

文章编号: 1000-0887(2004) 12-1313-06

利用部分线性化方法控制 L_u 系统*

于永光¹, 张锁春²

(1. 北京交通大学 数学系, 北京 100044;

2. 中国科学院 数学与系统科学研究院 应用数学研究所, 北京 100080)

(李家春推荐)

摘要: 提出利用部分线性化的方法来控制混沌 L_u 系统, 通过部分消除系统各状态间的耦合项的办法, 进而实现了被控制系统的稳定化, 该方法简单且易于实现, 同时也证明了对于此不确定系统的鲁棒性, 最后还对所取得的结果给出了数值模拟, 进一步说明了该方法的可行性与有效性

关键词: L_u 系统; 混沌控制; 部分线性化方法

中图分类号: O545 文献标识码: A

引 言

自从 1963 年 Lorenz 在一个自治的三维系统中发现第一个混沌吸引子以来^[1], 在最近几十年混沌已经得到广泛的研究, 在现实的物质世界里我们可以发现很多混沌动力系统, 然而由于混沌的敏感特性使得在实际中许多结果仍然无法预测, 控制混沌系统在工程界已经引起了极大的关注^[2~4].

对于混沌控制研究, 已经出现了很多的方法和技巧, 如 OGY 方法^[5], 线形状态空间反馈法^[6], backstepping 方法^[7]和许多其他的方法^[8~9].

本文提出的是利用部分线性化的方法来控制 L_u 系统, 这个系统是吕金虎^[10]等人在最近新发现的, 它也是一个混沌吸引子, 它是 Lorenz_系统^[1]和 Chen_系统^[8]之间的一个纽带.

我们可以注意到下面的事实, 根据 Vaněček 和 Čelikovsky^[12]划分的临界条件 $a_{12}a_{21}$: Lorenz_系统与 Chen_系统被分成两个对偶的动力系统, 二者均可以分为两部分: 线性部分与非线性部分. 设线性部分的系数矩阵由 $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$ 来表示, 则 Lorenz_系统满足 $a_{12}a_{21} > 0$, Chen_系统满足 $a_{12}a_{21} < 0$, 而 L_u 系统满足 $a_{12}a_{21} = 0$. 因而 L_u 系统在上述二系统之间架起了桥梁, 实现了从一个系统到另一个系统的过渡.

对比前面所提到的各种方法, 部分线性化方法不需要对非线性系统进行完全的线性化, 进而实现对系统的稳定化. 部分线性化方法是基于这样一个理论事实: 一个闭系统的稳定性并不要求此闭系统为线性系统. 利用此方法我们部分消去系统的非线性项, 进而使一个复杂的

* 收稿日期: 2002_10_25; 修订日期: 2004_06_29

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10171099)

作者简介: 于永光(1976—), 男, 内蒙古敖汉人, 博士(联系人. Tel: + 86_10_62651362; Fax: + 86_10_62541689; E_mail: zsc@mail.amss.ac.cn).

控制问题简化为一系列次复杂控制问题。然后我们证明了这个控制系统的稳定性,而且在现实中此控制很容易通过物理电路模拟得到实现。同时,利用 Liapunov 第二方法证明了在一个反馈系统中对于噪音和一些不确定行为的鲁棒性。在本文最后我们就我们所取得的结论给出了计算机的模拟,证明了我们结论的正确性和方法的有效性。

1 L_系统

最近,吕金虎等人^[10]发现了一个新的混沌吸引子。这个系统把经典的 Lorenz 系统^[11]和 Chen_系统^[8]联系起来,成了衔接二者的纽带,下面我们称其为 L_系统。L_系统可以利用下面的常微分方程描述:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = -xz + cy, \\ \dot{z} = xy - bz. \end{cases}$$

当参数 $a = 36, b = 3, c = 20$ 时上面的系统是一个混沌吸引子,见图 1。

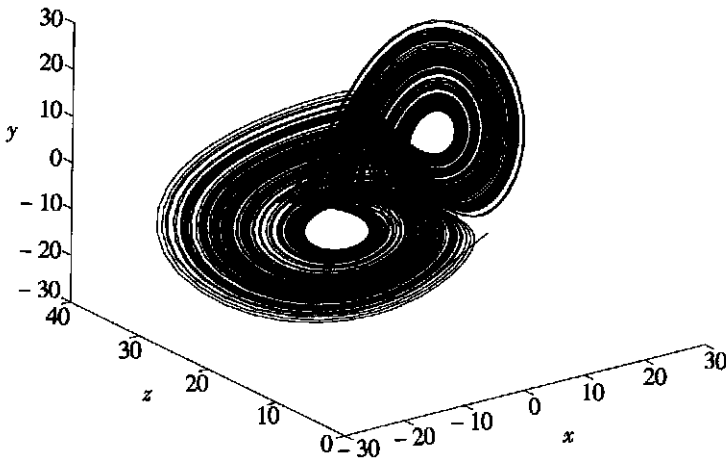


图 1 L 混沌吸引子

对于控制混沌系统方法的研究,我们最感兴趣的是此方法能否使得混沌 L_系统达到全局稳定。我们在 L_系统的第 2 个状态方程的右边增加一个控制项,则此系统变为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x} = a(y - x), \\ \dot{y} = -xz + cy + u, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases} \quad (1)$$

我们以后称之为被控系统。

以下,为了区分原系统与被控制系统,我们称原 L_系统为期望系统,把它重写为如下形式:

$$\begin{cases} \dot{x}' = a(y' - x'), \\ \dot{y}' = -x'z' + cy', \\ \dot{z}' = x'y' - bz'. \end{cases} \quad (2)$$

2 利用部分线性化方法控制 L_系统

在上一部分提到的许多方法^[5-9]都不能使 L_系统达到全局稳定。事实上,由于闭系统的

稳定性并不要求闭系统的线性性,因而我将利用部分线性化的方法控制 L_系统。我们没有必要对此混沌系统进行完全线性化,只需通过部分线性化的方法消去部分非线性项,使系统由一个复杂的控制问题逐步简化为一系列的次复杂问题。下面我们定义跟踪误差向量 e (见式(3))。

$$e = (e_1, e_2, e_3)^T = (x - x', y - y', z - z')^T. \quad (3)$$

因而通过计算,我们可以得到误差动力系统(4):

$$\begin{cases} \dot{e}_1 = a(e_2 - e_1), \\ \dot{e}_2 = ce_2 - xz + x'z' + u, \\ \dot{e}_3 = -be_3 + xy - x'y'. \end{cases} \quad (4)$$

根据式(4)的第2个状态方程,我们可以定义一个非线性控制项 u :

$$u = xz - x'z' - (1 + c)e_2. \quad (5)$$

经过整理,得到式(4)的第2个状态方程已经被线性化,消去了同状态1和3的耦合项。

下面我们将证明通过这样的一个控制项可以使 L_系统全局稳定。根据式(5),应用状态反馈线性化,误差动力系统的第2个方程可以简化为:

$$\dot{e}_2 = -e_2. \quad (6)$$

则式(6)的解析解为:

$$e_2 = C_2 e^{-t}, \quad (7)$$

其中 $C_2 = e_2(t=0)$ 。因而关于控制系统状态 y 的跟踪误差是以指数速度收敛到0,当 $t \rightarrow +\infty$

同理,根据式(7),可以解式(4)的第一个状态方程,我们有

$$e_1(t) = \left[C_1 - \frac{a}{a-1} C_2 \right] e^{-at} + C_2 \frac{a}{a-1} e^{-t}, \quad (8)$$

其中 $C_1 = e_1(t=0)$ 。显然跟踪误差 e_1 也以指数速度收敛到0,当 $t \rightarrow +\infty$

为了证明在部分线性化方程(5)控制下的 L_系统是全局渐近稳定的,下面我们必须证明跟踪误差 e_3 也必须收敛到0,当 $t \rightarrow +\infty$

当期望轨线(式(1))是一个稳定状态时,也就是 $(x', y', z')^T$ 是一个常向量时,误差动力系统的第3个状态方程的解析解是确定的。利用“变参数”法^[11],我们可以把跟踪误差 e_3 分为两部分:齐次项部分 e_{3h} 和非齐次项部分 e_{3n} 。通过计算我们可以得到系统的解:

$$e_3(t) = e_{3h} + e_{3n} = K_1 e^{-(a+1)t} + K_2 e^{-at} + K_3 e^{-bt} + K_4 e^{-2t} + K_5 e^{-t}, \quad (9)$$

其中

$$K_1 = C_2 \frac{(a-1)C_1 - aC_2}{(b-a-1)(a-1)}, \quad K_2 = y' \frac{(a-1)C_1 - aC_2}{(b-a)(a-1)},$$

$$K_4 = C_2^2 \frac{a}{(b-2)(a-1)}, \quad K_5 = C_2 \frac{(a-1)x' + ay'}{(b-1)(a-1)},$$

$$K_3 = C_3 - k_1 - k_2 - k_4 - k_5$$

和 $C_3 = e_3(t=0)$ 。

如果期望轨线不是常量,也就是 $(x', y', z')^T = (x'(t), y'(t), z'(t))^T$, 则跟踪误差 e_3 可以利用上面的方法来确定它的一个上界和下界函数 $m(t)$ 、 $M(t)$:

$$m(t) \leq e_3(t) \leq M(t), \quad (10)$$

其中

$$M(t) = L_1 e^{-(a+1)t} + L_2 e^{-at} + L_3 e^{-bt} + L_4 e^{-2t} + L_5 e^{-t}, \tag{11}$$

$$m(t) = -M(t), \tag{12}$$

有 $L_1 = |K_1|$, $L_2 = \max_{y'(t)} \{|K_2|\}$, $L_3 = C_3$, $L_4 = |K_4|$, $L_5 = \max_{x'(t), y'(t)} \{|K_5|\}$ 。由于 L 系统是一个混沌吸引子, 显然有 $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 是有界的, 这是混沌吸引子的一个基本特性, 因而系数 L_2 和 L_5 将会取得有限值。则 e_3 被两个以指数速度趋于 0 的函数所界定, 这样我们就证明了跟踪误差 e_3 也以指数速度趋于 0, 当 $t \rightarrow +\infty$

综上所述, 我们证明了被部分线性化式(5)控制的 L 系统是全局渐近稳定的。

3 被控制系统的鲁棒性

在这一部分我们将证明即使对于动力系统的一些条件不完全掌握, 而在上面所说的非线性控制项(5)控制下的 L 系统仍然是稳定的。

定义 $f(x, y, z) = -xz + cy$, 则式(1)的第 2 个状态方程可以写为:

$$\dot{y} = f(x, y, z) + u \tag{13}$$

我们假定非线性函数 $f(x, y, z)$ 并不能够准确知道, 设它的估计值为函数 $\hat{f}(x, y, z)$ 。令

$$|f(x, y, z) - \hat{f}(x, y, z)| \leq F(x, y, z), \tag{14}$$

其中 $F(x, y, z)$ 是一个已知的有界函数。为了说明被控制系统的不确定性, 我们对于非线性控制项 u 增加一个不连续的函数 $u' = -G(x, y, z) \text{sgn}(e_2)$, 则

$$u = \dot{y} - f(x, y, z) + u' \tag{15}$$

下面我们将利用 Liapunov 第二方法^[12] 来证明在一个反馈闭系统中对于系统的不确定性或噪音的鲁棒性。

定义 Liapunov 函数 $V(t)$:

$$V(t) = \frac{1}{2}(e_2)^2 \tag{16}$$

沿着式(4)的解对 $V(t)$ 求导数, 我们有

$$\dot{V}(t) = e_2 \dot{e}_2 = e_2(f(x, y, z) - \hat{f}(x, y, z) - G(x, y, z) \text{sgn}(e_2)) \tag{17}$$

相应的, 对于控制获得函数 $G(x, y, z)$, 我们可以通过如下条件定义:

$$G(x, y, z) > F(x, y, z) + \delta, \tag{18}$$

其中 $\delta > 0$, 因而 $\dot{V}(t) < -\delta |e_2| < 0$, 即, $\dot{V}(t)$ 是负定的。

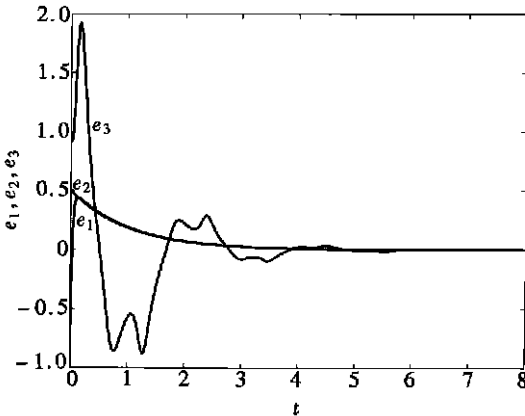


图 2 关于被控 L 系统的跟踪误差向量图

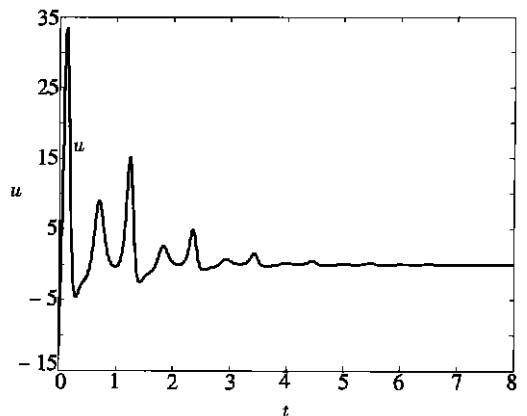


图 3 非线性控制量 u 的函数图

综上所述,即使对于动力系统的一些条件不完全了解的情况下,非线性控制项 u 仍然能保证 L₂ 系统的全局稳定性,则被控系统具有很强的鲁棒性。

下面我将对我们所取得的结论和结果做一些相应的数值模拟,所有的微分方程的解均是通过 4/5 阶的 Runge_Kutta 方法所求得的。

在图 2 中显示的是,当利用部分线性化方法时,被控制系统与期望系统之间的跟踪误差与时间 t 的函数关系图象,我们可以看到所有的误差分量均以很快的速度趋向于 0。图 3 是非线性控制项 u 与时间 t 的函数关系图象,我们可以发现控制量 u 在全部的跟踪过程中一直有界。我们取初值 $e(0) = (-1, 0.5, 1)$ 。

4 结 论

在本文中讨论了利用部分线性化的方法来控制 L₂ 系统,同时保证了该系统在全空间的稳定性。此外,当利用部分线性化的方法控制 L₂ 系统时,系统不产生奇点。因而利用部分线性化方法来研究对 L₂ 系统的控制有非常现实和理论的意义。类似地,它可以被应用到其它一些复杂的动力系统的控制中去。

致谢 作者非常感谢吕金虎博士给作者提供相应的参考资料和一些建设性的意见,同时也感谢中科院研究生科学与社会实践的资助(研究创新奖),北京交通大学人才基金(2004RC037)的资助。

[参 考 文 献]

- [1] Lorenz E N. Deterministic non-periodic flows[J]. J Atmos Sci, 1963, 20: 130—141.
- [2] CHEN Guan_rong, DONG Xiao_ning. From chaos to order_perspectives and methodologies in controlling chaotic nonlinear dynamical system[J]. Internat J Bifurcation and Chaos, 1993, 3(6): 1363—1409.
- [3] WANG Xiao_fan, CHEN Guan_rong. Chaotification via arbitrarily small feedback controls: theory, method and applications[J]. Internat J Bifurcation and Chaos, 2000, 10(3): 549—570.
- [4] Obaradovic D, Lenz H. When is OGY control more than just pole placement[J]. Internat J Bifurcation and Chaos, 1997, 7(3): 691—699.
- [5] Ott E, Grebogi C, Yorke J A. Controlling chaos[J]. Phys Rev Lett, 1990, 64(11): 1196—1199.
- [6] CHEN Guan_rong, DONG Xiao_ning. On feedback control of chaotic continuous_time systems[J]. IEEE Trans Circuits Syst Part I, 1993, 40(9): 591—601.
- [7] LÜ Jin_hu, ZHANG Suo_chun. Controlling Chen's chaotic attractor using backstepping design based on parameters identification[J]. Phys Lett A, 2001, 286(1/2): 148—152.
- [8] CHEN Guan_rong, Ueta T. Yet another chaotic attractor[J]. Internat J Bifurcation and Chaos, 1999, 9(7): 1465—1466.
- [9] Lenz H, Obradovic D. Robust control of the chaotic Lorenz system[J]. Internat J Bifurcation and Chaos, 1997, 7(12): 2847—2854.
- [10] LÜ Jin_hu, CHEN Guan_rong. A new attractor coined[J]. Internat J Bifurcation and Chaos, 2002, 12(3): 659—661.
- [11] Zwillinger D. Handbook of Differential Equations [M]. New York Academic Press, 1989, 133—198.
- [12] Slotine J, Li W. Applied Nonlinear Control [M]. New Jersey: Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1991.

Controlling L _System Using Partial Linearization

YU Yong_guang¹, ZHANG Suo_chun²

(1. Department of Mathematics, Beijing Jiaotong University,

Beijing 100044, P. R. China;

2. Institute of Applied Mathematics, Academy of Mathematics and Systems Science,

Chinese Academy of Sciences, Beijing 100080, P. R. China)

Abstract: Partial linearization method is proposed for controlling L _system. Through partially cancelling the nonlinear cross_coupling terms the stabilization of the resulting system was realized. This method can be easily realized. The robust behavior was proved with respect to an uncertain system. Numerical simulation are provided to show the effectiveness and feasibility of the method.

Key words: L _system; chaos control; partial linearization