应用数学和力学，第2卷第6期（1981年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

# 圆底扁球壳在偏心集中载荷下的计算

包世华　龙驭球

（清华大学，1981年3月15日收到）

**摘　要**

本文讨论圆底扁球壳在非对称载荷下的计算，给出了六种偏心集中载荷下的解，它们是：

1. 法向集中力，
2. 经线切向集中力，
3. 纬线切向集中力，
4. 切面内集中力偶，
5. 经线法面内集中力偶，
6. 纬线法面内集中力偶.

此外，由偏心集中载荷的解还导出了按 $\cos n\theta$ 分布的环形线载荷的解.

## 一、引　言

关于球壳在顶部受集中载荷的问题，已有相当完备的解答. 在顶点受法向集中力的情况，首先由Reissner，E.[1]用扁壳理论得出；Flügge，W.[2]和Koiter，W. T.[3]又用非扁壳理论讨论过. 在顶点受切向集中力、法面内集中力偶和切面内集中力偶的情况，Lukasiewicz，S.[4]用扁壳理论讨论过；Seide，P.[5]和Lukasiewicz，S.[6]又用非扁壳理论讨论过.

关于球壳受偏心集中载荷的问题，讨论得较少. Коренев，Б. Г. 在[7]中讨论过扁球壳在偏心载荷下的问题，但其解答远未完备. Гнатыкив，В. Н.[8]补充了Коренев解中遗漏的项，给出了偏心法向集中力和经线法面内集中力偶的解，但他将应力函数 $\varphi$ 表成任意双调和函数与一特解之和，未能满足基本平衡微分方程. 此外，将应力函数 $\varphi$ 只表成三角级数，也是不完全的. 例如它不能包括下面载荷②、③、④的情形，对于载荷①、⑤、⑥的情形也需补充有关切向位移的单值条件，同时在具体求解时，只对挠度 $w$ 转换极点，根据 $w$ 求应力函数的特解，也造成解答的遗漏. 因此所得结果是有问题的.

另外，Wilkinson，J. P. 和Kalnins，A.[9]讨论过球壳受偏心法向集中力的问题，但未涉及其他五种载荷，且所用方法也与本文不同.

本文在[7]、[8]的基础上，讨论圆底扁球壳在任意点受集中载荷的计算，包括所有可能的六种情形：

① 法向集中力，

② 经线切向集中力，
③ 纬线切向集中力，
④ 切面内集中力偶，
⑤ 经线法面内集中力偶，
⑥ 纬线法面内集中力偶.

求解时将解分成齐次解及特解两部分，而特解则利用无限壳在顶点受集中载荷的解，通过转换极点的方法和 Bessel 函数的叠加公式求得.此外，由上述结果还得出了按 $\cos n\theta$ 分布的环形线载荷的解．其中部分结果在[10]中曾用初参数法求得．本文例题由张铜生同志计算.

## 二、扁球壳的基本方程及其齐次解

**1．扁球壳的基本方程为**[11]：

$$\left.\begin{aligned}&\nabla^2\nabla^2\varphi+\frac{Et}{R}\nabla^2 w=0\\&\nabla^2\nabla^2 w-\frac{1}{RD}\nabla^2\varphi=\frac{q}{D}\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

这里

$$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{\partial}{r\partial r}+\frac{\partial^2}{r^2\partial\theta^2}\tag{2.2}$$

各内力分量与应力函数 $\varphi$ 及挠度 $w$ 的关系为：

$$\left.\begin{aligned}&N_r=\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2}\\&N_\theta=\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\\&N_{r\theta}=\frac{\partial\varphi}{r^2\partial\theta}-\frac{\partial^2\varphi}{r\partial r\partial\theta}\\&M_r=-D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{\nu}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{\nu}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)\\&M_\theta=-D\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}+\nu\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right)\\&M_{r\theta}=-(1-\nu)D\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}\right)\\&Q_r=-D\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w\\&Q_\theta=-D\frac{\partial}{r\partial\theta}\nabla^2 w\\&V_r=Q_r+\frac{\partial M_{r\theta}}{r\partial\theta}\end{aligned}\right\}\tag{2.3}$$

位移分量与内力的关系为：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial r}-\frac{w}{R}=\frac{N_r-\nu N_\theta}{Et}\\
&\frac{\partial v}{r\partial\theta}+\frac{u}{r}-\frac{w}{R}=\frac{N_\theta-\nu N_r}{Et}\\
&\frac{\partial u}{r\partial\theta}+r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right)=\frac{2(1+\nu)N_{r\theta}}{Et}
\end{aligned}\right\}\qquad(2.4)
$$

转角:

$$\beta=\frac{\partial w}{\partial r}\qquad(2.5)$$

各物理量的意义见图 1，图中所示为正方向.

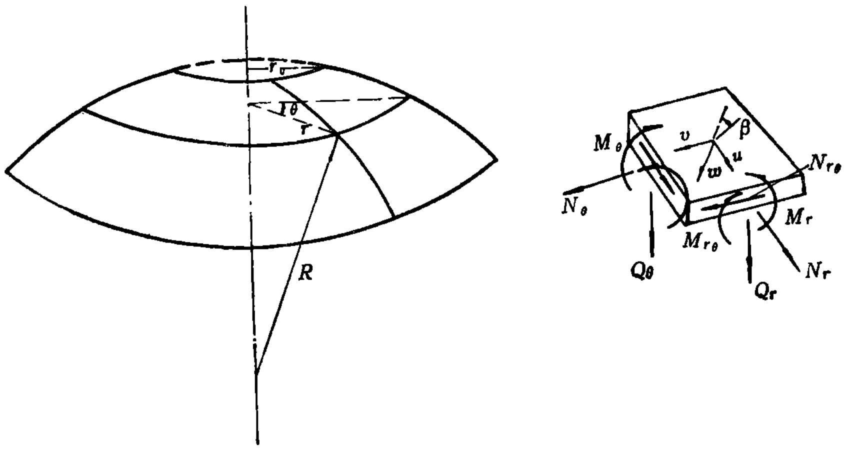


图 1

2. 齐次方程的解参照 [11] 及 [10] 的方法，可求得为:

$$
w=\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Et^2}\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(C_n^{\cdot}\,\mathrm{ber}_n\,\bar r+C_n\,\mathrm{bei}_n\,\bar r+D_n'\,\mathrm{kei}_n\,\bar r-D_n'\,\mathrm{ker}_n\,\bar r
+\left\langle\begin{matrix}A_n^{\cdot}\,\bar r^{\,n}+B_n^{\cdot}\bar r^{-n}\\ A_0^{\cdot}+0\end{matrix}\right\rangle\Bigg)\cos n\theta\qquad(2.6)
$$

$$
\varphi=\sum_{n=0}^{\infty}\Bigg(C_n'\,\mathrm{ber}_n\,\bar r-C_n^{\cdot}\,\mathrm{bei}_n\,\bar r+D_n^{\cdot}\,\mathrm{ker}_n\,\bar r+D_n'\,\mathrm{kei}_n\,\bar r
+\left\langle\begin{matrix}A_n'\,\bar r^{\,n}+B_n'\bar r^{-n}\\ 0\\ 0\quad+B_0'\ln\bar r\end{matrix}\right\rangle\Bigg)\cos n\theta+\frac{B_1^{\cdot}}{1+\nu}\,\bar r\,(\theta\sin\theta-\ln\bar r\cdot\cos\theta)+B_0^{\cdot}\theta\qquad(2.7)
$$

这里 $A_n^{\cdot}$, $A_n'$ …为待定常数. 式中 ⟨ ⟩ 内并列的三行中，上行为 $n\geqslant2$，中行为 $n=1$，下行为 $n=0$ 的结果; ⟨ ⟩ 内并列两行时，上行为 $n\geqslant1$，下行 $n=0$ 的结果. 以下同此.

为了方便，这里采用了无量纲坐标

$$\bar{r}=\frac{r}{l} \tag{2.8}$$

其中

$$l=\sqrt[4]{\frac{R^2t^2}{12(1-\nu^2)}} \tag{2.9}$$

应当指出，在Власов，В. З. [14] 和 Lukasiewicz，S. [6] 中，齐次方程的解是不完全的，比式（2.6）和（2.7）少了后面那些项.

应力函数 $\varphi$ 中有两项是多值函数，但相应的内力和位移仍是单值的，其中 $\bar{r}\theta\sin\theta$ 项是保证位移 $u$、$v$ 为单值所必需的.

将式（2.6）和（2.7）代入式（2.3）的有关式中可得

$$N_r=\frac{1}{l^2\bar{r}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[C_n'\left(\mathrm{ber}_n'\bar{r}-\frac{n^2}{\bar{r}}\mathrm{ber}_n\bar{r}\right)-C_n^{\cdot}\left(\mathrm{bei}_n'\bar{r}-\frac{n^2}{\bar{r}}\mathrm{bei}_n\bar{r}\right)\right.\right.$$
$$+D_n'\left(\mathrm{kei}_n'\bar{r}-\frac{n^2}{\bar{r}}\mathrm{kei}_n\bar{r}\right)+D_n^{\cdot}\left(\mathrm{ker}_n'\bar{r}-\frac{n^2}{\bar{r}}\mathrm{ker}_n\bar{r}\right)$$
$$\left.\left.+\left\langle\begin{matrix}-B_n'n(1+n)(\bar{r})^{-n-1}\\ -B_1'2(\bar{r})^{-2}+\dfrac{B_1}{1+\nu}\\ +B_0'(\bar{r})^{-1}\end{matrix}\right\rangle\right]\cos n\theta\right\} \tag{2.10}$$

$$N_\theta=\frac{1}{l^2\bar{r}}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\left[-C_n^{\cdot}\left(\frac{n^2}{\bar{r}}\mathrm{bei}_n\bar{r}+\bar{r}\,\mathrm{ber}_n\bar{r}-\mathrm{bei}_n'\bar{r}\right)+C_n'\left(\frac{n^2}{\bar{r}}\mathrm{ber}_n\bar{r}-\bar{r}\,\mathrm{bei}_n\bar{r}-\mathrm{ber}_n'\bar{r}\right)\right.\right.$$
$$+D_n'\left(\frac{n^2}{\bar{r}}\mathrm{kei}_n\bar{r}+\bar{r}\,\mathrm{ker}_n\bar{r}-\mathrm{kei}_n'\bar{r}\right)-D_n^{\cdot}\left(-\frac{n^2}{\bar{r}}\mathrm{ker}_n\bar{r}+\bar{r}\,\mathrm{kei}_n\bar{r}+\mathrm{ker}_n'\bar{r}\right)$$
$$\left.\left.+\left\langle\begin{matrix}B_n'n(n+1)(\bar{r})^{-n-1}\\ B_1'\,2(\bar{r})^{-2}-\dfrac{B_1}{1+\nu}\\ -B_0'(\bar{r})^{-1}\end{matrix}\right\rangle\right]\cos n\theta\right\} \tag{2.11}$$

$$N_{r\theta}=\frac{1}{l^2\bar{r}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}n\left[C_n'\left(\mathrm{ber}_n'\bar{r}-\frac{1}{\bar{r}}\mathrm{ber}_n\bar{r}\right)-C_n^{\cdot}\left(\mathrm{bei}_n'\bar{r}-\frac{1}{\bar{r}}\mathrm{bei}_n\bar{r}\right)\right.\right.$$
$$+D_n'\left(\mathrm{kei}_n'\bar{r}-\frac{1}{\bar{r}}\mathrm{kei}_n\bar{r}\right)+D_n^{\cdot}\left(\mathrm{ker}_n'\bar{r}-\frac{1}{\bar{r}}\mathrm{ker}_n\bar{r}\right)$$
$$\left.\left.+A_n'(n-1)(\bar{r})^{n-1}-B_n'(n+1)(\bar{r})^{-n-1}-\frac{B_1}{1+\nu}\right]\sin n\theta+\frac{B_0^{\cdot}}{\bar{r}}\right\} \tag{2.12}$$

$$M_r=-\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{C_n^{\cdot}\left[-\mathrm{bei}_n\bar{r}-(1-\nu)\left(\frac{\mathrm{ber}_n'\bar{r}}{\bar{r}}-\frac{n^2}{\bar{r}^2}\mathrm{ber}_n\bar{r}\right)\right]+C_n'\left[\mathrm{ber}_n\bar{r}\right.\right.$$

$$-(1-\nu)\left(\frac{\mathrm{bei}_n'\bar r}{\bar r}-\frac{n^2}{\bar r^2}\mathrm{bei}_n\bar r\right)\Big]+D_n^{\cdot}\Big[\mathrm{ker}_n\bar r-(1-\nu)\left(\frac{\mathrm{kei}_n'\bar r}{\bar r}-\frac{n^2}{\bar r^2}\mathrm{kei}_n\bar r\right)\Big]$$

$$+D_n'\Big[\mathrm{kei}_n\bar r+(1-\nu)\left(\frac{\mathrm{ker}_n'\bar r}{\bar r}-\frac{n^2}{\bar r^2}\mathrm{ker}_n\bar r\right)\Big]+A_n^{\cdot}n(n-1)(1-\nu)(\bar r)^{n-2}$$

$$+B_n^{\cdot}n(n+1)(1-\nu)(\bar r)^{-n-2}\Big\}\cos n\theta \tag{2.13}$$

$$V_r=\frac{1}{Rl}\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{C_n^{\cdot}\Big[\mathrm{bei}_n'\bar r+\frac{(1-\nu)n^2}{\bar r^2}\left(\mathrm{ber}_n'\bar r-\frac{1}{\bar r}\mathrm{ber}_n\bar r\right)\Big]+C_n'\Big[-\mathrm{ber}_n'\bar r$$

$$+\frac{(1-\nu)n^2}{\bar r^2}\left(\mathrm{ber}_n'\bar r-\frac{1}{\bar r}\mathrm{bei}_n\bar r\right)\Big]+D_n^{\cdot}\Big[-\mathrm{ker}_n'\bar r+\frac{(1-\nu)n^2}{\bar r^2}\left(\mathrm{kei}_n'\bar r-\frac{1}{\bar r}\mathrm{kei}_n\bar r\right)\Big]$$

$$+D_n'\Big[-\mathrm{kei}_n'\bar r+\frac{(1-\nu)n^2}{\bar r^2}\left(-\mathrm{ker}_n'\bar r+\frac{1}{\bar r}\mathrm{ker}_n\bar r\right)\Big]+A_n^{\cdot}n(n-1)(1-\nu)(\bar r)^{n-3}$$

$$-B_n^{\cdot}n^2(n+1)(1-\nu)(\bar r)^{-n-3}\Big\}\cos n\theta \tag{2.14}$$

将(2.6)—(2.12)的有关结果代回(2.4)积分，可求得：

$$u=-\frac{1+\nu}{Etl}\Big\{\sum_{n=0}^{\infty}\Big[C_n'\mathrm{ber}_n'\bar r-C_n^{\cdot}\mathrm{bei}_n'\bar r+D_n^{\cdot}\mathrm{ker}_n'\bar r+D_n'\mathrm{kei}_n'\bar r+A_n'n(\bar r)^{n-1}$$

$$+\left\langle\begin{matrix}-B_n'n(\bar r)^{n-1}\\-B_0'(\bar r)^{-1}\end{matrix}\right\rangle-\frac{1}{1+\nu}\left(A_n^{\cdot}\frac{\bar r^{n+1}}{n+1}+\left\langle\begin{matrix}-B_n^{\cdot}\dfrac{\bar r^{-n+1}}{n-1}\\+2B_1^{\cdot}\ln\bar r\\+0\end{matrix}\right\rangle\right)\Big]\cos n\theta\Big\}$$

$$\tag{2.15}$$

$$v=\frac{1+\nu}{Etl}\Big\{\sum_{n=1}^{\infty}\Big(C_n'\frac{n}{\bar r}\mathrm{ber}_n\bar r-C_n^{\cdot}\frac{n}{\bar r}\mathrm{bei}_n\bar r+D_n^{\cdot}\frac{n}{\bar r}\mathrm{ker}_n\bar r+D_n'\frac{n}{\bar r}\mathrm{kei}_n\bar r$$

$$+A_n'n(\bar r)^{n-1}+\frac{1}{1+\nu}A_n^{\cdot}\frac{(\bar r)^{n+1}}{n+1}+B_n^{\cdot}\frac{(\bar r)^{-n+1}}{(1+\nu)(n-1)}+B_n'n(\bar r)^{-n-1}\Big]\sin n\theta$$

$$-2B_1^{\cdot}\frac{\ln\bar r}{1+\nu}\sin\theta-\frac{B_0^{\cdot}}{\bar r}+A_0'\bar r\Big\} \tag{2.16}$$

将(2.6)代入(2.5)，可求得：

$$\beta=\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Et^2l}\sum_{n=0}^{\infty}(C_n^{\cdot}\mathrm{ber}_n\bar r+C_n'\mathrm{bei}_n'\bar r+D_n^{\cdot}\mathrm{kei}_n'\bar r-D_n'\mathrm{ker}_n'\bar r+A_n^{\cdot}n\bar r^{n-1}$$

$$-B_n^{\cdot}n\bar r^{-n-1})\cos n\theta \tag{2.17}$$

上面给出了齐次问题的全部解答，解答中共包含了 $A_n^{\cdot}$，$A_n'$，$B_n^{\cdot}$，$B_n'$，$C_n^{\cdot}$，$C_n'$，$D_n^{\cdot}$及 $D_n$ $8n$ 个常数，由壳内外边界每边 $4n$ 个条件，共 $8n$ 个条件确定.

文献［10］中以不同的形式给出过当 $\nu=0$ 时的齐次解．最后可以指出，将前面正弦、余弦互换，可以得到另一组齐次解．

## 三、无限扁球壳在壳顶集中载荷下的解

根据前节的公式，下面给出无限壳当壳顶作用有：①法向集中力，②切面内集中力矩，③经线切向集中力及④经线法面内力矩四种载荷情况（图 2）时的解答．这时，根据无限壳远端位移及内力为有限值的条件，常数 $A_n^{\cdot}$，$A_n^{\prime}$，$C_n^{\cdot}$ 及 $C_n^{\prime}$ 应为零．另外四个常数由顶点条件确定．

①法向集中力 $P_z$：

为轴对称问题，即相应于 $n=0$ 的解，利用条件

$$w(0)=\text{有限值}$$
$$N_{r\theta}=0(\text{或 } v=0)$$
$$\lim_{r\to 0} V_r\,2\pi r+P_z=0$$
$$N_r(0)=N_\theta(0)=\text{有限值}$$

后，可求得：

$$w=-\frac{P_zR\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\pi Et^2}\,\text{kei}\,\bar{r} \quad (3.1)$$

$$\varphi=-\frac{P_zR}{2\pi}\,(\ln\bar{r}+\text{ker}\,\bar{r}) \quad (3.2)$$

上式与文献［1］的结果是一样的．

②切面内集中力矩 $M_z$：

亦为轴对称问题，利用条件

$$w(0)=\text{有限值},$$
$$N_r(0)=N_\theta(0)=\text{有限值},$$
$$\lim_{r\to 0} V_r\,2\pi r=0$$
$$N_{r\theta}\,2\pi r^2=M_z$$

后，可求得：

$$w=0 \quad (3.3)$$

$$\varphi=\frac{M_z}{2\pi}\theta \quad (3.4)$$

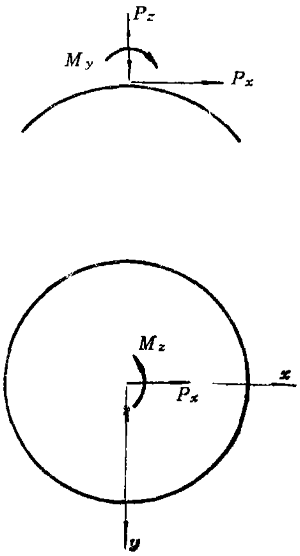

图 2

③经线切向集中力 $P_x$：

为对 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 轴为反对称的问题，即相应于 $n=1$ 的解，利用条件：

$$w(0)=\text{有限值},$$
$$M_r(0)=0$$
$$\int_0^{2\pi}(N_r\cos\theta-N_{r\theta}\sin\theta)rd\theta=-P_x$$

$$\int_0^{2\pi}\left[M_r\cos\theta\cdot r-\left(V_r+\frac{r}{R}N_r\right)r^2\cos\theta\right]d\theta=0$$

后，可求得：

$$w=-\frac{P_x(1+\nu)l\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\pi Et^2}\left(\frac{1}{\bar r}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{kei}_1\,\bar r+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{ker}_1\,\bar r\right)\cos\theta \qquad (3.5)$$

$$\varphi=\frac{P_x(1+\nu)l}{2\pi}\left\{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{kei}_1\,\bar r-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{ker}_1\,\bar r+\frac{\bar r}{1+\nu}\ln\bar r\right]\cos\theta-\frac{\bar r}{1+\nu}\theta\sin\theta\right\} \qquad (3.6)$$

④经线法面内集中力矩 $M_y$：

亦为对 $\theta=\frac{\pi}{2}$ 轴为反对称的问题，利用条件

$w(0)=$有限值，

$$\int_0^{2\pi}\left[N_r\cos\theta-N_{r\theta}\sin\theta\right]rd\theta=0$$

$$\int_0^{2\pi}\left[M_r\cos\theta\cdot r-\left(V_r+\frac{r}{R}N_r\right)r^2\cos\theta\right]d\theta=M_y$$

$N_r(0)=$有限值，

后，可求得：

$$w=\frac{M_y\sqrt{2}\,l}{4\pi D}(\mathrm{kei}_1\,\bar r-\mathrm{ker}_1\,\bar r)\cos\theta \qquad (3.7)$$

$$\varphi=\frac{M_yR}{2\pi l}\left(\frac{1}{\bar r}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{ker}_1\,\bar r+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{kei}_1\,\bar r\right)\cos\theta \qquad (3.8)$$

当 $\nu=0$ 时 (3.1)—(3.8) 的结果与文献 [10] 中用不同方法得到的结果是一样的.

## 四、扁球壳在偏心集中载荷下的解

扁球壳在偏心集中载荷作用时，可将解分成齐次解及特解两部分. 齐次解第二节中已给出，特解则可利用前节无限壳顶点受集中载荷的解再采用转换极点的方法求得.

图 3 中 $A$ 为集中载荷作用点，任一点 $B$ 的特解，可采用前节的公式，但需将公式中的 $\bar r$ 换成 $\bar\rho$，$\theta$ 换成 $\delta$，由图 3 知道：

$$\bar\rho=\sqrt{\bar r^2+\bar a^2-2\bar a\bar r\cos\theta} \qquad (4.1)$$

$$\delta=\mathrm{arctg}\frac{\bar r\sin\theta}{\bar r\cos\theta-\bar a} \qquad (4.2)$$

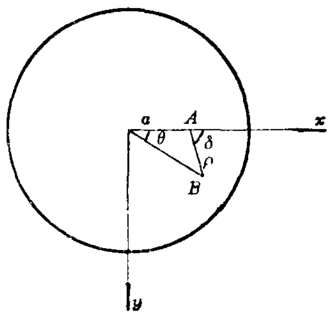

图 3

解题时需将特解展成 $\begin{matrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{matrix}$ 表示的级数.

下面给出六种偏心集中载荷作用时的特解（载荷的正方向如图 4 所示）：

①法向集中力 $P_z$：

用 (4.1) 与 (4.2) 中的 $\bar\rho$ 及 $\delta$ 代替 (3.1) 及 (3.2) 中的 $\bar r$ 及 $\theta$，将解展成三角级

数，展开时利用了 Bessel 函数的下述叠加公式[12]，

$$H_0^{(1)}(\bar\rho i^{\frac12})=\sum_0^{\infty}\varepsilon_n J_n(\bar r i^{\frac12})H_n^{(1)}(\bar a i^{\frac12})\cos n\theta,\qquad \text{当 } r\leqslant a \text{ 时，}$$

$$H_0^{(1)}(\bar\rho i^{\frac12})=\sum_0^{\infty}\varepsilon_n J_n(\bar a i^{\frac12})H_n^{(1)}(\bar r i^{\frac12})\cos n\theta,\qquad \text{当 } r\geqslant a \text{ 时，}$$

式中 $\varepsilon_0=1$，$\varepsilon_n=2(n\geqslant 1)$.

最后得到：

当 $r\leqslant a$ 时：

$$w=-\frac{P_zR\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\pi Et^2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(\mathrm{ber}_n\bar r\cdot\mathrm{kei}_n\bar a+\mathrm{bei}_n\bar r\cdot\mathrm{ker}_n\bar a)\cos n\theta \qquad (4.3)$$

$$\varphi=-\frac{P_zR\varepsilon_n}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{ber}_n\bar r\cdot\mathrm{ker}_n\bar a-\mathrm{bei}_n\bar r\cdot\mathrm{kei}_n\bar a+\left\langle\begin{array}{c}-\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{\bar r}{\bar a}\right)^n\\ 0\end{array}\right\rangle\right)\cos n\theta \qquad (4.4)$$

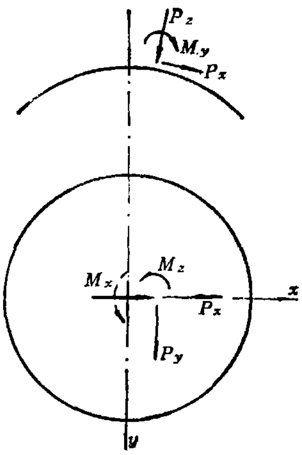

图 4

当 $r\geqslant a$ 时：

$$w=-\frac{P_zR}{2\pi}\frac{\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Et^2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(\mathrm{ber}_n\bar a\,\mathrm{kei}_n\bar r+\mathrm{bei}_n\bar a\cdot\mathrm{ker}_n\bar r)\cos n\theta \qquad (4.5)$$

$$\varphi=-\frac{P_zR\varepsilon_n}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\mathrm{ber}_n\bar a\cdot\mathrm{ker}_n\bar r-\mathrm{bei}_n\bar a\cdot\mathrm{kei}_n\bar r+\left\langle\begin{array}{c}-\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{\bar a}{\bar r}\right)^n\\ \ln\bar r\end{array}\right\rangle\right)\cos n\theta \qquad (4.6)$$

②经线切向集中力 $P_x$：

用 (4.1) 与 (4.2) 中的 $\bar\rho$ 及 $\delta$ 代替 (3.5) 及 (3.6) 中的 $\bar r$ 及 $\theta$. 将解展成三角级数，展开时利用了下述叠加公式：

$$H_1^{(1)}(\bar\rho i^{\frac12})\cos\delta=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n H_n^{(1)\prime}(\bar a i^{\frac12})J_n(\bar r i^{\frac12})\cos n\theta,\ \text{当 } r<a \text{ 时，}$$

$$H_1^{(1)}(\bar\rho i^{\frac12})\cos\delta=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n H_n^{(1)}(\bar r i^{\frac12})J_n'(\bar a i^{\frac12})\cos n\theta,\ \text{当 } r>a \text{ 时.}$$

由 [12] 的叠加原理不难导出上述关系式.

此外，当 $r>a$ 时，$\bar\rho\delta\sin\delta$ 项为多值项，可用减去另一多值函数 $\bar\rho\theta\sin\delta$ 变为 $\bar\rho\sin\delta(\delta-\theta)$，它是单值函数可展开成三角级数.

详细的推导见附录. 最后得到：

当$r<a$时：

$$w=\frac{P_x(1+\nu)l\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\pi Et^2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\left\{\operatorname{ker}_n'\bar{a}\cdot\operatorname{ber}_n\bar{r}-\operatorname{kei}_n'\bar{a}\cdot\operatorname{bei}_n\bar{r}+\frac{1}{2}\frac{(\bar{r})^n}{(\bar{a})^{n+1}}\right\}\cos n\theta \tag{4.7}$$

$$\varphi=\frac{P_x(1+\nu)l}{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\left\{-\operatorname{kei}_n'\bar{a}\cdot\operatorname{ber}_n\bar{r}-\operatorname{ker}_n'\bar{a}\cdot\operatorname{bei}_n\bar{r}+\left\langle\begin{matrix}-\frac{1}{1+\nu}\frac{1}{2n(n-1)}\frac{(\bar{r})^n}{(\bar{a})^{n-1}}\\0\\0\end{matrix}\right\rangle\right\}\cos n\theta \tag{4.8}$$

当 $r>a$ 时：

$$w=\frac{P_x(1+\nu)l\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\pi Et^2}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\left\{\operatorname{ker}_n\bar{r}\cdot\operatorname{ber}_n\bar{a}-\operatorname{kei}_n\bar{r}\cdot\operatorname{bei}_n'\bar{a}-\frac{1}{2}\frac{(\bar{a})^{n-1}}{(\bar{r})^n}\right\}\cos n\theta \tag{4.9}$$

$$\varphi=\frac{P_x(1+\nu)l}{2\pi}\left\{\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n\left|-\operatorname{kei}_n\bar{r}\cdot\operatorname{ber}_n'\bar{a}-\operatorname{ker}_n\bar{r}\cdot\operatorname{bei}_n'\bar{a}+\left\langle\begin{matrix}\frac{1}{1+\nu}\frac{1}{2n(n+1)}\frac{(\bar{a})^{n+1}}{(\bar{r})^n}\\\frac{1}{1+\nu}\frac{1}{2}\left(\bar{r}\ln\bar{r}+\frac{1}{2}\frac{\bar{a}^2}{\bar{r}}\right)\\\frac{1}{1+\nu}(-\bar{a}\ln\bar{r})\end{matrix}\right\rangle\right|\cos n\theta-\frac{1}{1+\nu}\bar{r}\theta\sin\theta\right\} \tag{4.10}$$

③环向集中力$P_y$：

用（4.1）中的$\bar{\rho}$代替$\bar{r}$及按（4.2）用$-\left(\frac{\pi}{2}-\delta\right)$代替$\theta$，由（3.5）及（3.6）可以得到：

当 $r<a$ 时：

$$w=\frac{P_y(1+\nu)l\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\pi\bar{a}Et^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2n(\operatorname{ker}_n\bar{a}\cdot\operatorname{ber}_n\bar{r}-\operatorname{kei}_n\bar{a}\cdot\operatorname{bei}_n\bar{r})-\frac{(\bar{r})^n}{(\bar{a})^n}\right\}\sin n\theta \tag{4.11}$$

$$\varphi=\frac{P_y(1+\nu)l}{2\pi\bar{a}}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-2n)(\operatorname{kei}_n\bar{a}\cdot\operatorname{ber}_n\bar{r}+\operatorname{ker}_n\bar{a}\cdot\operatorname{bei}_n\bar{r})+\left\langle\begin{matrix}-\frac{1}{1+\nu}\frac{1}{n(n-1)}\frac{(\bar{r})^n}{(\bar{a})^{n-2}}\\0\\0\end{matrix}\right\rangle\right\}\sin n\theta \tag{4.12}$$

当 $r>a$ 时：

$$w=\frac{P_y(1+\nu)l\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\pi\bar{a}Et^2}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{2n(\ker_n\bar{r}\cdot\mathrm{ber}_n\bar{a}-\mathrm{kei}_n\bar{r}\cdot\mathrm{bei}_n\bar{a})-\frac{(\bar{a})^n}{(r)^n}\right\}\sin n\theta \tag{4.13}$$

$$\varphi=\frac{P_y(1+\nu)l}{2\pi\bar{a}}\left\{\sum_{n=1}^{\infty}\left[2n(-\mathrm{kei}_n\bar{r}\cdot\mathrm{ber}_n\bar{a}-\ker_n\bar{r}\cdot\mathrm{bei}_n\bar{a})+\left\langle\begin{matrix}-\frac{1}{1+\nu}\frac{1}{n(n+1)}\frac{(\bar{a})^{n+2}}{(\bar{r})^n}\\ \frac{\bar{a}}{1+\nu}\left(\bar{r}\ln r-\frac{1}{2}\frac{\bar{a}^2}{\bar{r}}\right)\\ 0\end{matrix}\right\rangle\right]\sin n\theta+\frac{\bar{a}}{1+\nu}(\bar{r}\theta\cos\theta-\bar{a}\theta)\right\} \tag{4.14}$$

展开时利用了下述关系式：

$$H_1^{(1)}(\bar{\rho}i^{\frac{1}{2}})\sin\delta=\sum_{n=1}^{\infty}2n\frac{H_n^{(1)}(\bar{a}i^{\frac{1}{2}})}{\bar{a}i^{\frac{1}{2}}}J_n(\bar{r}i^{\frac{1}{2}})\sin n\theta,\quad 当\ r<a\ 时,$$

$$H_1^{(1)}(\bar{\rho}i^{\frac{1}{2}})\sin\delta=\sum_{n=1}^{\infty}2nH_n^{(1)}(\bar{r}i^{\frac{1}{2}})\frac{J_n(\bar{a}i^{\frac{1}{2}})}{\bar{a}i^{\frac{1}{2}}}\sin n\theta,\quad 当\ r>a\ 时.$$

利用［12］中的叠加原理可以推出上述公式.

④切面内集中力矩 $M_z$：

用（4.2）中的 $\delta$ 代替（3.4）中的 $\theta$，展成三角级数. 当 $r>a$ 时 $\delta$ 为多值函数，可减去另一多值函数 $\theta$ 变为（$\delta-\theta$），它是单值的，可展成三角级数，最后得到：

当 $r<a$ 时：

$$\left.\begin{aligned}&w=0\\&\varphi=-\frac{M_z}{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}}\right)^n\sin n\theta\end{aligned}\right\} \tag{4.15}$$

当 $r>a$ 时：

$$\left.\begin{aligned}&w=0\\&\varphi=\frac{M_z}{2\pi}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^n\sin n\theta+\theta\right]\end{aligned}\right\} \tag{4.16}$$

⑤经线法面内集中力矩 $M_y$：

可通过转换坐标也可利用法向集中力的解直接求出经线法面内集中力矩作用时的解.

当 $r\leqslant a$ 时：

$$w=-\frac{M_yR\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\pi Et^2l}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(\mathrm{ber}_n\bar{r}\cdot\mathrm{kei}_n'\bar{a}+\mathrm{bei}_n\bar{r}\cdot\ker_n'\bar{a})\cos n\theta \tag{4.17}$$

$$\varphi=-\frac{M_yR}{2\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\left[\varepsilon_n(\mathrm{ber}_n\bar{r}\cdot\ker_n\bar{a}-\mathrm{bei}_n\bar{r}\cdot\mathrm{kei}_n\bar{a})+\frac{(\bar{r})^n}{(\bar{a})^{n+1}}\right]\cos n\theta \tag{4.18}$$

当 $r\geqslant a$ 时：

$$w=-\frac{M_yR\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\pi Et^2 l}\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_n(\mathrm{ber}'_n\bar{a}\cdot\mathrm{kei}_n\bar{r}+\mathrm{bei}'_n\bar{a}\cdot\mathrm{ker}_n\bar{r})\cos n\theta \qquad (4.19)$$

$$\varphi=-\frac{M_yR}{2\pi l}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\varepsilon_n(\mathrm{ber}'_n\bar{a}\cdot\mathrm{ker}_n\bar{r}-\mathrm{bei}'_n\bar{a}\cdot\mathrm{kei}_n\bar{r})+\left\langle\begin{matrix}-\dfrac{(\bar{a})^{n-1}}{(\bar{r})^n}\\ -\dfrac{1}{\bar{r}}\\ 0\end{matrix}\right\rangle\right\}\cos n\theta \qquad (4.20)$$

从式（4.4)、(4.6) 及 (4.18)，(4.20) 可以看出，文献 [ 8 ] 的结果中应力函数的特解是有问题的．解答中不包含上述公式中最后一项，这是因为集中载荷的解是齐次解，而壳顶与偏心处齐次解并不完全相同．文献 [ 8 ] 求解时只对挠度 $w$ 转换极点．根据 $w$ 求应力函数的特解，再加上以壳顶为极点的齐次解，这样解答中就不可能出现上述的最后一项．

⑥纬线法面内集中力矩 $M_x$：

当 $r\leqslant a$ 时：

$$w=\frac{M_xR\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\pi lEt^2}\sum_{n=1}^{\infty}-2n(\mathrm{kei}_n\bar{a}\cdot\mathrm{ber}_n\bar{r}+\mathrm{ker}_n\bar{a}\cdot\mathrm{bei}_n\bar{r})\sin n\theta \qquad (4.21)$$

$$\varphi=\frac{M_xR}{2\pi l\bar{a}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-2n(\mathrm{ker}_n\bar{a}\cdot\mathrm{ber}_n\bar{r}-\mathrm{kei}_n\bar{a}\cdot\mathrm{bei}_n\bar{r})+\left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}}\right)^n\right]\sin n\theta \qquad (4.22)$$

当 $r\geqslant a$ 时：

$$w=\frac{M_xR\sqrt{12(1-\nu^2)}}{2\pi lEt^2\bar{a}}\sum_{n=1}^{\infty}-2n(\mathrm{bei}_n\bar{a}\cdot\mathrm{ker}_n\bar{r}+\mathrm{ber}_n\bar{a}\cdot\mathrm{kei}_n\bar{r})\sin n\theta \qquad (4.23)$$

$$\varphi=\frac{M_xR}{2\pi l\bar{a}}\sum_{n=1}^{\infty}\left[-2n(\mathrm{ber}_n\bar{a}\cdot\mathrm{ker}_n\bar{r}-\mathrm{bei}_n\bar{a}\cdot\mathrm{kei}_n\bar{r})+\frac{(\bar{a})^n}{(\bar{r})^n}\right]\sin n\theta \qquad (4.24)$$

在本节的解展成级数时，遇到一些比较复杂的积分，可查 [13] 中的积分表．

## 五、无限扁球壳在环形线载荷下的解

将上节集中载荷沿 $\theta$ 展成三角级数 $\left(\text{如 } P_z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{p_z\varepsilon_n}{2\pi\bar{a}l}\cos n\theta \text{ 等}\right)$，则上节解答的每一项就是在 $r=a$ 环上作用有按 $\cos n\theta$ 规律变化的环形线载荷的解．

①法向环形线载荷 $p_z\cos n\theta$

当 $r\leqslant a$ 时：

$$w=-p_z\frac{aR\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Et^2}[\mathrm{ber}_n\bar{r}\cdot\mathrm{kei}_n\bar{a}+\mathrm{bei}_n\bar{r}\cdot\mathrm{ker}_n\bar{a}]\cos n\theta \qquad (5.1)$$

$$\varphi=-p_z aR\left[\mathrm{ber}_n\,\bar r\cdot\mathrm{ker}_n\,\bar a-\mathrm{bei}_n\,\bar r\cdot\mathrm{kei}_n\,\bar a+\left\langle\begin{matrix}-\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{\bar r}{\bar a}\right)^n\\ 0\end{matrix}\right\rangle\right]\cos n\theta \quad (5.2)$$

当 $r\geqslant a$ 时：

$$w=-p_z\frac{aR\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Et^2}\left[\mathrm{ber}_n\,\bar a\cdot\mathrm{kei}_n\,\bar r+\mathrm{bei}_n\,\bar a\cdot\mathrm{ker}_n\,\bar r\right]\cos n\theta \quad (5.3)$$

$$\varphi=-p_z\,aR\left[\mathrm{ber}_n\,\bar a\cdot\mathrm{ker}_n\,\bar r-\mathrm{bei}_n\,\bar a\cdot\mathrm{kei}_n\,\bar r+\left\langle\begin{matrix}-\dfrac{1}{2n}\left(\dfrac{\bar a}{\bar r}\right)^n\\ \ln\bar r\end{matrix}\right\rangle\right]\cos n\theta \quad (5.4)$$

上式当 $\nu=0$ 时与 [10] 中的结果是一样的.

③经线切向环形线载荷 $p_r\cos n\theta$：

当 $r<a$ 时：

$$w=p_r(1+\nu)\frac{\bar aR}{Et}\left[\mathrm{ker}'_n\,\bar a\cdot\mathrm{ber}_n\,\bar r-\mathrm{kei}'_n\,\bar a\cdot\mathrm{bei}_n\,\bar r+\frac{1}{2}\frac{(\bar r)^n}{(\bar a)^{n+1}}\right]\cos n\theta \quad (5.5)$$

$$\varphi=p_r(1+\nu)\,l^2\bar a\left[-\mathrm{kei}'_n\,\bar a\cdot\mathrm{ber}_n\,\bar r-\mathrm{ker}'_n\,\bar a\cdot\mathrm{bei}_n\,\bar r+\left\langle\begin{matrix}-\dfrac{1}{1+\nu}\dfrac{1}{2n(n-1)}\dfrac{(\bar r)^n}{(\bar a)^{n-1}}\\ 0\\ 0\end{matrix}\right\rangle\right]\cos n\theta$$

(5.6)

当 $r>a$ 时：

$$w=p_r(1+\nu)\frac{\bar aR}{Et}\left[\mathrm{ker}_n\,\bar r\cdot\mathrm{ber}'_n\,\bar a-\mathrm{kei}_n\,\bar r\cdot\mathrm{bei}'_n\,\bar a-\frac{1}{2}\frac{(\bar a)^{n-1}}{(\bar r)^n}\right]\cos n\theta \quad (5.7)$$

$$\varphi=p_r(1+\nu)\,l^2\bar a\left\{\left[-\mathrm{kei}_n\,\bar r\cdot\mathrm{ber}'_n\,\bar a-\mathrm{ker}_n\,\bar r\cdot\mathrm{bei}'_n\bar a\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{1+\nu}\left\langle\begin{matrix}\dfrac{1}{2n(n+1)}\dfrac{(\bar a)^{n+1}}{(\bar r)^n}\\ \dfrac{1}{2}\left(\bar r\ln\bar r+\dfrac{1}{2}\dfrac{\bar a^2}{\bar r}\right)\\ -\bar a\ln\bar r\end{matrix}\right\rangle\right]\cos n\theta-\left\langle\begin{matrix}0\\ \dfrac{1}{2(1+\nu)}\bar r\theta\sin\theta\\ 0\end{matrix}\right\rangle\right\} \quad (5.8)$$

③环向线载荷 $p_\theta\cos n\theta$：

当 $r<a$ 时：

$$w=p_\theta(1+\nu)\frac{R}{Et}\left[n\,\mathrm{ker}_n\bar a\cdot\mathrm{ber}_n\,\bar r-n\,\mathrm{kei}_n\,\bar a\cdot\mathrm{bei}_n\,\bar r-\frac{1}{2}\frac{(\bar r)^n}{(\bar a)^n}\right]\sin\theta \quad (5.9)$$

$$\varphi=p_\theta(1+\nu)l^2\left[-n\,\mathrm{kei}_n\,\bar a\cdot\mathrm{ber}_n\,\bar r-n\,\mathrm{ker}_n\,\bar a\cdot\mathrm{bei}_n\,\bar r\right.$$

$$+\begin{Bmatrix} -\frac{1}{2(1+\nu)}\frac{(\bar r)^n}{n(n-1)(\bar a)^{n-2}} \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}\Bigg]\sin n\theta \tag{5.10}$$

当 $r>a$ 时：

$$w=p_\theta(1+\nu)\frac{R}{Et}\left[n\ \mathrm{ker}_n\ \bar r\cdot \mathrm{ber}_n\ \bar a-n\ \mathrm{kei}_n\ \bar r\cdot \mathrm{bei}_n\ \bar a-\frac{1}{2}\frac{(\bar a)^n}{(\bar r)^n}\right]\sin n\theta \tag{5.11}$$

$$\varphi=p_\theta(1+\nu)\,l^2\Bigg\{\Bigg[-n\ \mathrm{kei}_n\ \bar r\cdot \mathrm{ber}_n\ \bar a-n\ \mathrm{ker}_n\ \bar r\cdot \mathrm{bei}_n\ \bar a$$

$$+\frac{1}{2(1+\nu)}\begin{Bmatrix} -\frac{(\bar a)^{n+2}}{n(n+1)(\bar r)^n} \\ \bar a\bar r\ \ln\bar r-\frac{1}{2}\frac{\bar a^3}{\bar r} \\ 0 \end{Bmatrix}\Bigg]\sin n\theta+\begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{\bar a}{2(1+\nu)}\bar r\theta\cos\theta \\ -\frac{\bar a^2}{2(1+\nu)}\theta \end{Bmatrix}\Bigg\} \tag{5.12}$$

④切面内环形线力矩 $m_z\cos n\theta$：

$$\left.\begin{aligned} &w=0\\ &\varphi=-m_z a\begin{Bmatrix} \frac{1}{2n}\left(\frac{\bar r}{\bar a}\right)^n\sin n\theta \\ 0 \end{Bmatrix}\end{aligned}\right\}\quad 当\ r<a\ 时, \tag{5.13}$$

$$\left.\begin{aligned} &w=0\\ &\varphi=m_z a\begin{Bmatrix} \frac{1}{2n}\left(\frac{\bar a}{\bar r}\right)^n\sin n\theta \\ \theta \end{Bmatrix}\end{aligned}\right\}\quad 当\ r>a\ 时. \tag{5.14}$$

⑤经线法面内线力矩 $m_r\cos n\theta$：

当 $r\leqslant a$ 时：

$$w=-m_r\frac{R\bar a\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Et^2}(\mathrm{ber}_n\ \bar r\cdot \mathrm{kei}_n'\ \bar a+\mathrm{bei}_n\ \bar r\cdot \mathrm{ker}_n'\ \bar a)\cos n\theta \tag{5.15}$$

$$\varphi=-m_rR\bar a\left(\mathrm{ber}_n\ \bar r\cdot \mathrm{ker}_n'\ \bar a-\mathrm{bei}_n\ \bar r\cdot \mathrm{kei}_n'\ \bar a+\frac{(\bar r)^n}{2(\bar a)^{n+1}}\right)\cos n\theta \tag{5.16}$$

当 $r\geqslant a$ 时：

$$w=-m_r\frac{R\bar a\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Et^2}(\mathrm{ber}_n'\ \bar a\cdot \mathrm{kei}_n\ \bar r+\mathrm{bei}_n'\ \bar a\cdot \mathrm{ker}_n\ \bar r)\cos n\theta \tag{5.17}$$

$$\varphi=-m_rR\bar a\left(\mathrm{ber}_n'\ \bar a\cdot \mathrm{ker}_n\ \bar r-\mathrm{bei}_n'\ \bar a\cdot \mathrm{kei}_n\ \bar r-\begin{Bmatrix} \frac{(\bar a)^{n-1}}{2(\bar r)^n} \\ 0 \end{Bmatrix}\right)\cos n\theta \tag{5.18}$$

上述公式当 $\nu=0$ 时与[10]中的结果是一样的.

⑥纬线法面内线力矩 $m_\theta\cos n\theta$：

当 $r\leqslant a$ 时：

$$w=m_\theta\frac{R\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Et^2}(-n\ \mathrm{kei}_n\ \bar a\cdot \mathrm{ber}_n\ \bar r-n\ \mathrm{ker}_n\ \bar a\cdot \mathrm{bei}_n\ \bar r)\sin n\theta \tag{5.19}$$

$$\varphi=m_\theta R\left(-n\,\mathrm{ker}_n\,\bar a\cdot\mathrm{ber}_n\bar r+n\,\mathrm{kei}_n\,\bar a\cdot\mathrm{bei}_n\,\bar r+\frac{(\bar r)^n}{2(\bar a)^n}\right)\sin n\theta \tag{5.20}$$

当 $r\geqslant a$ 时：

$$w=m_\theta\frac{R\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Et^2}\left(-n\,\mathrm{bei}_n\,\bar a\cdot\mathrm{ker}_n\,\bar r-n\,\mathrm{ber}_n\,\bar a\cdot\mathrm{kei}_n\,\bar r\right)\sin n\theta \tag{5.21}$$

$$\varphi=m_\theta R\left(-n\,\mathrm{ber}_n\,\bar a\cdot\mathrm{ker}_n\,\bar r+n\,\mathrm{bei}_n\,\bar a\cdot\mathrm{kei}_n\,\bar r+\frac{(\bar a)^n}{2(\bar r)^n}\right)\sin n\theta \tag{5.22}$$

## 六、例　　题

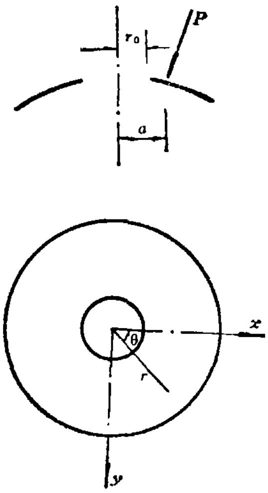

图　5

壳顶有圆孔的球壳，距孔中心距离为$a$处作用法向集中力 $P$，求孔洞附近的内力（图 5）.

求孔洞附近的内力，可忽略下边界的影响，即认为下边界为无限远.

孔边条件为当 $r=r_0$ 时

$$M_r=0 \tag{6.1}$$

$$V_r=0 \tag{6.2}$$

$$N_r=0 \tag{6.3}$$

$$N_{r\theta}=0 \tag{6.4}$$

将第二节及第四节求得的齐次解及特解代入上述条件得：

$$\begin{aligned}M_r=-\frac{1}{R}\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{&D_n^{\cdot}\Big[\mathrm{ker}_n\,\bar r_0-(1-\nu)\Big(\frac{\mathrm{kei}_n\bar r_0}{\bar r_0}-\frac{n^2}{\bar r_0^{\,2}}\mathrm{kei}_n\,\bar r_0\Big)\Big]\\&+D_n'\Big[\mathrm{kei}_n\bar r_0+(1-\nu)\Big(\frac{\mathrm{ker}_n'\bar r_0}{\bar r_0}-\frac{n^2}{\bar r_0^2}\mathrm{ker}_n\bar r_0\Big)\Big]\\&+B_n^{\cdot}n(n+1)(1-\nu)(\bar r_0)^{-n-2}-\frac{PR\varepsilon_n}{2\pi}\Big[\mathrm{kei}_n\,\bar a\Big(-\mathrm{bei}_n\bar r_0\\&-(1-\nu)\Big(\frac{\mathrm{ber}_n'\bar r_0}{\bar r_0}-\frac{n^2}{\bar r_0^2}\mathrm{ber}_n\bar r_0\Big)\Big)+\mathrm{ker}_n\,\bar a\Big(\mathrm{ber}_n\bar r_0-(1-\nu)\\&\cdot\Big(\frac{\mathrm{bei}_n'\bar r_0}{\bar r_0}-\frac{n^2}{\bar r_0^2}\mathrm{bei}_n\bar r_0\Big)\Big)\Big]\Big\}\cos n\theta=0\end{aligned} \tag{6.5}$$

$$\begin{aligned}V_r=-\frac{1}{Rl}\sum_{n=0}^{\infty}\Big\{&D_n^{\cdot}\Big[-\mathrm{ker}_n'\bar r_0+\frac{(1-\nu)n^2}{\bar r_0^2}\Big(\mathrm{kei}_n'\bar r_0-\frac{\mathrm{kei}_n\bar r_0}{\bar r_0}\Big)\Big]\\&+D_n'\Big[-\mathrm{kei}_n'\bar r_0+\frac{(1-\nu)n^2}{\bar r_0^2}\Big(-\mathrm{ker}_n'\bar r_0+\frac{\mathrm{ker}_n\bar r_0}{\bar r_0}\Big)\Big]\end{aligned}$$

$$-B_n^{\cdot}n^2(n+1)(1-\nu)(\bar r_0)^{-n-3}-\frac{PR\varepsilon_n}{2\pi}\Big[\mathrm{kei}_n\,\bar a\Big(-\mathrm{bei}'_n\bar r_0$$

$$-\frac{(1-\nu)n^2}{\bar r_0^2}\Big(\mathrm{ber}'_n\bar r_0-\frac{\mathrm{ber}_n\bar r_0}{\bar r_0}\Big)\Big)+\mathrm{ker}_n\,\bar a\Big(\mathrm{ber}'_n\bar r_0$$

$$-\frac{(1-\nu)n^2}{\bar r_0^2}\Big(\mathrm{bei}'_n r_0-\frac{\mathrm{bei}_n\bar r_0}{\bar r_0}\Big)\Big)\Big]\Big\}\cos n\theta=0 \qquad (6.6)$$

$$N_r=\frac{1}{l^2}\sum_{n=0}^{\infty}\left\{D'_n\Big(\frac{\mathrm{kei}'_n\bar r_0}{\bar r_0}-\frac{n^2}{\bar r_0^2}\mathrm{kei}_n\bar r_0\Big)+D_n^{\cdot}\Big(\frac{\mathrm{ker}'_n\bar r_0}{\bar r_0}-\frac{n^2}{\bar r_0^2}\mathrm{ker}_n\bar r_0\Big)\right.$$

$$+\left\langle\begin{matrix}-B'_n n(n+1)(\bar r_0)^{-n-2}\\ -B'_1 2(\bar r_0)^{-3}+\dfrac{B_1^{\cdot}}{1+\nu}(\bar r_0)^{-1}\\ B'_0(\bar r_0)^{-1}\end{matrix}\right\rangle-\frac{PR\varepsilon_n}{2\pi}\Big[\mathrm{ker}_n\bar a\Big(\frac{\mathrm{ber}'_n\bar r_0}{\bar r_0}$$

$$-\frac{n^2}{\bar r_0^2}\mathrm{ber}_n\,\bar r_0\Big)-\mathrm{kei}_n\bar a\Big(-\frac{\mathrm{bei}'_n\bar r_0}{\bar r_0}-\frac{n^2}{\bar r_0^2}\mathrm{bei}_n\bar r_0\Big)$$

$$+\left\langle\begin{matrix}\dfrac{n-1}{2}\quad\dfrac{(\bar r)^{n-2}}{(\bar a)^n}\\ 0\\ 0\end{matrix}\right\rangle\Big]\Big\}\cos n\theta=0 \qquad (6.7)$$

$$N_{r\theta}=\frac{1}{l^2}\sum_{n=1}^{\infty}\Big\{nD'_n\Big(\frac{\mathrm{kei}'_n\bar r_0}{\bar r_0}-\frac{1}{\bar r_0^2}\mathrm{kei}_n\bar r_0\Big)+nD_n^{\cdot}\Big(\frac{\mathrm{ker}'_n\bar r_0}{\bar r_0}$$

$$-\frac{1}{\bar r_0^2}\mathrm{ker}_n\bar r_0\Big)-B'_n n(n+1)(\bar r_0)^{-n-2}-\frac{PR\varepsilon_n}{2\pi}\Big[n\,\mathrm{ker}_n\,\bar a\Big(\frac{\mathrm{ber}'_n\bar r_0}{\bar r_0}$$

$$-\frac{\mathrm{ber}_n\bar r_0}{\bar r_0^2}\Big)-n\,\mathrm{kei}_n\bar a\Big(\frac{\mathrm{bei}'_n\bar r_0}{\bar r_0}-\frac{\mathrm{bei}_n\bar r_0}{\bar r_0^2}\Big)-\frac{n-1}{2}\frac{(\bar r_0)^{n-2}}{(\bar a)^n}\Big]\Big\}\sin n\theta$$

$$+\frac{B_1^{\cdot}}{l^2\bar r_0^2}=0 \qquad (6.8)$$

式(6.5)—(6.8)等于零，要求 $\begin{matrix}\cos n\theta\\ \sin n\theta\end{matrix}$ 的每一项为零，由此得到 $4n$ 个代数方程式，可由之求得常数 $B_n^{\cdot}$、$B'_n$、$D_n^{\cdot}$ 及 $D'_n$，有了上述常数将齐次解与特解叠加即可求得孔洞附近的内力.

下面给出 $\theta=0$ 截面的 $N_\theta$、$N_r$、$M_r$ 及 $w$. 计算时取 $\bar r_0=1$，$\bar a=3$，$\nu=0.3$. 结果曲线如图 6 所示，其中实线为本问题的结果，虚线为无孔的无限壳的结果，孔洞附近引起内力局部变化，计算结果见表1—表 4，级数的收敛很好，表中第一行为特解，下面依次为$n=0$—6 时的解，最后一行为最后结果.

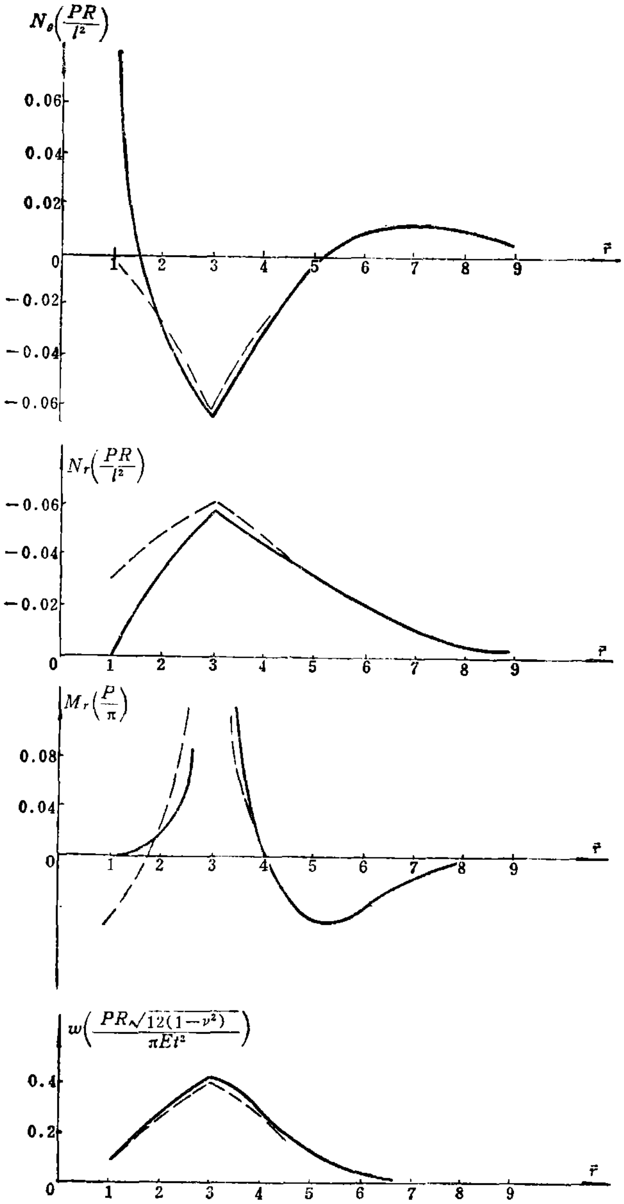


图 6

表1　$N_\theta=(\quad)\cdot\frac{PR}{l^2}$

| $\bar{r}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_{\theta P}$ | −0.0009 | −0.0302 | −0.0626 | −0.0302 | −0.0009 | 0.0107 | 0.0116 | 0.0088 | 0.0057 |
| $\tilde{N}_{\theta 0}$ | −0.0053 | −0.0018 | −0.0007 | −0.0002 | | | | | |
| $\tilde{N}_{\theta 1}$ | −0.0042 | −0.0008 | −0.0008 | −0.0001 | | | | | |
| $\tilde{N}_{\theta 2}$ | 0.0565 | −0.0022 | −0.0013 | −0.0014 | −0.0009 | −0.0004 | −0.0001 | | |
| $\tilde{N}_{\theta 3}$ | 0.0184 | −0.0001 | −0.0002 | −0.0002 | −0.0001 | | | | |
| $\tilde{N}_{\theta 4}$ | 0.0051 | −0.0001 | −0.0001 | | | | | | |
| $\tilde{N}_{\theta 5}$ | 0.0014 | | | | | | | | |
| $N_\theta$ | 0.0710 | −0.0308 | −0.0656 | −0.0321 | −0.0019 | 0.0103 | 0.0115 | 0.0088 | 0.0057 |

表 2　$N_r=(\qquad)\cdot\dfrac{PR}{l^2}$

| $\bar{r}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $N_{r,P}$ | −0.0313 | −0.0484 | −0.0625 | −0.0484 | −0.0313 | −0.0188 | −0.0112 | −0.0069 | −0.0046 |
| $\tilde{N}_{r,0}$ | 0.0047 | 0.0008 | 0.0001 | | | | | | |
| $\tilde{N}_{r,1}$ | 0.0037 | 0.0003 | 0.0006 | | | | | | |
| $\tilde{N}_{r,2}$ | 0.0145 | 0.0102 | 0.0031 | 0.0009 | 0.0002 | | | | |
| $\tilde{N}_{r,3}$ | 0.0057 | 0.0025 | 0.0006 | 0.0001 | | | | | |
| $\tilde{N}_{r,4}$ | 0.0014 | 0.0004 | | | | | | | |
| $\tilde{N}_{r,5}$ | 0.0004 | 0.0001 | | | | | | | |
| $N_r$ | −0.0009 | −0.0341 | −0.0581 | −0.0474 | −0.0311 | −0.0188 | −0.0112 | −0.0069 | −0.0046 |

表 3　$M_r=(\qquad)\cdot\dfrac{P}{\pi}$

| $\bar{r}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $M_{r,P}$ | −0.0594 | 0.0199 | ∞ | 0.0199 | −0.0594 | −0.0443 | −0.0202 | −0.0018 | |
| $\tilde{M}_{r,0}$ | 0.0160 | 0.0022 | −0.0004 | −0.0007 | −0.0004 | −0.0001 | | | |
| $\tilde{M}_{r,1}$ | 0.0038 | 0.0004 | −0.0002 | −0.0002 | −0.0001 | | | | |
| $\tilde{M}_{r,2}$ | 0.0183 | −0.0156 | −0.0077 | −0.0022 | 0.0004 | 0.0011 | 0.0008 | | |
| $\tilde{M}_{r,3}$ | 0.0121 | 0.0020 | 0.0007 | 0.0002 | | −0.0001 | 0.0001 | | |
| $\tilde{M}_{r,4}$ | 0.0051 | 0.0002 | | | | | | | |
| $\tilde{M}_{r,5}$ | 0.0025 | | | | | | | | |
| $M_r$ | −0.0016 | 0.0091 | ∞ | 0.0170 | −0.0595 | −0.0434 | −0.0193 | −0.0018 | |

表 4　$w=(\qquad)\cdot\dfrac{PR\sqrt{12(1-\nu^2)}}{Et^2}$

| $\bar{r}$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $w_P$ | 0.1012 | 0.2480 | 0.3927 | 0.2480 | 0.1012 | 0.0256 | −0.0011 | −0.0056 | −0.0036 |
| $\tilde{w}_0$ | 0.0020 | 0.0032 | 0.0017 | 0.0006 | 0.0001 | −0.0002 | −0.0001 | | |
| $\tilde{w}_1$ | 0.0016 | 0.0013 | 0.0006 | 0.0002 | | | | | |
| $\tilde{w}_2$ | 0.0090 | 0.0190 | 0.0199 | 0.0150 | 0.0113 | 0.0075 | 0.0051 | 0.0036 | 0.0029 |
| $\tilde{w}_3$ | 0.0020 | 0.0022 | 0.0019 | 0.0013 | 0.0008 | 0.0005 | 0.0003 | | |
| $\tilde{w}_4$ | 0.0004 | 0.0002 | 0.0001 | 0.0001 | | | | | |
| $\tilde{w}_5$ | 0 0001 | | | | | | | | |
| $w$ | 0.1163 | 0.2739 | 0.4169 | 0.2652 | 0.1134 | 0.0334 | 0.0042 | −0.0020 | −0.0007 |

## 附　　录

第四节公式的推导，以经线切向集中力②为例摘录如下．

将(3.5)及(3.6)的 $w$ 及 $\varphi$ 按下关系合成复应力函数

$$\psi=\frac{Et^2}{\sqrt{12(1-\nu^2)}}w+i\varphi \tag{1}$$

得：

$$\psi=\frac{P_x(1+\nu)l}{2\pi}\left\{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)i\frac{\pi}{2}H_1^{(1)}\left(\bar{r}i^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{\bar{r}}+\frac{i}{1+\nu}\bar{r}\ln\bar{r}\right]\cos\theta-\frac{i}{1+\nu}\bar{r}\,\theta\sin\theta\right\}$$

（2）

这里利用了 Hankel 函数与 Thomson 函数的下述关系：

$$(-1)^n\frac{\pi}{2}iH_n^{(1)}\left(\bar{r}i^{\frac{1}{2}}\right)=\mathrm{ker}_n\bar{r}-i\,\mathrm{kei}_n\bar{r} \tag{3}$$

用(4.1)及(4.2)中的$\bar{\rho}$及$\delta$代替(2)中的$\bar{r}$及$\theta$，得到：

$$\psi=\frac{P_x(1+\nu)l}{2\pi}\left\{\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)i\frac{\pi}{2}H_1^{(1)}\left(\bar{\rho}i^{\frac{1}{2}}\right)-\frac{1}{\bar{\rho}}+\frac{i}{1+\nu}\bar{\rho}\ln\bar{\rho}\right]\cos\delta\right.$$

$$\left.-\frac{i}{1+\nu}\bar{\rho}\delta\sin\delta\right\} \tag{4}$$

将(4)展成三角级数．展开式如下：

当 $r<a$ 时：

$$H_1^{(1)}\left(\bar{\rho}i^{\frac{1}{2}}\right)\cos\delta=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_nH_n^{(1)'}\left(\bar{a}i^{\frac{1}{2}}\right)J_n\left(\bar{r}i^{\frac{1}{2}}\right)\cos n\theta \tag{5}$$

$$\frac{1}{\bar{\rho}}\cos\delta=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\bar{a}}\left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}}\right)^n\cos n\theta \tag{6}$$

$$\bar{\rho}\ln\bar{\rho}\cos\delta=\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle\begin{array}{l}-\frac{\bar{r}}{2}\left[\frac{\left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}}\right)^{n+1}}{n+1}+\frac{\left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}}\right)^{n-1}}{n-1}\right]+\frac{\bar{a}}{n}\left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}}\right)^n\\ r\ln\bar{a}-\frac{\bar{r}}{4}\left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}}\right)^2+\bar{a}\frac{r}{\bar{a}}\\ -\frac{\bar{r}}{2}\left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}}\right)-\bar{a}\ln\bar{a}\end{array}\right\rangle\cos n\theta \tag{7}$$

$$\bar{\rho}\delta\sin\delta=\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle\begin{array}{l}-\frac{\bar{r}}{2}\left[\frac{\left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}}\right)^{n+1}}{n+1}-\frac{\left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}}\right)^{n-1}}{n-1}\right]\\ -\frac{\bar{r}}{4}\left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}}\right)^2\\ -\frac{\bar{r}}{2}\left(\frac{\bar{r}}{\bar{a}}\right)\end{array}\right\rangle\cos n\theta \tag{8}$$

当 $r>a$ 时：

$$H_1^{(1)}\left(\bar{\rho}i^{\frac{1}{2}}\right)\cos\delta=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon_nH_n^{(1)}\left(\bar{r}i^{\frac{1}{2}}\right)J_n'\left(\bar{a}i^{\frac{1}{2}}\right)\cos n\theta \tag{9}$$

$$\frac{1}{\bar{\rho}}\cos\delta=\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle\begin{array}{c}\frac{1}{\bar{r}}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^{n-1}\\ 0\end{array}\right\rangle\cos n\theta \tag{10}$$

$$\bar{\rho}\ln\bar{\rho}\cos\delta=\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle\begin{array}{l} -\frac{\bar{r}}{2}\left[\frac{\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^{n+1}}{n+1}+\frac{\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^{n-1}}{n-1}\right]+\frac{\bar{a}}{n}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^{n} \\ \bar{r}\ln\bar{r}-\frac{\bar{r}}{4}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^{2}+\bar{a}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right) \\ -\frac{\bar{r}}{2}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)-\bar{a}\ln\bar{r} \end{array}\right\rangle\cos n\theta \tag{11}$$

这时 $\bar{\rho}\delta\sin\delta$ 为多值函数，可减去另一多值函数 $\bar{\rho}\theta\sin\delta$ 变为单值函数展开.

$$\bar{\rho}\sin\delta(\delta-\theta)=\sum_{n=0}^{\infty}\left\langle\begin{array}{l} \frac{\bar{r}}{2}\left[\frac{\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^{n+1}}{n+1}-\frac{\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^{n-1}}{n-1}\right] \\ \frac{\bar{r}}{4}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right)^{2} \\ \frac{\bar{r}}{2}\left(\frac{\bar{a}}{\bar{r}}\right) \end{array}\right\rangle\cos n\theta \tag{12}$$

将(5)—(8)和(9)—(12)代入(4)中，按(1)分开实虚部后就得到(4.7)、(4.8)和(4.9)、(4.10)·分开时除(3)外，还利用了下述关系：

$$(-1)^{n}J_{n}(\bar{r}i^{\frac{1}{2}})=\mathrm{ber}_{n}\,\bar{r}-i\,\mathrm{bei}_{n}\,\bar{r} \tag{13}$$

## 参 考 文 献


1. Reissner, E., Stresses and small displacements of shallow spherioal shells. *Journ. of Math. and phys.*, 25, (1946).
2. Flügge, W., *Stresses in Shells*, Springer-Verlag, (1960).
3. Koiter W. T., A spherical shell under point loads at its poles, *Advances in Applied Mech.*, (1963).
4. Lukasiewicz, S., Concentrated loads on shallow spheric shells, *Quart. J. Mech. Appl. Math.* 20, 3, (1967). 293—305.
5. Seide, P., *Small elastic deformations of thin shells*, (1975).
6. Lukasiewicz, S., *Local Loads in Plates and Shells*, Sijthoff and Noordhoff, (1979).
7. Коренев, Б. Г., *Некоторые Задачи Теории Упругости и Теплопроводности Решаемые в Бесселевых Функчиях*, Физматиз (1960).
8. Гнатыкив. В. Н.. Неосесимметричная деформация пологой сферической оболочки. Тр. Конфаренции по пластин и оболочек, (1960), Казань, (1961), 113—116.
9. Wilkinson, J. P. and Kalnins, A., Deformation of open spherical shells under arbitrarily located concentrated loads, *J. Appl. Mech.*, 33, 2, June, (1966), 305—312.
10. 龙驭球. 圆底扁球壳的初参数解法，清华大学学报 11 卷 2 期，(1964).
11. Reissner, E., On the determination of stresses and displacements for unsymmetrical deformations of shallow spherical shells. *Journ. of Math. and Phys.*, 38, (1959).
12. Watson G. N., *Theory of Bessel Functions*.
13. Градштейн. И. С. и Рыжик. И. М., *Таблицы интегралов сумм*, рядов и произведений, Физматиз., (1962).
14. Власов, В. З., *Общая Теория Оболочек*, (1949).

# Analysis of Shallow Spherical Shell with Circular Base under Eccentrically Applied Concentrated Loads

Pao Shih-hua　　Long Yu-qiu

*(Tsing-Hua University, Beijing)*

**Abstract**

In this paper, problems of a shallow spherical shell with circular base under eccentrically applied concentrated loads are discussed. The solutions for six cases of eccentrical concentrated loads are given. They are:

①Normal concentrated load,

②Meridional tangential concentrated load,

③Circumferential tangential concentrated load,

④Concentrated moment in the tangential plane,

⑤Concentrated moment in the meridional normal plane,

⑥Concentrated moment in the circumferential normal plane.

From the solutions of concentrated loads, the solutions of distributed line loads in the form of $\cos(n\theta)$ along the circle are obtained.