_m u^i+g^{mi}\tilde{\nabla}_m u^\alpha] \tag{2.21}$$

利用(2.15)，(2.9)则(2.21)可以表示为

$$f^{\sigma\alpha}=\mu\{\nabla^\alpha u^\sigma+\nabla^\sigma u^\alpha-x^3[\nabla^\sigma b^\alpha_\gamma+\nabla^\alpha b^\sigma_\gamma]u^\gamma-2b^{\alpha\sigma}u^3\}$$

这里$\nabla^\sigma\cdot=a^{\sigma\gamma}\nabla_\gamma\cdot$，如果利用(2.17)，那么

$$\nabla^\sigma b^\alpha_\gamma+\nabla^\alpha b^\sigma_\gamma=a^{\sigma\beta}\nabla_\beta b^\alpha_\gamma+a^{\alpha\beta}\nabla_\beta b^\sigma_\gamma=a^{\sigma\beta}\nabla_\gamma b^\alpha_\beta+a^{\alpha\beta}\nabla_\gamma b^\sigma_\beta=2\nabla_\gamma b^{\alpha\sigma}$$

故

$$\left.\begin{aligned}f^{\sigma\alpha}=f^{\alpha\sigma}&=\mu[\nabla^\alpha u^\sigma+\nabla^\sigma u^\alpha-2x^3\nabla_\gamma b^{\alpha\sigma}u^\gamma-2b^{\alpha\sigma}\cdot u^3]\\ f^{3\alpha}=f^{\alpha3}&=\mu\left[a^{\alpha\beta}\frac{\partial u^3}{\partial x^\beta}+\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3}\right]\end{aligned}\right\} \tag{2.22}$$

将(2.22)代入(2.20)后，得

$$\begin{aligned}\nabla_i f^{i\alpha}=&\nabla_\sigma\{\mu[\nabla^\alpha u^\sigma+\nabla^\alpha u^\alpha-2x^3\nabla_\gamma b^{\alpha\sigma}\cdot u^\gamma-2b^{\alpha\sigma}\cdot u^3]\}\\ &-\mu x^3\{2[\nabla^\alpha u^\sigma+\nabla^\sigma u^\alpha-2x^3\nabla_\gamma b^{\alpha\sigma}u^\gamma-2b^{\alpha\sigma}\cdot u]\nabla_\sigma H\\ &+[\nabla^\beta u^\sigma+\nabla^\sigma u^\beta-2x^3\nabla_\gamma b^{\beta\sigma}\cdot u^\gamma-2b^{\beta\sigma}\cdot u^3]\nabla_\sigma b^\alpha_\beta\}\\ &+\frac{\partial}{\partial x^3}\left\{\mu\left(a^{\alpha\beta}\frac{\partial u^3}{\partial x^\beta}+\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3}\right)\right\}-2\mu H\left\{a^{\alpha\beta}\frac{\partial u^3}{\partial x^\beta}+\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3}\right\}\\ &-2\mu b^\alpha_\sigma\left[a^{\sigma\beta}\frac{\partial u^3}{\partial x^\beta}+\frac{\partial u^\sigma}{\partial x^3}\right]\end{aligned} \tag{2.23}$$

三、广义雷诺方程

在S_0——坐标系下，润滑流体所应满足的微分方程，称为广义雷诺方程，它考虑了曲线运动所产生的弯曲效应.

我们取x^3方向的平均值来代替原来的数值，对于流体运动速度，取

$$\overline{u}=\frac{1}{h}\int_0^h u\,dx^3$$

显然，由(2.9)可推出： $\overline{\mathbf{u}}=\overline{u^\alpha}\mathbf{R}_\alpha+\overline{u^3}\,\mathbf{n}$

其中$\overline{u^\alpha}=\frac{1}{h}\int_0^h u^\alpha dx^3$，$\overline{u^3}=\frac{1}{h}\int_0^h u^3 dx^3$，由于$\rho$沿$x^3$方向变化很小，$\overline{\rho}=\rho$那么质量流量密度

$$\mathbf{q}=\rho h\overline{u^\alpha}\mathbf{R}_\alpha=q^\alpha\mathbf{R}_\alpha$$

$$q^\alpha=\rho h\overline{u^\alpha}=\rho\int_0^h u^\alpha dx^3 \tag{3.1}$$

3.1 连续性方程

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\mathrm{div}(\rho\mathbf{u})=0$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial}{\partial x^i}(\sqrt{g}\,\rho u^i)=0$$

由于(2.9)，连续性方程可以表为

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{a}\,\rho u^\alpha)+\frac{\partial}{\partial x^3}(\rho u^3)=0$$

沿着x^3方向积分，可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t}(h\rho)+\frac{1}{\sqrt{a}}\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(\sqrt{a}\,q^\alpha)+\rho V^3_b=0 \tag{3.2}$$

其中 $u^3(0)=0,\qquad u^3(h)=V^3_b$

3.2 动量方程

Navier-Stokes 方程的张量形式

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}+u^j\tilde{\nabla}_j u^i=X^i-\frac{1}{\rho}g^{ij}(\tilde{\nabla}_j(\rho-\lambda\mathrm{div}\mathbf{u}))+\frac{1}{\rho}g^{ek}\tilde{\nabla}_k[\mu g^{im}(\tilde{\nabla}_m u_e+\tilde{\nabla}_e u_m)] \tag{3.3}$$

其中u^i，u_i分别为**u**之逆变分量和协变分量，λ，μ为粘性系数，并且一般有

$$3\lambda+2\mu=0$$

X^i为体积力之逆变分量，用$u_i=g_{ij}u^j$代替，并且注意到g_{ij}，g^{ij}关于协变导数为零，故

$$g^{ek}\tilde{\nabla}_k[\mu g^{im}(\tilde{\nabla}_m u_e+\tilde{\nabla}_e u_m)=\tilde{\nabla}_k[\mu(g^{im}\tilde{\nabla}_m u^k+g^{ek}\tilde{\nabla}_j u^i)]$$

则(3.3)可以表示为

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}+u^j\tilde{\nabla}_j u^i=X^i-\frac{1}{\rho}g^{ij}\tilde{\nabla}_j(p-\lambda\mathrm{div}\mathbf{u})+\frac{1}{\rho}\tilde{\nabla}_k[\mu(g^{im}\tilde{\nabla}_m u^k+g^{jk}\tilde{\nabla}_j u^i)] \tag{3.4}$$

当λ，μ为常数时，(3.4)可以表示为

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}+u^j\tilde{\nabla}_j u^i=X^i-\frac{1}{\rho}g^{ij}\tilde{\nabla}_j(p-(\lambda+\mu)\mathrm{div}\mathbf{u})+\frac{\mu}{\rho}g^{ek}\tilde{\nabla}_k\tilde{\nabla}_e u^i \tag{3.5}$$

如果流体是不可压，$\mathrm{div}\mathbf{u}=0$，则 (3.4)，(3.5) 变为

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}+u^j\tilde{\nabla}_j u^i=X^i-\frac{1}{\rho}g^{ij}\tilde{\nabla}_j p+\frac{1}{\rho}\tilde{\nabla}_k[\mu(g^{im}\tilde{\nabla}_m u^k+g^{ek}\tilde{\nabla}_e u^i)] \tag{3.6}$$

$$\frac{\partial u^i}{\partial t}+u^j\tilde{\nabla}_j u^i=X^i-\frac{1}{\rho}g^{ij}\tilde{\nabla}_j p+\frac{\mu}{\rho}g^{ek}\tilde{\nabla}_e\tilde{\nabla}_k u^i \tag{3.7}$$

利用表达式(2.21)及(2.9)，则(3.4)对于 i 只取1，2，就有

$$\frac{\partial u^\alpha}{\partial t}+u^j\tilde{\nabla}_j u^\alpha=X^\alpha-\frac{1}{\rho}a^{\alpha\beta}\nabla_\beta(p-\lambda\mathrm{div}\mathbf{u})+\frac{1}{\rho}\tilde{\nabla}_k f^{k\alpha}$$

略去惯 项和u^3，则得

$$a^{\alpha\beta}\tilde{\nabla}_\beta(p-\lambda\mathrm{div}\,\mathbf{u})=\rho X^\alpha+\nabla_\sigma\{\mu[\nabla^\alpha u^\sigma+\nabla^\sigma u^\alpha-2x^3\nabla_\nu b^{\alpha\sigma}\cdot u^\nu]\}$$
$$-2\mu x^3\{2[\nabla^\alpha u^\sigma+\nabla^\sigma u^\alpha-2x^3\nabla_\nu b^{\alpha\sigma}u^\nu]\nabla_\sigma H$$
$$+[\nabla^\beta u^\sigma+\nabla^\sigma u^\beta-2x^3\nabla_\nu b^{\sigma\beta}u^\nu b^\alpha_\beta]\nabla_\sigma b^\alpha_\beta\}$$
$$+\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\mu\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3}\right)-2\mu H\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3}-2\mu b^\alpha_\sigma\frac{\partial u^\sigma}{\partial x^3} \tag{3.8}$$

由于u^α随x^β变化要比随x^3变化小得多，因而在略去u^α关于x^β导数及x^3的高阶无穷小量之后，(3.8) 可以表示为

$$\frac{\partial}{\partial x^3}\left(\mu\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3}\right)-2\mu H\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3}-2\mu b^\alpha_\sigma\frac{\partial u^\sigma}{\partial x^3}=a^{\alpha\beta}\nabla_\beta p-\rho X^\alpha \tag{3.9}$$

令
$$y^\alpha=\mu\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^3},\quad f^\alpha=a^{\alpha\beta}\nabla_\beta p-\rho X^\alpha,\quad x^3=t \tag{3.10}$$

$$H^\alpha_\beta=2(H\delta^\alpha_\beta+b^\alpha_\beta) \tag{3.11}$$

那么，(3.9)可表示为

$$\frac{dy^\alpha}{dt}=H^\alpha_\beta y^\beta+f^\alpha \tag{3.12}$$

注意到(3.10)，积分上式，并且H^α_β，f^α与t无关，因而

$$\frac{du^\alpha(t)}{dt}=\frac{du^\alpha(0)}{dt}+H^\alpha_\beta[u^\beta(t)-u^\beta(0)]+\frac{t}{\mu}f^\alpha \tag{3.13}$$

再积分一次

$$u^\alpha(t)=u^\alpha(0)+t\frac{du^\alpha(0)}{dt}+H^\alpha_\beta\left(\int_0^t u^\beta(\xi)d\xi-tu^\alpha(0)\right)+\frac{t^2}{2\mu}f^\alpha \tag{3.14}$$

对(3.14)再从0到h积分一次，且两边乘 ρ，得

$$q^\alpha=h\rho u^\alpha(0)+\frac{\rho h^2}{2}\frac{du^\alpha(0)}{dt}+H^\alpha_\beta\left(\rho\int_0^h(h-\xi)u^\beta(\xi)d\xi-\frac{\rho h^2}{2}u^\beta(0)\right)+\frac{\rho h^3}{6\mu}f^\alpha$$

由于函数 $h-\xi$ 在$(0,\ h)$单调下降，且非负，故运用积分第二中值定理

$$\rho\int_0^h(h-\xi)u^\beta(\xi)d\xi\approx hq^\beta$$

故
$$q^\alpha=h\rho u^\alpha(0)+\frac{\rho h^2}{2}\left(\frac{du^\alpha(0)}{dt}-H^\alpha_\beta u^\beta(0)\right)+hH^\alpha_\beta q^\beta+\frac{\rho h^3}{6\mu}f^\alpha \tag{3.15}$$

为了确定$\frac{du^\alpha(0)}{dt}$，令(3.14)中$t=h$，则

$$u^\alpha(h)=u^\alpha(0)+h\frac{du^\alpha(0)}{dt}-H^\alpha_\beta\frac{q^\beta}{\rho}-hH^\alpha_\beta u^\beta(0)+\frac{h^2}{2\mu}f^\alpha$$

$$\left(\frac{du^\alpha(0)}{dt}-H^\alpha_\beta u^\beta(0)\right)=\frac{u^\alpha(h)-u^\alpha(0)}{h}-\frac{h}{2\mu}f^\alpha-\frac{1}{\rho h}H^\alpha_\beta q^\beta \tag{3.16}$$

代入(3.15)得

$$q^\alpha=h\rho u^\alpha(0)+\frac{\rho h}{2}(u^\alpha(h)-u^\alpha(0))-\frac{\rho h^3}{12\mu}f^\alpha+\left(\frac{h}{2}H^\alpha_\beta\right)q^\beta \tag{3.17}$$

将(3.11)代入(3.17)可得

$$A^{\alpha}_{\beta}q^{\beta}=-\frac{\rho h^3}{12\mu}f^{\alpha}+h\rho u^{\alpha}(0)+\frac{\rho h}{2}(u^{\alpha}(h)-u^{\alpha}(0)) \tag{3.18}$$

$$A^{\alpha}_{\beta}=\delta^{\alpha}_{\beta}-\frac{h}{2}H^{\alpha}_{\beta}=(1-Hh)\delta^{\alpha}_{\beta}-hb^{\alpha}_{\beta}$$

令

$$A=\begin{vmatrix}A^1_1 & A^1_2\\ A^2_1 & A^2_2\end{vmatrix}=(1-Hh-hb^1_1)(1-Hh-hb^2_2)-h^2b^1_2b^2_1$$

利用(2.17)可得

$$A=(1-Hh)(1-3Hh)-h^2K=1-4Hh+(3H^2-K)h^2 \tag{3.19}$$

显然，A 是一个不变量.

引入二阶张量

$$C^{11}=C^{22}=0,\quad C^{12}=-C^{21}=\frac{1}{\sqrt{a}}$$

$$C_{11}=C_{22}=0,\quad C_{12}=-C_{21}=\sqrt{a}$$

和混合张量

$$B^{\alpha}_{\beta}=\frac{[(1-Hh)\delta^{\alpha}_{\beta}-hC^{\alpha\gamma}C_{\beta\sigma}b^{\sigma}_{\gamma}]}{A}=\frac{[\delta^{\alpha}_{\beta}-h(H\delta^{\alpha}_{\beta}+C^{\alpha\gamma}C_{\beta\sigma}b^{\sigma}_{\gamma})]}{A} \tag{3.20}$$

那么，(3.18)的解可以表示为

$$q^{\alpha}=h\rho B^{\alpha}_{\beta}u^{\beta}(0)+\frac{1}{2}h\rho B^{\alpha}_{\beta}(u^{\beta}(h)-u^{\beta}(0))-\frac{\rho h^3}{12\mu}B^{\alpha}_{\beta}f^{\beta}$$

代入(3.2)得

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\sqrt{a}\,\rho h^3}{12\mu}B^{\alpha}_{\beta}f^{\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(\sqrt{a}\,h\rho B^{\alpha}_{\beta}u^{\beta}(0))$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\rho hB^{\alpha}_{\beta}(u^{\beta}(h)-u^{\beta}(0))+\sqrt{a}\frac{\partial}{\partial t}(h\rho)+\sqrt{a}\,\rho V^3_b\right.$$

令$V^{\alpha}_b=u^{\alpha}(h)$，$U^{\alpha}=u^{\alpha}(0)=0$ 并将(3.10)代入，得

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\sqrt{a}\,\rho h^3}{12\mu}B^{\alpha}_{\beta}a^{\beta\sigma}\frac{\partial p}{\partial x^{\sigma}}\right)=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\sqrt{a}\,\rho^2h^3}{12\mu}B^{\alpha}_{\beta}X^{\beta}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\rho hB^{\alpha}_{\beta}V^{\beta}_b\right)+\sqrt{a}\frac{\partial}{\partial t}(h\rho)+\sqrt{a}\,\rho V^3_b \tag{3.21}$$

当U^{α}，U^3 不为零时，(3.21) 可以写成

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\sqrt{a}\,\rho h^3}{12\mu}B^{\alpha}_{\beta}a^{\beta\sigma}\frac{\partial p}{\partial x^{\alpha}}\right)=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\sqrt{a}}{12\mu}\rho^2h^3B^{\alpha}_{\beta}X^{\beta}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left[\frac{\sqrt{a}}{2}\rho hB^{\alpha}_{\beta}(V^{\beta}_b-U^{\beta})\right]+\sqrt{a}\frac{\partial}{\partial t}(h\rho)+\sqrt{a}\,\rho(V^3_b-U^3) \tag{3.22}$$

当润滑流体是不可压时，则(3.22)可以表示为

$$\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\sqrt{a}\,h^3}{12\mu}B^{\alpha}_{\beta}a^{\beta\sigma}\frac{\partial p}{\partial x^{\sigma}}\right)=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\sqrt{a}}{12\mu}\rho h^3B^{\alpha}_{\beta}X^{\beta}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}hB^{\alpha}_{\beta}(V^{\beta}_b-U^{\beta})\right)+\sqrt{a}\frac{\partial}{\partial t}(h)+\sqrt{a}(V^3_b-U^3) \tag{3.23}$$

它是压力 p 的线性椭圆型方程.

如果流体是理想气体，则 $p=\rho RT$，那么(3.22)变为

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}\,h^3}{12\mu}B^\alpha_\beta a^{\beta\sigma}p\frac{\partial p}{\partial x^\sigma}\right)=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}}{12\mu}h^3B^\alpha_\beta X^\beta p^2\right)\Big/RT$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left[\frac{\sqrt{a}}{2}hB^\alpha_\beta p(V^\beta_b-U^\beta)\right]+\sqrt{a}\frac{\partial}{\partial t}(hp)+\sqrt{a}\,p(V^3_b-U^3) \qquad (3.24)$$

它是压力 p 的拟线性椭圆型方程.

张量 B^α_β 实际上是

$$B^1_1=[1-h(H+b^2_2)]/A$$
$$B^1_2=-hb^1_2/A$$
$$B^2_1=-hb^2_1/A$$
$$B^2_2=[1-h(H+b^1_1)]/A$$

令 $A^{\alpha\sigma}=B^\alpha_\beta a^{\beta\sigma}$，由于 B^α_β 是 h 一次多项式，A 是 h 的二次多项式，且 $A|_{h=0}=1$，而 $B^\alpha_\beta|_{h=0}=\delta^\alpha_\beta$，故

$$A^{\alpha\sigma}|_{h=0}=a^{\alpha\sigma} \qquad (3.25)$$

因而，如果欲使 p 的微分方程的主部只保持 h 的三次幂，那么，(3.22)变为

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}\,\rho h^3}{12\mu}a^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial x^\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}}{12\mu}\rho h^3X^\alpha\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}h\rho(V^\alpha_b-U^\alpha)\right)+\sqrt{a}\frac{\partial}{\partial t}(h\rho)+\rho\sqrt{a}(V^3_b-U^3) \qquad (3.26)$$

方程(3.22)或(3.26)称为广义雷诺方程，它考虑了曲线运动所产生的弯曲效应，与(1.1)，(1.2)比较，方程(3.22)更深刻地反映了轴瓦曲面的内蕴性质对润滑流动的影响，在广义雷诺方程(3.22)的方程主部中和方程右端中，均出现曲面 S_0 之第一、第二基本型，平均曲率和全曲率.

当曲面 S_0 上的高斯坐标系取曲率线坐标系时

$$a_{12}=0,\quad b_{12}=0,\quad b^1_2=b^2_1=0$$
$$b_{11}=K_1a_{11},\quad b_{22}=K_2a_{22},\quad K_1=b^1_1,\quad K_2=b^2_2$$

K_1，K_2 为主曲率，因而

$$B^1_1=[1-h(H+K_2)]/A$$
$$B^2_2=[1-h(H+K_1)]/A$$
$$B^1_2=B^2_1=0$$

在这种坐标系下

$$A^{11}=[1-h(H+K_2)]a^{11}/A$$
$$A^{22}=[1-h(H+K_1)]a^{22}/A$$
$$A^{12}=A^{21}=0$$

这时方程(3.22)可表示为

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\sqrt{a}\,\rho h^3}{12\mu}\frac{1-h(H+K_2)}{A}a^{11}\frac{\partial p}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\sqrt{a}\,\rho h^3}{12\mu}\frac{1-h(H+K_1)}{A}a^{22}\frac{\partial p}{\partial x^2}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{\sqrt{a}}{12\mu}\rho^2h^3\frac{1-h(H+K_2)}{A}X^1\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{\sqrt{a}}{12\mu}\rho^2h^3\frac{1-h(H+K_1)}{A}X^2\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^1}\left[\frac{\sqrt{a}}{2}\rho h\frac{1-h(H+K_2)}{A}(V^1_b-U^1)\right]+\frac{\partial}{\partial x^2}\left[\frac{\sqrt{a}}{2}\rho h\frac{1-h(H+K_1)}{A}(V^2_b\right.$$

$$\left.-U^2\right]+\sqrt{a}\frac{\partial}{\partial t}(h\rho)+\sqrt{a}\rho(V^3_b-U^3) \tag{3.27}$$

边界条件分为两大类，设 $\Gamma\equiv\partial\Omega=\Gamma_1\cup\Gamma_2$，$\Gamma_1$ 为自由表面，Γ_2 为固定表面，于是

$$\begin{cases} p|_{\Gamma_2}=p_0 \\ \left[\frac{h^3\rho}{12\mu}\sqrt{a}B^\alpha_\lambda a^{\lambda\beta}\nabla_\beta p\cdot n_\alpha+\frac{\sqrt{a}}{2}\rho hB^\alpha_\beta(V^\beta_b-U^\beta)\cdot n_\alpha\right]\Big|_{\Gamma_1}=g \end{cases} \tag{3.28}$$

其中 n_α 为 n 之协变分量.

如果油膜出现空泡现象，设 $D\subset\Omega$ 是流体占据的区域，它是有界开集，$\partial D\cap\Omega=\Gamma_c$ 是空泡边界和Ω的交集，在 Γ_c 上，p 应满足边界条件.

$$p|_{\Gamma_c}=0,\qquad \left.\frac{\partial p}{\partial n}\right|_{\Gamma_c}=0 \tag{3.29}$$

我们的问题是在Ω内求一个子集D，使得在D内满足微分方程(3.22)，在Γ_c上满足(3.29)，在$\Gamma_1\cup\Gamma_2$上满足(3.28)，并且如果把大气压作为压力起点，那么还应满足

$$p\geqslant 0 \tag{3.30}$$

四、相应的不等变分问题

设V是$H^1(\Omega)$的子空间，$V=\{u\in H^1(\Omega)\,|\,u|_{\Gamma_2}=0\}$，那么，对于$V$中的函数，仍然成立 Fridrichs 不等式[1]：

$$\int_\Omega u^2dx\leqslant C\int_\Omega|\nabla u|^2dx\quad\forall u\in V$$

因而，在V上，范数$\|\cdot\|$和半范$|u|_1^2=|\nabla u|_0^2=\int|\nabla u|^2dx$是等价的，我们可以记$\|u\|_V^2=|u|_1^2$.

下面我们仅对方程(3.22)进行讨论．先讨论不可压缩情形，这时，p应满足(3.22)，设

$$M^{\alpha\beta}=\frac{h^3}{12\mu}\sqrt{a}\,a^{\alpha\beta} \tag{4.1}$$

因为　$\nabla_\beta p=\frac{\partial p}{\partial x^\beta}$，在静态情形下，(3.22)可以表示为

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(M^{\alpha\beta}\frac{\partial p}{\partial x^\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{h^3}{12\mu}\sqrt{a}\,\rho X^\alpha\right)+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}\rho h(V^\alpha_b-U^\alpha)\right)$$

$$+\sqrt{a}\,\rho(V^3_b-U^3) \tag{4.2}$$

设$p_0\in H^{3/2}(\Gamma_2)$，根据迹定理，存在$\tilde{p}_0\in H^2(\Omega)$，使得

$$\tilde{p}_0|_{\Gamma_2}=p_0$$

令$u=p-\tilde{p}_0$，那么$u|_{\Gamma_2}=0$，故$u\in V$　设$U^i=0$，代入(4.2)得

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(M^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x^\beta}+M^{\alpha\beta}\frac{\partial \tilde{p}}{\partial x^\beta}-\frac{1}{2}\sqrt{a}\,hV_b^\alpha-\frac{h^3}{12\mu}\sqrt{a}\,\rho X^\alpha\right)-\sqrt{a}\,V_b^3=0 \qquad (4.3)$$

设

$$f=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(-M^{\alpha\beta}\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial x^\beta}\right)+\frac{1}{2}\sqrt{a}\,h(V_b^\alpha-U^\alpha)+\frac{h^3}{12\mu}\sqrt{a}\,\rho X^\alpha$$

$$+\sqrt{a}(V_b^3-U^3) \qquad (4.4)$$

则有

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(M^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x^\beta}\right)=f\\&M^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x^\beta}n_\alpha|_{\Gamma_1}=\tilde{g}\end{aligned}\right\} \qquad (4.5)$$

其中

$$\tilde{g}=g-M^{\alpha\beta}\frac{\partial \tilde{p}_0}{\partial x^\beta}n_\alpha|_{\Gamma_1} \qquad (4.6)$$

作双线性泛函

$$a(u,\ v)=\int_\Omega M^{\alpha\beta}\frac{\partial u}{\partial x^\beta}\,\frac{\partial v}{\partial x^\alpha}dx \qquad (4.7)$$

和线性泛函

$$\langle fg,\ v\rangle=\int_\Omega fv\,dx+\int_{\Gamma_1}\tilde{g}\,v\,ds \qquad (4.8)$$

因为S是二维曲面，它的第一基本型$a_{\alpha\beta}$是对称正定的，故$M^{\alpha\beta}$也是对称正定的

$$M^{\alpha\beta}\xi_\alpha\xi_\beta\geqslant C|\xi|^2,\qquad \forall\xi\in R^2,\ a\cdot e\cdot x^\alpha\in\Delta$$

故双线性泛函(4.7)是对称强制的：

$$a(u,\ u)\geqslant C_0\|u\|_1^2$$

显然，它也是有界的：

$$|a(u,\ v)|\leqslant M\|u\|_1\cdot\|v\|_1$$

由于$\tilde{p}_0\in H^2(\Omega)$，故可设$f\in L^2(\Omega)$，$\tilde{g}\in H^{1/2}(\Gamma_1)\hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_1)$，由迹定理可知，线性泛函(4.8)在$V$中有界：

$$\begin{aligned}|\langle fg,\ v\rangle|&\leqslant\|f\|_{L^2}\|v\|_{L^2}+\|\tilde{g}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)}\cdot\|v\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)}\\&\leqslant(\|f\|_{L^2}+C\|\tilde{g}\|_{H^{-1/2}(\Gamma_1)})\|v\|_1\end{aligned}$$

故$fg\in V^*$(V的对偶空间)．

设集合

$$K=\{v\in V|_{v\geqslant-\tilde{p}_0},\ a,\ e,\ 在\ \Delta\ 内\} \qquad (4.9)$$

显然$K\subset V$是一个闭凸集，边值问题(4.5)是在K中求解，即求$u\in K$，使得u在Δ上满足(4.5)

对应于(4.5)的能量泛函

$$J(u)=\frac{1}{2}a(u,\ u)-\langle fg\cdot u\rangle \qquad (4.10)$$

那么，(4.5)相应的Riesz变分问题是：求u，使得$J(u)$在K上达到极小值．

$$J(u)=\min_{v\in K}J(v) \tag{4.11}$$

我们知道，当$a(u, v)$是对称、强制，且是连续的，那么，Riesz极小化问题(4.11)等价于下列不等变分问题.

求$u\in K$，使得

$$a(u, v-u)\geqslant\langle fg, v-u\rangle \qquad \forall v\in K \tag{4.12}$$

对可压缩情形，广义雷诺方程(3.24)是拟线性椭圆边值问题

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(M^{\alpha\beta}p\frac{\partial p}{\partial x^\beta}\right)=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}}{12\mu}h^3X^\alpha\frac{p^2}{RT}\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}h(V^\alpha_b-U^\alpha)p\right)+\sqrt{a}(V^3_b-U^3)p \tag{4.13}$$

这里取$B^\alpha_\beta=\delta^\alpha_\beta$，并考虑静态情形，故 $M^{\alpha\beta}=\dfrac{\sqrt{a}h^3}{12\mu}a^{\alpha\beta}$那么，拟双线性泛函定义为

$$B(u, v)=\left(M^{\alpha\beta}u\frac{\partial u}{\partial x^\beta}, \frac{\partial v}{\partial x^\alpha}\right) \tag{4.14}$$

设

$$f(u)=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}}{12\mu}\frac{h^3X^\alpha}{RT}u^2\right)+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}h(V^\alpha_b-U^\alpha)u\right)$$

$$+\sqrt{a}(V^3_b-U^3)u \tag{4.15}$$

则(4.13)可以表示为

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(M^{\alpha\beta}u\frac{\partial u}{\partial x^\beta}\right)=f(u)$$

拟双线性泛函(4.14)在Соболев空间$H^{1,r}(\Omega)r>3$中是连续和有界的，实际上

$$|B(u, v)|\leqslant\int|M^{\alpha\beta}||u|\left|\frac{\partial u}{\partial x^\beta}\right|\left|\frac{\partial v}{\partial x^\alpha}\right|dx$$

$$\leqslant C_1\sum_{\beta=1}^{2}\left\|u\frac{\partial u}{\partial x^\beta}\right\|_{L^{r'}(\Omega)}\|v\|_{H^{1,r}(\Omega)}$$

$$\leqslant C_1\sum_{\beta=1}^{2}\|u\|_{L^{2r'}(\Omega)}\left\|\frac{\partial u}{\partial x^\beta}\right\|_{L^{2r'}(\Omega)}\|v\|_{H^{1,r}(\Omega)}$$

$$\leqslant C_2\|u\|^2_{H^{1,2r'}(\Omega)}\|v\|_{H^{1,r}(\Omega)}$$

这里$\dfrac{1}{r}+\dfrac{1}{r'}=1$，$2r'=\dfrac{2r}{r-1}$当$r>3$时，$r>2r'$由嵌入定理可知$\|u\|_{H^{1,2r'}(\Omega)}\leqslant M\|u\|_{H^{1,r}(\Omega)}$，故

$$|B(u,v)|\leqslant C_3\|u\|^2_{H^{1,r}(\Omega)}\|v\|_{H^{1,r}(\Omega)} \tag{4.16}$$

泛函 $f(u)$在$H^{1,r}(\Omega)$同样是连续和有界的

设$W_0\subset H^{1,r}(\Omega)$，$W_0$中的元素$u$在$\Gamma_2$上的迹为零，$W_0$的对偶空间记为$W^*_0$，那么，固定$u\in W_0$，则$B(u, v)$是$W_0$上线性有界泛函，故存在一个元素 $Tu\in W^*_0$，使得

$$B(u, v)=\langle Tu,v\rangle \tag{4.17}$$

且由(4.16)可知$\|Tu\|_{W_0^*}\leqslant C_3\|u\|^2_{H^{1,r}(\Omega)}$，$Tu$是一个从$W_0\to W^*_0$的连续映照，并且把$W_0$中有

界集映到W^*_0中的有界集.

设$K\subset H^{1,r}(\Omega)$，使得

$$K=\{u\in H^{1,r}(\Omega)\ |u-\tilde{p}_0\in W_0,\ u>0\} \tag{4.18}$$

那么，K是$H^{1,r}(\Omega)$中的一个凸集，因而对于理想可压缩流体的广义雷诺方程边值问题

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(M^{\alpha\beta}u\dfrac{\partial u}{\partial x^\beta}\right)=f(u)\\ u|_{\Gamma_2}=p_0\\ M^{\alpha\beta}u\dfrac{\partial u}{\partial u^\beta}n_\alpha|_{\Gamma_1}=g\end{array}\right\} \tag{4.19}$$

它的广义解应满足不等变分问题：求$u\in K$，使得

$$B(u,\ v-u)\geqslant\langle f(u),\ v-u\rangle+\langle g,\ v-u\rangle_{\Gamma_1} \tag{4.20}$$

如果令$P=u^2$，那么(4.19)可以写成

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(M^{\alpha\beta}\dfrac{\partial P}{\partial x^\beta}\right)=\tilde{f}(P)\\ P|_{\Gamma_2}=\sqrt{p_0}\\ \dfrac{1}{2}M^{\alpha\beta}\dfrac{\partial P}{\partial x^\beta}n_\alpha|_{\Gamma_1}=g\end{array}\right\} \tag{4.19)'$$

其中
$$\tilde{f}(P)=2\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}}{12\mu}h^3\frac{X^\alpha}{RT}P\right)+2\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}h}{2}(V_b^\alpha-U^\alpha)\sqrt{P}\right)$$
$$+\sqrt{a}(V_b^3-U^3)\sqrt{P} \tag{4.21}$$

对应于P的位势

$$F(P)=\int_\Omega\left(\int_0^P\tilde{f}(x,\ \xi)d\xi\right)dx=\int_\Omega\left\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}}{12\mu}\frac{h^3X^\alpha}{RT}P^2\right)\right.$$
$$\left.+\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{\sqrt{a}}{3}h(V_b^\alpha-U^\alpha)P^{3/2}\right)+\frac{2}{3}\sqrt{a}\ (V_b^3-U^3)P^{3/2}\right\}dx \tag{4.22}$$

那么，对(4.19)，不等变分问题是：求$u\in K$使

$$B(u,\ v-u)\geqslant\langle\mathrm{grad}\,F(u),\ v-u\rangle+\langle g,\ v-u\rangle\quad\forall v\in K \tag{4.23}$$

其中　$B(u,\ v)=\int_\Omega M^{\alpha\beta}\dfrac{\partial u}{\partial x^\alpha}\dfrac{\partial v}{\partial x^\beta}dx$，grad $F(u)$是在点u的 Fréchet 导数.

不等变分问题的有限元逼近，就是构造相应的有限元子空间$S_h\subset V$和闭凸集$K_h\subset S_h\cap K$，那么

i)　求$u_h\in K_h$，使得

$$J(u_h)=\min_{v_h\in K}J(v_h) \tag{4.24}$$

或　ii)　求$u_h\in K_h$，使得

$$B(u_h,\ v_h-u_h)\geqslant\langle fg,\ v_h-u_h\rangle\quad\forall v_h\in K_h \tag{4.25}$$

通过有限元离散化，我们知道$J(u_h)$是一个S_h上的二次型.

$$J(u_h)=\frac{1}{2}A_{ij}y^iy^j+C_iy^i=\frac{1}{2}Y^TAY+Y^TC \tag{4.26}$$

其中系数矩阵A是正定对称和稀疏的，因而(4.24)便成为一个大型对称正定稀疏的二次型数学规划问题，可用规划理论求解.

线性和拟线性不等变分问题解的存在性已解决了[4][6]，有限元解的误差估计和等变分问题有类似的结果[5]：

$$\|u-u_h\|\leqslant\left\{\frac{M^2}{\gamma^2}\|u-v_h\|^2+\frac{2}{\gamma^2}\|f-Tu\|^*(\|u-v_h\|+\|u_h-v_h\|)\right\}^{1/2}$$

其中M，γ常数是

$$|B(u,\ v)|\leqslant M\|u\|\ \|v\|$$
$$B(u,\ u)\geqslant\gamma\|u\|^2$$

Tu是(4.17)中所定义的，u是真解，u_h是有限元逼近解，$v\in V$任一元素，$v_h\in K_h$任一元素，对于非线性不等变分问题(4.22)，有限元逼近解的误差为

$$\|u-u_h\|\leqslant\left\{\frac{3M^2}{\gamma^2}(\|u-v_h\|^2+\|v-u_h\|^2)+\frac{3M^2}{\gamma^2}\|v_h-v\|^2\right.$$
$$+\frac{2}{\gamma}(\|\mathrm{grad}\,F(u)\|^*\|u-v_h\|+\|\mathrm{grad}\,F(u_h)$$
$$\left.-Tu_h\|^*\|u_h-v\|)\right\}^{1/2}\forall v\in K,\ \ v_h\in K_h$$

五、实 例

我们列举几种简单的轴承，来看广义雷诺方程具有怎样的形式.

圆柱轴承

它的两个曲面S_a，S_b分别为圆柱面，S_a不动，我们取z轴和它的轴重合，S_b以角速度ω绕它自己的轴旋转，我们取圆柱坐标系$(x^{1'},\ x^{2'},\ x^{3'})=(r,\ \varphi,\ z)$：

$$y^1=r\cos\varphi,\ \ y^2=r\sin\varphi,\ \ y^3=z \tag{5.1}$$

$r=R$为S_a曲面，故取S_a上高斯坐标系为

$$x^1=\varphi\quad x^2=z \tag{5.2}$$

在圆柱坐标系下，三维欧氏空间的度量张量$g_{i'j'}$

$$\{g_{i'j'}\}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&r^2&0\\0&0&1\end{pmatrix} \tag{5.3}$$

那么，S_a曲面之度量张量

$$a_{\alpha\beta}=g_{i'j'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\beta} \tag{5.4}$$

将(5.3)代入(5.4)得

$$[a_{\alpha\beta}]=\begin{bmatrix}r^2&0\\0&1\end{bmatrix},\ \ a=r^2$$

$$[a^{\alpha\beta}]=\begin{bmatrix}1/r^2&0\\0&1\end{bmatrix} \tag{5.5}$$

设厚度为 h，R 为轴承半径，r_1 为轴径半径，e 为偏心距，$\varepsilon=\frac{e}{R-r_1}$，那么不难验证

$$h=R-(r_1+e\sin\varphi)=(R-r_1)(1-\varepsilon\sin\varphi) \tag{5.6}$$

S_b 上切线速度 $\vec{v}_b$，$v_b=r_1\omega$

$$\vec{v}_b=V_b^\alpha\vec{e}_\alpha-V_b^3\vec{n}$$

而
$$V_{b\alpha}=\vec{v}_b\cdot\vec{e}_\alpha$$

空间中任一点矢径 $\vec{R}$

$$\vec{R}=r\cos\varphi\vec{i}+r\sin\varphi\vec{j}+z\vec{k}$$

$$\vec{e}_\alpha=\frac{\partial\vec{R}}{\partial x^\alpha}$$

即
$$\vec{e}_1=\frac{1}{R}[-r\sin\varphi\vec{i}+r\cos\varphi\vec{j}]$$

$$\vec{e}_2=\vec{k}$$

故
$$V_{b2}=0$$

$$V_{b3}=V_b^3=\vec{v}_b\cdot\vec{n}=\omega e\sin\varphi$$

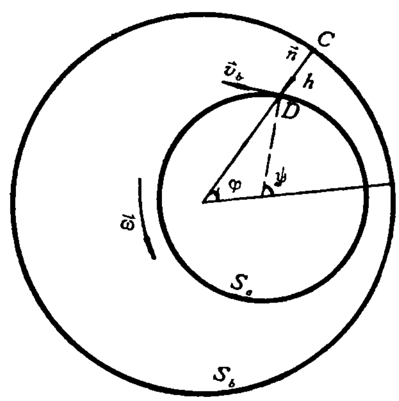

图 3

$$V_{b1}=\vec{v}_b\cdot\vec{e}_1=\frac{1}{R}(r\sin\varphi\cdot r_1\omega\sin\psi+r\cos\varphi\cdot r_1\omega\cos\psi)$$

$$=\frac{rr_1}{R}\omega(\sin\varphi\sin\psi+\cos\varphi\cos\psi)$$

$$=\frac{rr_1}{R}\omega\cos(\varphi-\psi)$$

但 $r_1\cos(\varphi-\psi)=R-(h+e\cos\varphi)$，$r=R-h$ 故

$$V_{b1}=R^2\left(1-\frac{h}{R}\right)\left(1-\frac{h}{R}-\frac{e}{R}\cos\psi\right)\omega$$

利用 $V_b^\alpha=a^{\alpha\beta}V_{b\beta}$ 及(5.5)，可知

$$V_b^1=R^2\left(1-\frac{h}{R}\right)\left(1-\frac{h}{R}-\frac{e}{R}\cos\varphi\right)\omega\frac{1}{r}=R\left(1-\frac{h}{R}-\frac{e}{R}\cos\varphi\right)\omega$$

$$V_b^2=0$$

$$V_b^3=-\omega e\sin\varphi,\quad U^1=U^2=U^3=0$$

不可压的广义雷诺方程(3.22)

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left[\frac{1}{R-h}\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x^1}-\frac{1}{2}hR\left(1-\frac{h}{R}-\frac{e}{R}\cos\varphi\right)\omega-\frac{h^3}{12\mu}\rho X^1\right]$$

$$+\frac{\partial}{\partial x^2}\left[(R-h)\frac{h^3}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x^2}-\frac{h^3}{12\mu}\rho X^2\right]-\frac{\partial h}{\partial t}-\omega e\sin\varphi=0$$

椭圆柱轴承

同样取 S_a 之轴为 z 轴，椭圆柱面坐标系 $(x^{1'},\ x^{2'},\ x^{3'})=(\eta,\ \varphi,\ z)$，那么

$$y^1=a\operatorname{ch}\eta\cos\varphi,\quad y^2=a\operatorname{sh}\eta\sin\varphi,\quad y^3=z$$

则
$$[g_{i'j'}]=\begin{bmatrix} a^2(\operatorname{ch}^2\eta-\cos^2\varphi) & 0 & 0 \\ 0 & a^2(\operatorname{ch}^2\eta-\cos^2\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$g_{1'1'}=\alpha^2(\mathrm{ch}^2\eta-\cos^2\varphi)=\alpha^2(\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\varphi)=g_{2'2'}$$

$$g_{3'3'}=1,\quad g_{i'j'}=0\quad(i'\neq j')$$

取
$$x^1=\varphi,\quad x^2=z$$

则
$$a_{\alpha\beta}=g_{i'j'}\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{j'}}{\partial x^\beta}$$

即有
$$a_{11}=\alpha^2(\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\varphi),\quad a_{22}=1,\quad a_{12}=a_{21}=0$$

$$a=\alpha^2(\mathrm{sh}^2\eta+\sin^2\varphi)$$

不可压缩的广义雷诺方程为

$$\frac{\partial}{\partial x^1}\left(\frac{h^3}{12\mu\sqrt{a}}\frac{\partial p}{\partial x^1}\right)+\frac{\partial}{\partial x^2}\left(\frac{h^3\sqrt{a}}{12\mu}\frac{\partial p}{\partial x^2}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{1}{2}h\sqrt{a}V^\alpha+\frac{h^3}{12\mu}\rho\sqrt{a}X^\alpha\right)+\sqrt{a}\left(V_b^3+\frac{\partial h}{\partial t}\right)$$

旋转曲面

在圆柱坐标系中，若 r 和 z 承受变换

$$r=r(u^1,\ u^2),\quad z=z(u^1,\ u^2)$$

那么，曲线坐标系$(u^1,\ u^2,\ \varphi)$称为回转坐标系

$$y^1=r(u^1,\ u^2)\cos\varphi,\quad y^2=r(u^1,\ u^2)\sin\varphi,\quad y^3=z(u^1,\ u^2)$$

对于旋转曲面，我们采用回转坐标系，尤其是对 S_a 测地超曲面，其母线方程可以用自己的弧长 m 作参数

$$r=r(m),\quad z=z(m)$$

这时，我们取$(m,\ \varphi)=(x^1,\ x^2)$作为 S_a 上高斯坐标系，由于圆柱坐标系中，三维欧氏空间度量张量为(5.3)，故

$$a_{\alpha\beta}=\frac{\partial r}{\partial x^\alpha}\frac{\partial r}{\partial x^\beta}+r^2\frac{\partial\varphi}{\partial x^\alpha}\frac{\partial\varphi}{\partial x^\beta}+\frac{\partial z}{\partial x^\alpha}\frac{\partial z}{\partial x^\beta}$$

从而
$$a_{11}=\left(\frac{\partial r}{\partial m}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial m}\right)^2=1,\quad a_{12}=a_{21}=0$$

$$a_{22}=r^2,\quad a=r^2$$

$$a^{11}=1,\quad a^{22}=\frac{1}{r},\quad a^{12}=a^{21}=0$$

所以广义雷诺方程为

$$\frac{\partial}{\partial m}\left(\frac{h^3}{12\mu}\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial m}-\frac{1}{2}hrV_b^1-\frac{h^3}{12\mu}\rho rX^1\right)$$

$$+\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{h^3}{12\mu}r\frac{\partial p}{\partial\varphi}-\frac{1}{2}hrV_b^2-\frac{h^3}{12\mu}\rho rX^2\right)-rV_b^3-r\frac{\partial h}{\partial t}=0$$

事实上，曲面 S_a 和 S_b 不一定都要是规则曲面，只要给出曲面的离散点，同样可以很容易选取高斯坐标系和计算度量张量$a_{\alpha\beta}$。

参 考 文 献

1. Capriz, G., Variational techniques for the analysis of a lubrication problem, *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*, Rome(1975).
2. Wannier, G. H., A contribution to the hydrodynamics of lubrication, *Quant. Appl. Math.*, 8 (1950) 1—32.
3. Elrod., H. G., A derivation of the basic equations for hydrodynamic lubrication with a fluid having constant properties, *Quant. Appl. Math.*, 17 (1960) 349—359.
4. Murthy, M. K. V. and Stampacchia, G., A variational inequality with boundary conditions, *Israel. J. Math.* 13 (1972), 188—224.
5. Mosco, U., Error estimates for some variational inequalities, *Mathematical Aspects of Finite Element Methods*, Rome.(1975).
6. Browder, F. E., Existence theorems for nonlinear partial differential equations, *Proc. Sym. Pur. Math.* V, XVI. (1970).

Generalized Reynolds Equation and Variational Inequality in Lubrication Theory

Li Kai-tai Huang Ai-xiang
(Xian Jiaotong University, Xian)

Abstract

This paper has derived generalized Reynolds equation in lubrication theory in terms of tensor analysis and S-coordinate system, and has provided corresponding variational inequality. The winding effect of flow of lubricant fluid is considered, and influence of inner properties of axis and axle sleevings on the flow are counted.