

# 用数值积分的初参数法解波纹管\*

黄 黔

(北京清华大学, 1981年6月30收到)

## 摘 要

本文把波纹管的边值问题化为初值问题, 根据 В. В. Новожилов 的环壳方程<sup>[8]</sup>, 用 S. Gill 方法<sup>[10]</sup>, 求出半圆弧波纹管的数值解. 计算了在轴向力和内压作用下的变形和应力分布. 其结果和钱伟长教授的一般解完全一致. 本文提出的外推公式可以显著地提高离散化方法的计算精度.

文后附有 WANG 2200 VS 计算机上 BASIC 语言的源程序.

## 一、引 言

波纹管问题, R. A. Clark<sup>[12]</sup>(1950)和 С. А. Тумаркин<sup>[13]</sup>(1963)用 R. E. Langer 变换的渐近解法; C. E. Turner 用能量法<sup>[7]</sup>(1957)和幂级数解法<sup>[14, 15]</sup>(1959); H. Hamada<sup>[16, 17]</sup>(1965)用摄动法; Л. Е. Андреева<sup>[18]</sup>(1975)用差方法, 做过一些近似处理. 近年来, 钱伟长教授给出了轴对称圆环壳的一般解, 并用它成功地解决了半圆弧波纹管问题<sup>[2, 4]</sup>(1979). 本文提出的初参数法, 把半圆弧波纹管问题中齐次解的八个实待定常数, 简化为一个复待定常数, 仅用一个齐次积分和一个非齐次积分就可以得到波纹管问题的数值解. 文中还提出数值解的整体外推公式, 可以明显地节省机时, 有效地提高精度. 这个解法, 不受波纹管参数的限制, 方法简便, 精度良好. 可作为一种实用的数值解法.

这一方法可以更广泛地应用于解决轴对称载荷下的旋转壳的线性问题. 当方程或间断点连接条件不能用复变量处理时, 一般要求出 H. Reissner—E. Meissner 方程<sup>[19]</sup>的两个线性无关的齐次积分和一个非齐次积分, 用三个数值积分使问题得解.

## 二、基 本 方 程

半圆弧波纹管如图 1, 其 ABC 段和 CDE 段都是平均半径为  $R$ , 圆弧半径为  $a$  的圆环壳. 在 Love—Kirchhoff 薄壳假定下, В. В. Новожилов 导出的轴对称圆环壳复变量方程为:

$$(1 + a \sin \varphi) \frac{d^2 V}{d\varphi^2} - a \cos \varphi \frac{dV}{d\varphi} + 2\mu i \sin \varphi V = 2\mu P_0 \cos \varphi \quad (2.1)$$

\* 本文是在钱伟长教授的指导下完成的, 钱伟长推荐.

式中  $\varphi$ ——子午线角, 见图 2

$$V = -\frac{4\mu^2 D}{a\alpha^2} (1 + \alpha \sin \varphi) \chi + i \left[ \frac{2\mu}{\alpha} \cdot \frac{(1 + \alpha \sin \varphi)^2}{\sin \varphi} Q - 2\mu \frac{Q_0}{\alpha} \operatorname{ctg} \varphi \right]$$

$$P_0 = \frac{2\mu}{\alpha} Q_0 - i \frac{\alpha}{2} qa$$

$$\alpha = a/R, \quad \mu = \sqrt{3(1-\nu^2)} a^2/Rh, \quad \nu \text{——泊松比}$$

$h$ ——壳厚,  $Q$ ——剪力,  $Q_0$ ——在  $\varphi=0$  处的剪力

$q$ ——壳壁承受的法向分布载荷 (向外为正)

$\chi$ ——子午线切线的变形转角

我们引入无量纲变数

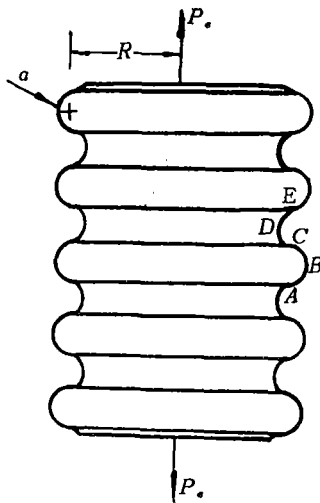


图 1

$$x = \pm \left( 1 - \frac{2}{\pi} \varphi \right)$$

$$W = V / \frac{P}{2\pi R}$$

$$q^* = qa / \frac{P}{2\pi R}$$

$$P^* = Q_0 / \frac{P}{2\pi R}$$

$$S_\varphi = N_\varphi / \frac{P}{2\pi R}$$

$$S_\theta = N_\theta / \frac{P}{2\pi R}$$

$$T_\varphi = M_\varphi / \frac{P\alpha^2}{4\pi\mu^2}$$

$$T_\theta = M_\theta / \frac{P\alpha^2}{4\pi\mu^2}$$

$$G = Q / \frac{P}{2\pi R}$$

$$\eta = u_r/a$$

$$\zeta = u_z/a$$

(2.2)

式中  $\theta$ ——经度角

$P = P_e + \pi R^2 q$ ,  $P_e$ ——轴向外力

$N_\varphi, N_\theta$ ——中面薄膜力, 见图 3

$M_\varphi, M_\theta$ ——弯矩, 见图 3

$u_r, u_z$ ——径向、轴向位移

式中以及下文中, 凡出现土或干, 上面的符号是BC段的, 下面的是CD段.

Новожилов方程化为无量纲形式

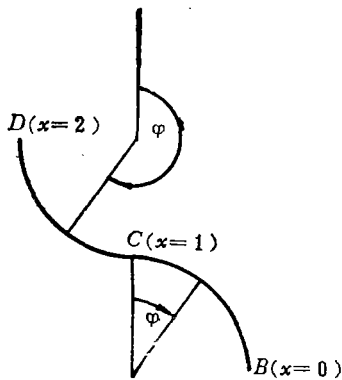


图 2

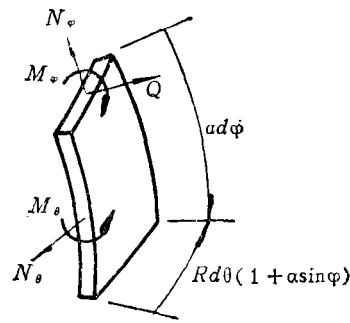


图 3

$$\begin{aligned}
 & 2\left(1 + a \cos \frac{\pi x}{2}\right) \frac{d^2 W}{dx^2} + a\pi \sin \frac{\pi x}{2} \frac{dW}{dx} + i\mu\pi^2 \cos \frac{\pi x}{2} W \\
 & = \mu\pi^2 \sin \frac{\pi x}{2} \left( \frac{2\mu}{\alpha} P^* - i \frac{\alpha}{2} q^* \right)
 \end{aligned} \quad (2.3)$$

我们再引入向量

$$\mathbf{Y}(x) = \{Y_2, Y_3, Y_4, Y_5\}^T = \left\{ \operatorname{Re} W, \operatorname{Im} W, \operatorname{Re} \frac{dW}{dx}, \operatorname{Im} \frac{dW}{dx} \right\}^T \quad (2.4)$$

并记  $d\mathbf{Y}/dx = \mathbf{D}(x, \mathbf{Y})$ , 则方程(2.3) 化为一阶微分方程组:

$$\left. \begin{aligned}
 D_2(x, \mathbf{Y}) &= Y_4(x) \\
 D_3(x, \mathbf{Y}) &= Y_5(x) \\
 D_4(x, \mathbf{Y}) &= \left( -aY_4 \sin \frac{\pi x}{2} + \mu\pi Y_3 \cos \frac{\pi x}{2} + \frac{2\pi\mu^2}{\alpha} P^* \sin \frac{\pi x}{2} \right) \pi/2 \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right) \\
 D_5(x, \mathbf{Y}) &= \left( -aY_5 \sin \frac{\pi x}{2} - \mu\pi Y_2 \cos \frac{\pi x}{2} - \frac{\mu\pi\alpha}{2} q^* \sin \frac{\pi x}{2} \right) \pi/2 \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

用  $Y_i(x)$  表示的内力和变形公式为:

$$\left. \begin{aligned}
 S_\varphi &= \pm \left[ -\frac{\alpha Y_3}{\mu} \sin \frac{\pi x}{2} + q^* \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right) \right] \left( 2 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right) \\
 &\quad + 2P^* \left( a + \cos \frac{\pi x}{2} \right) \Big/ 2 \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right)^2 \\
 S_\theta &= \pm \left[ \frac{2Y_5}{\mu\pi} \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right) + \frac{\alpha Y_3}{\mu} \sin \frac{\pi x}{2} + q^* \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right) \right] \\
 &\quad - 2P^* \left( a + \cos \frac{\pi x}{2} \right) \Big/ 2 \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right)^2 \\
 G &= \left( \frac{\alpha Y_3}{\mu} \cos \frac{\pi x}{2} + 2P^* \sin \frac{\pi x}{2} \right) \Big/ 2 \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right)^2 \\
 T_\sigma &= \mp \left[ \frac{2Y_4}{\pi} \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right) + (1-\nu)\alpha Y_2 \sin \frac{\pi x}{2} \right] \Big/ 2 \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right)^2 \\
 T_\theta &= \mp \left[ \frac{2\nu Y_4}{\pi} \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right) - (1-\nu)\alpha Y_2 \sin \frac{\pi x}{2} \right] \Big/ 2 \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right)^2 \\
 \chi &= -BY_2 \Big/ \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right) \\
 \eta &= B \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right) (S_\theta - \nu S_\varphi) \\
 \frac{d\xi}{dx} &= -\frac{\pi}{2} BY_2 \sin \frac{\pi x}{2} \Big/ \left( 1 + a \cos \frac{\pi x}{2} \right)
 \end{aligned} \right\} \quad (2.6)$$

式中  $B = \frac{P}{2\pi a E h} = \pi P / 2\pi a a^2 E \sqrt{3(1-\nu^2)}$ ,  $E$ ——杨氏模量.

求出内力后, 应力分量也就可以确定.

在轴对称载荷下, 由对称性, 只须求解BCD段. B、D点的边界条件是:

$$B \text{点 } (x=0) \quad \chi=0, G=0 \quad \therefore Y_2(0)=Y_3(0)=0 \quad (2.7)$$

$$D \text{点 } (x=2) \quad \chi=0, G=0 \quad \therefore Y_2(2)=Y_3(2)=0 \quad (2.8)$$

在C点( $x=1$ ),  $Y(x)$ 发生间断, 其连接条件是

$\chi_{CD}=\chi_{BC}$ ,  $S_{\varphi CD}=S_{\varphi BC}$ ,  $\eta_{CD}=\eta_{BC}$ ,  $T_{\varphi CD}=-T_{\varphi BC}$ 如果把CD段的C点值记为 $Y^*(1)$ , BC段的C点值记为 $Y(1)$ , 则连接条件可以记为

$$\left. \begin{aligned} Y_2^*(1) &= Y_2(1), Y_3^*(1) = -Y_3(1) + 4\mu(g^*/\alpha + P^*) \\ Y_4^*(1) &= Y_4(1), Y_5^*(1) = -Y_5(1) - 3\mu\pi Q^* \end{aligned} \right\} \quad (2.9)$$

### 三、计 算 方 法

半圆弧波纹管的边值问题, 就是求方程(2.5)满足(2.7)、(2.8)、(2.9)式的解. 我们先求齐次解.

方程(2.5)、B点边界条件(2.7)和C点连接条件(2.9)相应的齐次关系式分别是:

$$\left. \begin{aligned} D_2(x, Y) &= Y_4(x) \\ D_3(x, Y) &= Y_5(x) \\ D_4(x, Y) &= \left( -\alpha Y_4 \sin \frac{\pi x}{2} + \mu \pi Y_3 \cos \frac{\pi x}{2} \right) \cdot \pi/2 \cdot \left( 1 + \alpha \cos \frac{\pi x}{2} \right) \\ D_5(x, Y) &= \left( -\alpha Y_5 \sin \frac{\pi x}{2} - \mu \pi Y_2 \cos \frac{\pi x}{2} \right) \cdot \pi/2 \cdot \left( 1 + \alpha \cos \frac{\pi x}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

$$Y_2(0) = Y_3(0) = 0 \quad (3.2)$$

$$\left. \begin{aligned} Y_2^*(1) &= Y_2(1), & Y_3^*(1) &= -Y_3(1) \\ Y_4^*(1) &= Y_4(1), & Y_5^*(1) &= -Y_5(1) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

线性齐次方程(3.1), 在线性齐次约束条件(3.2)、(3.3)限制下的解, 我们称之为约束齐次解. 任一约束齐次解乘以一个实常数仍为约束齐次解. 由于(3.3)式对 $W(x) = Y_2 + iY_3$ 和 $\frac{dW}{dx} = Y_4 + iY_5$ 来说, 是共轭的连接条件, 所以任一对 $W(x)$ 而言的约束齐次解, 在BC、CD段分别乘以互为共轭的复常数, 亦仍为约束齐次解. 这样, 我们可以首先以B为起始点, 增补初参数, 也就是使两个初参数满足齐次条件(3.2), 其余初参数 $Y_4(0)$ 、 $Y_5(0)$ 取不都为零的任意值, 用数值解法求出满足齐次方程(3.1)和齐次约束(3.2)、(3.3)的齐次特解 $W^h(x)$ , 在BC、CD段分别乘以待定的共轭复常数, 作为齐次通解. 然后, 同样以B为起始点, 增补初参数, 使两个初参数满足边界条件(2.7), 其余初参数取任意值, 用数值解法求满足非齐次方程(2.5)和非齐次约束(2.7)、(2.9)的非齐次特解 $W^p(x)$ , 并与齐次通解迭加起来, 作为方程(2.5)在(2.7)、(2.9)式约束下的数值一般解

$$W(x) = W^p(x) + (C_1 + iC_2)W^h(x) \quad (3.4)$$

其中  $C_1, C_2$  是实待定常数, 由D点的边界条件(2.8)决定.

具体的计算步骤是:

首先, 由下面的初参数出发,

$$Y_2(0), Y_3(0), Y_4(0), Y_5(0) = 0 \quad (3.5)$$

根据方程(2.5)和连接条件(2.9), 用Gill方法<sup>[9, 10]</sup>求得非齐次积分

$$W^p(x) = Y_2^p(x) + iY_3^p(x)$$

其次, 由下面的初参数出发,

$$Y_2(0), Y_3(0), Y_5(0) = 0, Y_4(0) = 1 \quad (3.6)$$

根据方程(3.1)和连接条件(3.3), 用Gill方法求得齐次积分

$$W^h(x) = Y_2^h(x) + iY_3^h(x)$$

然后, 由D点( $x=2$ )边界条件(2.8), 我们有

$$\begin{cases} Y_2^p(2) + C_1 Y_2^h(2) - C_2 Y_3^h(2) = 0 \\ Y_3^p(2) + C_1 Y_3^h(2) + C_2 Y_2^h(2) = 0 \end{cases}$$

从而得到

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= -\frac{Y_2^p(2)Y_2^h(2) + Y_3^p(2)Y_3^h(2)}{[Y_2^h(2)]^2 + [Y_3^h(2)]^2} \\ C_2 &= \frac{Y_2^p(2)Y_3^h(2) - Y_3^p(2)Y_2^h(2)}{[Y_2^h(2)]^2 + [Y_3^h(2)]^2} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

代回(3.4)式, 半圆弧波纹管的边值问题得解.

注意, 这里的齐次解是在(3.2)、(3.3)式约束下的齐次解, 复变量的线性无解只有一个. 这点与解析方法求齐次方程的自由通解不同.

也就是说, 本来半圆弧波纹管的齐次解包含八个实待定常数, 由于数值解法可以顺利地通过间断点, 常数减少一半; 由于数值一般解满足起始点边界条件, 常数再减少一半; 由于方程与间断点连接条件可以用复变量处理, 常数从形式上减少一半, 而齐次积分的次数实际上还是又减少了一半. 因此, 含八个待定常数的齐次解, 在这里, 只需要一次积分就能完成.

至于数值解法, 采用S. Gill<sup>[10]</sup>的四阶公式, 定步长, 单步法. 和四阶Runge-Kutta法的古典公式相比, 可以减少舍入误差<sup>[9]</sup>. 记步长为 $h$ , 且 $Y(x)$ ,  $D(x, Y)$ ,  $K_i$ 为向量( $i=1, 2, 3, 4$ ), 则Gill公式为

$$\left. \begin{aligned} Y(x_{n+1}) &= [K_1 + (2 - \sqrt{2})K_2 + (2 + \sqrt{2})K_3 + K_4] / 6 \\ K_1 &= hD[x_n, Y(x_n)] \\ K_2 &= hD[x_n + \frac{h}{2}, Y(x_n) + \frac{1}{2}K_1] \\ K_3 &= hD[x_n + \frac{h}{2}, Y(x_n) + \frac{\sqrt{2}-1}{2}K_1 + (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})K_2] \\ K_4 &= hD[x_n + h, Y(x_n) - \frac{\sqrt{2}}{2}K_2 + (1 + \frac{\sqrt{2}}{2})K_3] \end{aligned} \right\} \quad (3.8)$$

轴向伸长 $\delta$ 与 $V$ 函数是微分关系, 也可并入 $Y, D$ 向量, 同时做出积分. 故在计算中实际采用的 $Y, D$ 向量为:

$$Y = \left\{ x, \operatorname{Re}W, \operatorname{Im}W, \operatorname{Re} \frac{dW}{dx}, \operatorname{Im} \frac{dW}{dx}, \delta_1, \delta_2 \right\}^T$$

$$D = \{1, Y_4, Y_8, D_4, D_8, D_8, D_7\}^T$$

其中  $D_4, D_8$  在(2.5)式中已经给出,

$$\left. \begin{aligned} D_4 &= -\frac{\pi}{2}BY_2 \sin\frac{\pi x}{2} / \left(1 + \alpha \cos\frac{\pi x}{2}\right) \\ D_7 &= -\frac{\pi}{2}BY_3 \sin\frac{\pi x}{2} / \left(1 + \alpha \cos\frac{\pi x}{2}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

轴向伸长  $\delta = \delta_1^2 + c_1\delta_1^4 + c_2\delta_2^4$

为了用较少的机时得到较高的精度, 并减少舍入误差的积累, 我们还采用了外推的方法. 即假定数值近似解与步长  $h$  有关, 设

$$Y(x, h) = A_0(x) + A_1(x)h + A_2(x)h^2 + A_3(x)h^3$$

并记按步长  $h, 4h, 8h, 16h$  得到的数值解分别为  $Y(x, h), Y(x, 4h), Y(x, 8h), Y(x, 16h)$ , 我们有

$$\begin{aligned} Y(x) &= \lim_{h \rightarrow 0} Y(x, h) = A_0(x) \\ &= [512 Y(x, h) - 280 Y(x, 4h) + 90 Y(x, 8h) - 7 Y(x, 16h)] / 315 \end{aligned} \quad (3.10)$$

同样,

$$\delta = [512 \delta(h) - 280 \delta(4h) + 90 \delta(8h) - 7 \delta(16h)] / 315 \quad (3.11)$$

#### 四、半圆弧波纹管在轴向力作用下的变形与内力

半圆弧波纹管,  $E = 21000 \text{ kg/mm}^2$ ,  $\nu = 0.3$ , 在轴向外力  $P_e = 1000 \text{ kg}$  的作用下, 其 BCD 段 (半个波) 的轴向伸长  $\delta$  如表 1 所示.

表 2 给出了其中例 II 的内力分布. 其中一般解

$$V = e^{\lambda \varphi} \sum_{n=-20}^{20} c_n e^{in\varphi}$$

级数取 41 项, 用 DJS-130 机扩展 BASIC 语言 (七位) 计算. 数值解用 WANG 2200 VS 机 BASIC 语言 (十五位) 计算, 变量  $x$  的步长取  $1/720$  (相当于  $\varphi$  的步长为  $0.125^\circ$ ). 和步长  $1/240$  (相当于  $\varphi$  的  $0.375^\circ$ ) 的解相比较, 前六位相同.

从表 1、表 2 可以看出, 数值解和一般解完全一致. 其中, 一般解的精度已受到特征指数  $\lambda$  的精度和 DJS-130 机 BASIC 语言舍入累积误差的限制.

文 [2,4] 已经指出, 一般解和 C. E. Turner-H. Ford (1957) 实验<sup>[7]</sup>相一致, 并和有限元解<sup>[6]</sup>相符合. 所以本文的数值解也是有效的.

从表 3 可以看出, 本文提出的外推公式, 使同样步长的解答, 由三位有效数字提高到七位有效数字. 对于数值计算中离散化方法来说, 可以节省机时、提高精度, 值得一试.

#### 五、半圆弧波纹管在内压作用下的变形和内力

第四节中例 II 的波纹管, 在内压  $q = 7.957747 \times 10^{-3} \text{ kg/mm}^2$  的作用下, (其轴向合力  $\pi R^2 q = 1000 \text{ kg}$ ), BCD 段 (半个波) 的轴向伸长  $\delta$  如表 4 所示. 其内力分布见表 5.

表 1

 $P_e=1000 \text{ kg}$ 

例	$\mu$	$\alpha$	$R(\text{mm})$	$a(\text{mm})$	数值解 $\delta(\text{mm})$	一般解 $\delta(\text{mm})$
I	1	0.1	200	20	0.083620	0.08362
II	4	0.1	200	20	1.03981	1.03980
III	16	0.5	200	100	0.11896	0.11895

表 2

 $\mu=4, \alpha=0.1, P_e=1000 \text{ kg}$ 

$\varphi^\circ$	$N_\varphi(\text{kg/mm})$		$N_\theta(\text{kg/mm})$		$M_\varphi(\text{kg})$		$M_\theta(\text{kg})$		$Q(\text{kg/mm})$	
	数值解	一般解	数值解	一般解	数值解	一般解	数值解	一般解	数值解	一般解
90	0.723431	0.723432	-14.74908	-14.7491	-0.304706	-0.304706	-0.091412	-0.091412	0.00000	-0.000003
80	0.754263	0.754264	-14.90033	-14.9003	-0.118793	-0.118790	-0.035028	-0.035028	-0.105804	-0.105808
70	0.846425	0.846426	-15.18693	-15.1869	0.418685	0.418691	0.126202	0.126204	-0.198702	-0.198706
60	0.996230	0.996230	-15.16600	-15.1660	1.237190	1.23719	0.366118	0.366119	-0.260819	-0.260823
50	1.190354	1.19036	-14.29059	-14.2905	2.194453	2.19446	0.635520	0.635521	-0.268691	-0.268696
40	1.400635	1.40064	-12.16955	-12.1695	3.063243	3.06325	0.861051	0.861052	-0.199203	-0.199206
30	1.585625	1.58563	-8.84498	-8.84492	3.547861	3.54785	0.953733	0.953729	-0.040336	-0.040338
20	1.702044	1.70205	-4.96299	-4.96294	3.338636	3.33862	0.828353	0.828348	0.199346	0.199345
10	1.723164	1.72317	-1.69536	-1.69540	2.187378	2.18733	0.426825	0.42681	0.490418	0.490418
0	1.653915	1.65392	-0.32434	-0.32447	-0.036911	-0.036979	-0.267866	-0.267887	0.7957747	0.795775
180	1.653915	1.65392	-0.32434	-0.32446	0.036911	0.036978	0.267866	0.267886	0.7957747	0.795775
190	1.797331	1.79734	0.86872	0.86879	2.330088	2.33014	0.937586	0.937581	0.505412	0.505411
200	1.848705	1.84871	4.29564	4.2958	3.606302	3.60634	1.267359	1.26737	0.203961	0.203959
210	1.784044	1.78405	8.66542	8.6656	3.886259	3.88626	1.285011	1.28501	-0.062774	-0.062776
220	1.619813	1.61981	12.56092	12.5511	3.359557	3.35953	1.067407	1.06740	-0.249014	-0.249013
230	1.403608	1.40360	15.00253	15.0027	2.346248	2.34621	0.722814	0.72280	-0.332045	-0.332042
240	1.190637	1.19063	15.83577	15.8358	1.199312	1.19926	0.359317	0.359301	-0.319794	-0.319787
250	1.022343	1.02234	15.53451	15.5345	0.209304	0.20926	0.058368	0.058355	-0.240862	-0.240854
260	0.918688	0.918686	14.89133	14.8913	-0.440812	-0.44084	-0.134048	-0.134056	-0.126848	-0.126837
270	0.884194	0.884194	14.58883	14.5888	-0.665148	-0.665144	-0.199544	-0.199543	0.00000	0.000012

表 3

 $\mu=4, \alpha=0.1, P_e=1000 \text{ kg}$ 

方	法	步	长 ( $^\circ$ )	伸	长 $\delta(\text{mm})$	误	差
数 值 解	不 外 推	$\frac{1}{2}$	0.357143	1.02819441667184	第三位 1.2		
			0.375	1.03980999478337	第八位 1.4		
	外 推	0.125	1.03980985070219				
一 般 解		41 项	1.03980				

从表4、表5可以看出数值解和一般解完全一致。这里一般解的级数取81项，但由于特殊指数 $\lambda$ 值是用存入的数据插值，结果一般解的误差反而增大。

和第四节例II比较，二者相近。说明内压产生的变形和内力主要是由轴向合力引起的（当 $\alpha$ 值较小时）。

本文的解法是钱伟长教授提出来的，并给予具体指导，谨致衷心的感谢。文中所用一般解的对比数据由陈山林同志供给，上机计算由王益群同志完成，在此一并表示感谢。

表4

$$\mu=4, \quad \alpha=0.1, \quad q=7.957747 \times 10^{-3} \text{kg/mm}^2$$

数值解	( $\delta$ mm)	1.0329567
一般解	$\delta$ (mm)	1.03289

表5

$$\mu=4, \quad \alpha=0.1, \quad q=7.957747 \times 10^{-3} \text{kg/mm}^2$$

$\varphi^\circ$	$N_\varphi$ (kg/mm)		$N_\theta$ (kg/mm)		$M_\varphi$ (kg)		$M_\theta$ (kg)		$Q$ (kg/mm)	
	数值解	一般解	数值解	一般解	数值解	一般解	数值解	一般解	数值解	一般解
90	0.876352	0.875348	-14.68846	-14.6887	-0.171965	-0.172044	-0.051589	-0.051613	0.00000	-0.000003
80	0.906283	0.906286	-14.78135	-14.7816	0.014458	0.014386	0.004612	0.0045912	-0.105796	-0.105801
70	0.998109	0.998114	-14.896785	-14.8971	0.550348	0.550281	0.164379	0.16436	-0.196955	-0.196996
60	1.145391	1.14540	-14.60623	-14.6066	1.356853	1.35681	0.399139	0.399125	-0.254494	-0.254508
50	1.332385	1.33239	-13.29290	-13.3934	2.281326	2.28129	0.656836	0.656829	-0.255032	-0.255052
40	1.528632	1.52866	-10.91388	-10.9144	3.088908	3.08889	0.862336	0.862338	-0.177091	-0.177114
30	1.691488	1.69152	-7.270705	-7.27118	3.484494	3.48449	0.927564	0.927571	-0.011755	-0.0117766
20	1.778380	1.77842	-3.16101	-3.16152	3.171489	3.17146	0.771948	0.771942	0.228531	0.228514
10	1.765285	1.76534	0.22576	0.22533	1.928338	1.92823	0.345732	0.345707	0.610815	0.610802
0	1.660974	1.66104	1.64260	1.64233	-0.338506	-0.33872	-0.357299	-0.357357	0.7957747	0.795775
180	1.660974	1.66104	1.64260	1.64233	0.338506	0.338718	0.357299	0.357357	0.7957747	0.795775
190	1.767343	1.76740	2.85018	2.85061	2.591496	2.59167	1.010335	1.01038	0.482388	0.482377
200	1.779030	1.77908	6.19144	6.1923	3.767737	3.76783	1.306946	1.30696	0.170367	0.170348
210	1.677428	1.67745	10.32382	10.3248	3.929722	3.92973	1.288237	1.28823	-0.095526	-0.095546
220	1.483851	1.48386	13.83411	13.8351	3.301461	3.30136	1.041253	1.04121	-0.273062	-0.273075
230	1.248349	1.24835	15.83880	15.8394	2.22486	2.22233	0.679280	0.67923	-0.344555	-0.344559
240	1.025557	1.02555	16.23819	16.2386	1.047901	1.0477	0.310064	0.310004	-0.322600	-0.322594
250	0.854088	0.85408	15.587656	15.5877	0.056935	0.056757	0.010930	0.010876	-0.238536	-0.238527
260	0.750373	0.750364	14.72305	14.723	-0.584279	-0.584432	-0.177517	0.177565	-0.124201	-0.124188
270	0.716197	0.716198	14.34530	14.3453	-0.803862	-0.803986	-0.241158	-0.241195	0.00000	0.000012



## 附录 计算机程序

(一)、子程序包括用定步长Gill 公式求齐次积分和非齐次积分, 并确定待定常数。

(二)、主程序包括外推公式, 求内力、应力和变形, 打印。

(三)、变量名称表

$U$  —  $\mu$      $D$  —  $a$      $A$  —  $a$      $V$  —  $\nu$

$J$  —  $\varphi$      $E$  —  $E$      $P$  —  $P$      $Q$  —  $q$  或  $q^*$

$Y( ) = \left\{ x, \operatorname{Re}W, \operatorname{Im}W, \operatorname{Re} \frac{dW}{dx}, \operatorname{Im} \frac{dW}{dx}, \delta_1, \delta_2 \right\}$

$D( ) = dY( )/dx$

$Y1( ), Y2( ), D1( ), U( ), W( )$  —— 工作单元

$V( ), V1( ), V2( ), V3( )$  —— 工作单元

$A( )$  —— Gill公式系数

$C\%$  —— 打印间隔 (度)

$N\%$  —— 每个打印间隔分成  $N\%$  步

$A\%, B\%, P\%$  —— 控制变量

$L\%, M\%, I\%, J\%, K\%$  —— 循环变量

$Z$  —— 轴向伸长

$N1\%, N3\%, N4\%, B, P1, S, C, T$  —— 工作单元

$F, G, Z1, Z2, Z3, Z4, Z5$  —— 工作单元

(四)、主程序文件

```

100 SELECT DEGREES, PRINTER; PRINT PAGE;
200 U=4%; D=.1; A=20%; Q=0%; P=1000%; P%=1%; E=21000%; V=.3
300 N%=1%; C%=30%; P1=3.14159265358979
400 INPUT "VALUE OF N,C,U, D,A,Q,P,E,V=", N%, C%, U, D, A, Q, P, E, V
500 IF ABS(P)>1 E-6 THEN 600: P%=0%; P=1000%
600 Q=Q*2*P1*A*A/(P*D); B=U*P/(2*P1*E*D*A*A*SQR(3*(1-V*V)))
700 DIM U(4,182), V(4,182), V1(4,182), V2(4,182), V3(4,182), W(4,182)
800 N2%=180%/C%+2%; N3%=90%/C%+2%
900 CALL "WANG1" (V1( ), U, D, P%, Q, N%, N2%, Z3)
1000 N%=2%*N%; CALL "WANG1" (V2( ), U, D, P%, Q, N%, N2%, Z4)
1100 N%=2%*N%; CALL "WANG1" (V3( ), U, D, P%, Q, N%, N2%, Z5)
1200 N%=4%*N%; CALL "WANG1" (V( ), U, D, P%, Q, N%, N2%, Z)
1300 FOR I%=1% TO 4% STEP 1%; FOR J%=1% TO N2% STEP 1%
1400 V(I%, J%)=(512*V(I%, J%)-280*V3(I%, J%)+90*V2(I%, J%)-7*V1(I%, J%))/315
1500 NEXT J%; NEXT I%; Z=(512*Z-280*Z5+90*Z4-7*Z3)/315%
1600 FOR I%=1% TO N2% STEP 1%; IF I%<N3% THEN A%=1% ELSE A%=-1%
1700 J=I%-1.5+.5*A%; S=SIN(J*C%); C=COS(J*C%); T=1+D*C
1800 U(1, I%)=A%*(Q*T*(1+T)-D*S*V(2, I%))/U+2*P%*(D+C)/(2*T*T)
1900 U(2, I%)=A%*(Q*T*T+2*T*V(4, I%))/(U*P1)+D*S*V(2, I%)/U-2*P%*(D+C)
2000 /(2*T*T)
2100 U(3, I%)=-A%*(2*T*V(3, I%)/P1+(1-V)*D*S*V(1, I%))/(2*T*T)
2200 U(4, I%)=-A%*(2*T*V*V(3, I%)/P1-(1-V)*D*S*V(1, I%))/(2*T*T)
2300 W(1, I%)=(D*C*V(2, I%))/U+2*P%*S/(2*T*T)
2400 W(2, I%)=-B*V(1, I%)/T

```

```

2500 W(3,I%)=B*T*(U(2,I%)-V*U(1,I%))
2600 W(4,I%)=.5*B*P1*S*V(1,I%)/T: NEXT I%
2700 PRINT SKIP(10); COL(40): "*"
2800 PRINT COL(40): "THE SOLUTIONS OF A BELLOWS OF TYPE C !"
2900 PRINT COL(40): "*"
3000 PRINT SKIP(4); "(1) FUNCTION V AND STRESSES/(P/2*PI*A*H)"; SKIP(2);
3100 "DEG. RE(V) IM(V) RE(D(V)/D(FAI)) IM(D(V)/D(FAI)
3200 I) SIGMA(FAI) EXT. SIG. (THETA) EXT. SIG. (F.) INT. SIG. (TH.) INT."
3300 T=3/(U*SQR(3*(1-V*V))) :Z=-Z*A*BP1/2%
3400 FOR I%=1% TO N2% STEP 1%: IF I%<N3% THEN 3600
3500 J=90%+(I%-2%)*C%: A%=1%: GOTO 3700
3600 J=90%-(I%-1%)*C%: A%=-1%
3700 PRINT USING 4900, J: V(1,I%): V(2,I%): 2*A%*V(3,I%)/P1;
3800 2*A%*V(4,I%)/P1: (U(1,I%)-T*U(3,I%))*D: (U(2,I%)-T*U(4,I%))*D:
3900 (U(1,I%)+T*U(3,I%))*D: (U(2,I%)+T*U(4,I%))*D: NEXT I%
4000 PRINT PAGE: "(2) STRESS RESULTANTS AND DEFORMATIONS": SKIP(2);
4100 "DEG. N(FAI) N(THETA) M(FAI) M(THETA)I
4200 Q X(KAI)*1000 Y*100 D(Z)/D(X)"
4300 T=P*D/(2*P1*A): S=P*D*D/(4*P1*U*U)
4400 FOR I%=1% TO N2% STEP 1%: IF I%<N3% THEN 4600
4500 J=90%+(I%-2%)*C%: GOTO 4700
4600 J=90%-(I%-1%)*C%:
4700 PRINT USING 4900, J: U(1,I%)*T: U(2,I%)*T: U(3,I%)*S: U(4,I%)*S;
4800 W(1,I%)*T: W(2,I%)*1000: W(3,I%)*100*A: W(4,I%)*A: NEXT I%
4900 %*** -****,***** -****,***** -****,***** -****,*****
5000 -****,***** -****,***** -****,***** -****,*****
5100 PRINT SKIP(2): "(3) AXIAL DISPLACEMENT Z=" ; Z
5200 PRINT SKIP(2): "(4) ORIGINAL DATA"
5300 PRINT SKIP: PRINT USING 5500, U: D: A/D: A: A*I)*SQR(3*(1-V*V))/U
5400 PRINT USING 5600, P%*P: 50*Q*P*D/(P1*A*A): E: V: N%: C%: END
5500 %MIU=**, ** ALFA=.,***** R=**,*** (MM) A=**,*** (MM) H=**,***** (MM)
5600 %P=-*****(KG), Q=-*,***** (KG/CM^2), E=*****.(KG/MM^2), V=.,*****
5700 N=**, M=**

```

## (五)、子程序文件

```

100 SUB "WANG1" (U( ), U, D, P%, Q, N%, N2%, Z): SELECT DEGREES
200 P1=3.14159265358979: F=.5*SQR(2)
300 Z1, Z2, Z=0%: N1%=N2%-1%: N3=N2%/2%: N4%=N3%-1%
400 DIM A(3), Y(T), Y1(T), Y2(T), D(T), D1(T), U(4, 182), W(4, 182)
500 A(1)=1/(N4%*2%*N%): A(2)=(1-F)*2%*A(1): A(3)=(1+F)*2%*A(1)
600 MAT Y=ZER: U(1, 1), U(2, 1), U(3, 1), U(4, 1)=0%
700 S=0%: C=1%: T=1%+D: GOSUB 4200
800 B%=1%: FOR L%=1% TO N1% STEP 1%
900 FOR M%=1% TO N% STEP 1%: FOR I%=1% TO 6% STEP 1%
1000 Y1(I%), Y2(I%)=Y(I%): NEXT I%: MAT D1=ZER
1100 FOR K%=1% TO 3% STEP 1%: FOR I%=1% TO 6% STEP 1%
1200 Y(I%)=Y2(I%)+A(K%)*D(I%)+((K%-1%)*A(1)-A(K%))*D1(I%)
1300 Y1(I%)=Y1(I%)+A(K%)*D(I%)/3: D1(I%)=D(I%): NEXT I%

```

```

1400 S=SIN(90%*Y(1)); C=COS(90%*Y(1)); T=1%+D*C; GOSUB 4200
1500 NEXT K%; FOR I%=1% TO 6% STEP 1%; Y(I%)=Y1(I%)+A(1)*D(I%)/3
1600 NEXT I%; S=SIN(90%*Y(1)); C=COS(90%*Y(1)); T=1%+D*C; GOSUB 4200
1700 NEXT M%; IF L%=N4% THEN GOSUB 4500
1800 FOR I%=1% TO 4% STEP 1%; U(I%, L%+1%)=Y(I%+1%); NEXT I%; NEXT L%
1900 Z=Y(6); MAT Y=ZER; W(1, 1), W(2, 1), W(4, 1)=0%; Y(4), W(3, 1)=1%
2000 S=0%; C=1%; T=1%+D; GOSUB 4200
2100 A%=1%; B%=0%; FOR L%=1% TO N1% STEP 1%
2200 FOR M%=1% TO N% STEP 1%; FOR I%=1% TO 7% STEP 1%
2300 Y1(I%), Y2(I%)=Y(I%); NEXT I%; MAT D1=ZER
2400 FOR K%=1% TO 3% STEP 1%; FOR I%=1% TO 7% STEP 1%
2500 Y(I%)=Y2(I%)+A(K%)*D(I%)+((K%-1%)*A(1)-A(K%))*D1(I%)
2600 Y1(I%)=Y1(I%)+A(K%)*D(I%)/3; D1(I%)=D(I%); NEXT I%
2700 S=SIN(90%*Y(1)); C=COS(90%*Y(1)); T=1%+D*C; GOSUB 4200
2800 NEXT K%; FOR I%=1% TO 7% STEP 1%; Y(I%)=Y1(I%)+A(1)*D(I%)/3
2900 NEXT I%; S=SIN(90%*Y(1)); C=COS(90%*Y(1)); T=1%+D*C; GOSUB 4200
3000 NEXT M%; IF L%=N4% THEN GOSUB 4700
3100 FOR I%=1% TO 4% STEP 1%; W(I%, L%+1%)=Y(I%+1%); NEXT I%; NEXT L%
3200 Z1=Y(6); Z2=Y(7); C=Y(2)*Y(2)+Y(3)*Y(3); IF C<1 E-9 THEN 4100
3300 F=(-U(1, N2%)*Y(2)-U(2, N2%)*Y(3))/C
3400 G=(U(1, N2%)*Y(3)-U(2, N2%)*Y(2))/C
3500 A%=1%; FOR I%=1% TO N2% STEP 1%; IF I%>N3% THEN A%=-1%
3600 U(1, I%)=U(1, I%)+F*W(1, I%)+A%*G*W(2, I%)
3700 U(2, I%)=U(2, I%)+F*W(2, I%)-A%*G*W(1, I%)
3800 U(3, I%)=U(3, I%)+F*W(3, I%)+A%*G*W(4, I%)
3900 U(4, I%)=U(4, I%)+F*W(4, I%)-A%*G*W(3, I%); NEXT I%
4000 Z=Z+F*Z1+G*Z2; END
4100 N%=0%; END
4200 D(1)=1%; D(2)=Y(4); D(3)=Y(5); D(6)=S*Y(2)/T; D(7)=A%*S*Y(3)/T
4300 D(4)=-D*S*Y(4)+U*P1*C*Y(3)+B%*2*P1*U*U*S*P%/D)*.5*P1/T
4400 D(5)=-D*S*Y(5)-U*P1*C*Y(2)-B%*.5*P1*D*U*S*Q)*.5*P1/T; RETURN
4500 FOR I%=1% TO 4% STEP 1%; U(I%, N3%)=Y(I%+1%); NEXT I%; L%=L%+1%
4600 Y(3)=-Y(3)+4%*U*(P%+Q/D); Y(5)=-Y(5)-3%*P1*U*Q; RETURN
4700 FOR I%=1% TO 4% STEP 1%; W(I%, N3%)=Y(I%+1%); NEXT I%
4800 Y(3)=-Y(3); Y(5)=-Y(5); L%=L%+1%; A%=-1%; RETURN

```

## 参 考 文 献

1. 钱伟长、郑思梁, 轴对称圆环壳的复变量方程和轴对称细环壳的一般解, 清华大学学报, 19(1979), 27—47.
2. 钱伟长, 半圆弧波纹管的计算——细环壳理论的应用, 清华大学学报, 19(1979), 84—99.
3. 钱伟长、郑思梁, 轴对称圆环壳的一般解, 应用数学和力学, 1, 3(1980).
4. 钱伟长、郑思梁, 半圆弧波纹管的计算——环壳一般解的应用, 应用数学和力学, 2, 1(1981).
5. 谢志成、付承诵、郑思梁, 有曲率突变的轴对称壳(波纹管)的有限元解, 应用数学和力学, 2, 1(1981).
6. 陈山林, S型波纹管的轴对称应力和位移, (未发表).
7. Turner, C. E., and Ford, H., Stress and Deflection of Pipeline Expansion Bellows,

- P. T. I. M. E.*, 171 (1957), 526—552.
8. Новожилов В. В., *Теория Тонких Оболочек*, (1951).
  9. 南京大学数学系计算数学专业编, 《常微分方程的数值解法》(1979).
  10. Gill, S., A Process for step-by-step integration of differential equations in the automatic digital computing machine, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, 47 (1951), 96—108.
  11. 南京大学数学系计算数学专业编, 《数值逼近方法》(1978).
  12. Clark, R.A., On the theory of thin elastic toroidal shells, *J. Math. and Phys.*, 29 (1950), 146—178.
  13. Осилова Л. Н., и Тумаркин С. А., Таблицы для Расчета торообразных Облочек, Вычислительный Центр Ан СССР, Москва, (1963).
  14. Turner, C. E., Study of the symmetrical elastic loading of some shells of revolution, with special reference to toroidal elements, *J. of Mech. Eng. Sci.*, 1(1959), 113—129.
  15. Turner, C. E., Stress and deflection studies of flat-plate and toroidal expansion bellows, subjected to axial, eccentric or internal pressure loading, *J. Mech. Eng. Sci.*, 1 (1959), 130—143.
  16. Hamada, M. and Takezoho, S., Strength of U-shaped bellows (First Report, Case of Axial Loading), *Bull., JSME*, 8, 32 (1965), 525—531.
  17. Hamada, M. and Takezoho, S., Strength of U-Shaped bellows (Third Report, Case of Loading of Internal Pressure), *Bull. JSME*, 9, 35(1966), 513—523.
  18. Андреева, Л. Е., Беседа, А. И. и Сильфоны, ДР., Расчет и Проектирование, М. Машиностроение, (1975).
  19. Reissner, E., On the theory of thin elastic shells, Reissner Anniversary Volume, Contributions to *Applied Mechanics*, Ann Arbor, Edwards, (1949), 231—247.

## Calculation of Stresses and Deformations of Bellows by Initial parameter Method of Numerical Integration

Hwang Chien

(Tsing Hua University, Beijing)

### Abstract

By reducing the boundary value problem in stress analysis of bellows into initial value problem, this paper presents a numerical solution of stress distribution in semi-circular arc type bellows based upon the toroidal shell equation of V. V. Novozelov<sup>(8)</sup>. Throughout the computation, S. Gill's method<sup>(10)</sup> of extrapolation is used. The stresses and deformations of bellows under axial load and internal pressure are calculated, the results of which agree completely with those derived from the general solution of Prof. Chien Weizang. The extrapolation formula presented in this paper greatly promotes the accuracy of discrete calculation.

The computer program in BASIC language of Wang 2200 VS computer is included in the appendix.