应用数学和力学，第2卷第6期（1981年12月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

讨论栏

对"平面应变条件下裂纹尖端附近的弹塑性近似分析"一文的讨论[1)]

孟宪纲（抚顺钢厂）

一

原文109页在确定函数

$$f(\theta)=-\left[\frac{1+2n}{(1+n)^2}-k_1^2\right]\frac{A_1}{k_1}\cos k_1\theta-\left[\frac{1+2n}{(1+n)^2}-k_2^2\right]\frac{A_2}{k_2}\cos k_2\theta \tag{1.1}$$

的系数A_1、A_2时有误，利用条件

$$f'(\pi)=0 \tag{1.2}$$

得到

$$\frac{A_1}{A_2}=-\frac{\left[\frac{1+2n}{(1+n)^2}-k_2^2\right]\sin k_2\pi}{\left[\frac{1+2n}{(1+n)^2}-k_1^2\right]\sin k_1\pi} \tag{1.3}$$

仅在$n=1$时，才有$A_1=-3A_2$.（注意按照原文的写法，k_1对应于(2.19)式中的减号，k_2对应于加号）．如果再引入归一化条件

$$f(0)=1 \tag{1.4}$$

则有：

$$A_1=\frac{(1+n)^2k_1k_2\sin k_2\pi}{[1+2n-(1+n)^2k_1^2](k_1\sin k_1\pi-k_2\sin k_2\pi)}$$

$$A_2=\frac{-(1+n)^2k_1k_2\sin k_1\pi}{[1+2n-(1+n)^2k_2^2](k_1\sin k_1\pi-k_2\sin k_2\pi)}$$

代入(1.1)式，得：

$$f(\theta)=\frac{k_1\sin k_1\pi\cos k_2\theta-k_2\sin k_2\pi\cos k_1\theta}{k_1\sin k_1\pi-k_2\sin k_2\pi} \tag{1.5}$$

$$f''(0)=\frac{k_1k_2(k_1\sin k_2\pi-k_2\sin k_1\pi)}{k_1\sin k_1\pi-k_2\sin k_2\pi} \tag{1.6}$$

1) 以下均以"原文"代表下列论文：薛大为，平面应变条件下裂纹尖端附近的弹塑性近似分析，应用数学和力学，1,1 (1980) 107—113.

用(1.6)式算出的 $f''(0)$ 值与原文表 1 中所列潘灏同志的计算结果完全相同．原文 (2.24)式也应修改为下式：

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_\theta &= D_1 r^{-\frac{n}{1+n}}\frac{k_1\sin k_1\pi\cos k_2\theta-k_2\sin k_2\pi\cos k_1\theta}{k_1\sin k_1\pi-k_2\sin k_2\pi}\\
\sigma_r &= D_1(1+n)r^{-\frac{n}{1+n}}\frac{k_1\sin k_1\pi\left(1-\frac{1+n}{2+n}k_2^2\right)\cos k_2\theta-k_2\sin k_2\pi\left(1-\frac{1+n}{2+n}k_1^2\right)\cos k_1\theta}{k_1\sin k_1\pi-k_2\sin k_2\pi}\\
\tau_{r\theta} &= -\frac{1+n}{2+n}D_1k_1k_2r^{-\frac{n}{1+n}}\frac{\sin k_2\pi\sin k_1\theta-\sin k_1\pi\sin k_2\theta}{k_1\sin k_1\pi-k_2\sin k_2\pi}
\end{aligned}\right\}\quad(1.7)$$

函数 $g(\theta)$ 之表达式为：

$$\begin{aligned}
g(\theta)&=A_1\sin k_1\theta+A_2\sin k_2\theta\\
&=\frac{k_1k_2(1+n)^2}{k_1\sin k_1\pi-k_2\sin k_2\pi}\left[\frac{\sin k_2\pi\sin k_1\theta}{1+2n-(1+n)^2k_1^2}-\frac{\sin k_1\pi\sin k_2\theta}{1+2n-(1+n)^2k_2^2}\right]
\end{aligned}\quad(1.8)$$

二

原文利用文献[1]给出的公式

$$J=\frac{1}{1+n}\sigma(a)\,\delta(a)=\frac{(1-\nu^2)K_1^2}{E}\quad(2.1)$$

确定乘子 D_2 不妥，因为(2.1)式是个近似关系，只在塑性张开位移远大于弹性部份时才成立．实际上，这样算出的 D_2 为：

$$D_2=\frac{(1+n)^2(1-\nu^2)K_1^2}{2(1+2n)ED_1g(\pi)}$$

由此求出：

$$u_\theta\Big|_{\substack{\theta=\pi\\ n=1}}=\sqrt{2\pi r}\,\frac{(1-\nu^2)K_1}{E}$$

它和 Irwin 线弹性主项解

$$u_y\Big|_{\theta=\pi}=\frac{2(1-\nu^2)}{E}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}K_1$$

不一致．

下面给出一个确定乘子 D_2 之正确方法．根据文献[2]的结果，在弹塑性情况下，可近似认为弹性应力应变场向前移动了一段距离 q：

$$q=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1-n}{1+n}\left(\frac{K_1(a)}{\sigma_y{}^*}\right)^2\quad(2.2)$$

于是裂纹扩展力相应地增大为：

$$G_1=\frac{(1-\nu^2)K_1^2(a+q)}{E}\quad(2.3)$$

注意，根据应力场平移的观点，应力强度因子 K_1 是不变的，我们形式地引入 $K_1(a+q)$，只是为了计算增大了的裂纹扩展力．由于

$$K_1(a+q)\approx K_1(a)+K_1'(a)q$$

也可把(2.3)式改为：

$$G_1=\frac{(1-\nu^2)K_1^2(a)}{E}\left[1+2\frac{K_1'(a)}{K_1(a)}q\right]$$

$$=G_{10}\left[1+2\frac{K_1'(a)}{K_1(a)}q\right] \quad (2.3)$$

如果利用 Irwin-Kies 关系

$$\frac{(1-\nu^2)K_1^2}{E}=\frac{p^2}{2B}\frac{\partial\lambda}{\partial a}$$

可得
$$\frac{2K_1'(a)}{K_1(a)}=\frac{\partial^2\lambda}{\partial a^2}\bigg/\frac{\partial\lambda}{\partial a}$$

这里 λ 是受载物体的柔度.代入(2.3)′式，得

$$G_1=G_{10}\left[1+\frac{\lambda''(a)}{\lambda'(a)}q\right]$$

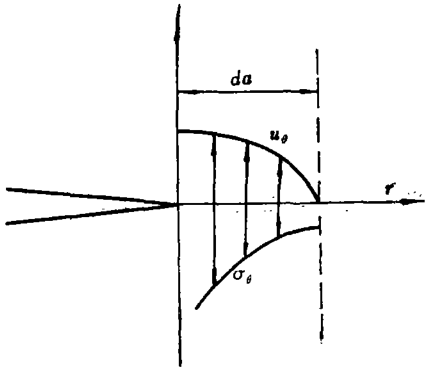

图 1

这就是文献[2]中的(12)式．不过作者认为还是利用本文的(2.3)式或(2.3)′式为好，因为应力强度因子 K_1作为 a 的函数在各种手册中很容易查到，而柔度 $\lambda(a)$则不是这样.

另一方面，如图 1 所示，当裂纹由 a 扩展到 $a+da$时，利用原文给出的弹塑性解，裂纹扩展力应为：（这里B 表示受载物体的厚度.）

$$BdaG_1=2\int_0^{da}\frac{1}{2}\sigma_\theta(r,0)u_\theta(da-r,\pi)Bdr$$

把 $\sigma_\theta(r,0)=D_1r^{-\frac{n}{n+1}}$

$$u_\theta(da-r,\pi)=\frac{1+2n}{1+n}D_2(da-r)^{\frac{n}{n+1}}g(\pi)$$

代入上式，注意积分（可用留数理论算出）：

$$\int_0^{da}\left(\frac{da-r}{r}\right)^{\frac{n}{n+1}}dr=da\int_0^{\infty}\frac{t^{\frac{n}{n+1}}}{(t+1)^2}dt=da\cdot\frac{\frac{n}{n+1}\pi}{\sin\left(\frac{n}{n+1}\pi\right)}$$

令由此算出的 G_1 和(2.3)、(2.3)′式表达的G_1 相等，

得
$$D_2=\frac{(1-\nu^2)(1+n)^2\sin\left(\frac{n}{n+1}\pi\right)K_1^2(a+q)}{ED_1\pi n(1+2n)g(\pi)} \quad (2.4)$$

或
$$D_2=\frac{(1-\nu^2)(1+n)^2\sin\left(\frac{n}{n+1}\pi\right)K_1^2(a)\left(1+2\frac{K_1'(a)}{K_1(a)}q\right)}{ED_1\pi n(1+2n)g(\pi)} \quad (2.4)'$$

原文中(2.27)式和(2.28)式应改为：

$$\left.\begin{aligned} u_r&=-D_2 r^{\frac{n}{n+1}}\frac{k_1k_2(1+n)^2}{k_1\sin k_1\pi-k_2\sin k_2\pi}\left[\frac{k_1\sin k_2\pi\cos k_1\theta}{1+2n-(1+n)^2k_1^2}-\frac{k_2\sin k_1\pi\cos k_2\theta}{1+2n-(1+n)^2k_2^2}\right]\\ u_\theta&=(1+2n)D_2 r^{\frac{n}{n+1}}\frac{k_1k_2(1+n)}{k_1\sin k_1\pi-k_2\sin k_2\pi}\left[\frac{\sin k_2\pi\sin k_1\theta}{1+2n-(1+n)^2k_1^2}-\frac{\sin k_1\pi\sin k_2\theta}{1+2n-(1+n)^2k_2^2}\right]\end{aligned}\right\}\quad(2.5)$$

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_\theta&=-\varepsilon_r=nD_2 r^{-\frac{1}{1+n}}\frac{k_1k_2(1+n)}{k_1\sin k_1\pi-k_2\sin k_2\pi}\left[\frac{k_1\sin k_2\pi\cos k_1\theta}{1+2n-(1+n)^2k_1^2}-\frac{k_2\sin k_1\pi\cos k_2\theta}{1+2n-(1+n)^2k_2^2}\right]\\ \varepsilon_{r\theta}&=-\frac{D_2}{2}r^{-\frac{1}{1+n}}\frac{k_1k_2(1+n)^2}{k_1\sin k_1\pi-k_2\sin k_2\pi}\left[\frac{\sin k_2\pi\sin k_1\theta}{1+2n-(1+n)^2k_1^2}\left(\frac{1+2n}{(1+n)^2}-k_1^2\right)\right.\\ &\quad\left.-\frac{\sin k_1\pi\sin k_2\theta}{1+2n-(1+n)^2k_2^2}\left(\frac{1+2n}{(1+n)^2}-k_2^2\right)\right]\end{aligned}\right\}\quad(2.6)$$

当 $n=1$ 时，由(2.4)、(2.5)式得：

$$u_\theta\Big|_{\substack{\theta=\pi\\ n=1}}=\frac{2(1-\nu^2)}{E}\sqrt{\frac{2r}{\pi}}K_1$$

和Irwin线弹性解一致．原文(2.29)式也应改为

$$\left[\left(n-\frac{(1+n)^2}{2+n}k_1^2\right)k_2\sin k_2\pi\cos k_1\theta-\left(n-\frac{(1+n)^2}{2+n}k_2^2\right)k_1\sin k_1\pi\cos k_2\theta\right]^2$$

$$+4k_1^2k_2^2\left(\frac{1+n}{2+n}\right)^2(\sin k_2\pi\sin k_1\theta-\sin k_1\pi\sin k_2\theta)^2$$

$$=\frac{4}{3D_1^2}\sigma_s^2 r^{\frac{2n}{1+n}}(k_1\sin k_1\pi-k_2\sin k_2\pi)^2\quad(2.7)$$

三

原文所引Hutchinson[3，4]和Rice，Rosengren[5]等建立的方程(2.1)～(2.9)中，只有 $f(\theta)$ 精确到一个常数乘子，一旦它被确定之后，函数 $g(\theta)$ 的幅值通过方程(2.9)即可确定．不存在确定常数乘子 D_2 之问题，原文由于放弃了方程(2.9)，所以才产生确定 D_2 的问题．

由以上推演可知，如果采用归一化条件 $f(0)=1$，按照原文的写法，应该在方程(2.1～(2.3)的右端加一常数乘子 D_1，在方程(2.4)～(2.7)的右端加一常数乘子 D_2，否则，前后文写法将不一致．作者建议，原文方程(2.1)～(2.7)式不变，把归一化条件(2.10) $f(0)=1$ 去掉，这样函数 $f(\theta)$ 和 $g(\theta)$ 之幅值将分别含于其表达式中．原文(2.17)式则应改为：

$$f'(\theta)=D\left[g''(\theta)+\frac{1+2n}{(1+n)^2}g(\theta)\right]$$

$$=D\sum_{i=1}^{\infty}\left[\frac{1+2n}{(1+n)^2}-k_i^2\right]A_i\sin k_i\theta\quad(3.1)$$

这里常数乘子 D 相当于原文中的 D_1/D_2，增加这个乘子既不影响方程 (2.18) 和 (2.19)的正确性，同时又避免了原文(2.17)、(2.14) 式和引入乘子 D_2 之间的矛盾. (2.20)式相应地改为：

$$f(\theta)=-D\left\{\left[\frac{1+2n}{(1+n)^2}-k_1^2\right]\frac{A_1}{k_1}\cos k_1\theta+\left[\frac{1+2n}{(1+n)^2}-k_2^2\right]\frac{A_2}{k_2}\cos k_2\theta\right\} \tag{3.2}$$

其中三个常数 D，A_1，A_2，由三个条件确定：

$$f'(\pi)=0$$

$$\sigma_\theta\big|_{r=r_0}=\sigma_y^*$$

$$\frac{(1-\nu^2)K_1^2(a+q)}{E}=\frac{1}{da}\int_0^{da}\sigma_\theta(r,0)u_\theta(da-r,\pi)dr$$

其中

$$r_0=\frac{1}{1+n}\cdot\frac{1}{\pi}\left(\frac{K_1}{\sigma_y^*}\right)^2$$

是对称轴上塑性区的长度[2].

薛大为老师鼓励写出本文，特在此表示感谢.

参 考 文 献

1. 钢铁研究院金属物理室，《工程断裂力学》，国防工业出版社，北京，(1977) 93—96页.
2. 陈篪，考虑到硬化的塑性区修正，力学，第二期 (1975).
3. Hutchinson, J. W, Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material, *J. Mech. Phy. Sol*, 16, 1, (1968).
4. Hutchinson, J. W, Plastic stress and strain fields at a crack tip, *J. Mech. Phy. Sol*, 16,5, (1968).
5. Rice J. R. and Rosengren, G. F., Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material, *J. Mech. Phy. Sol*, 16, 1, (1968).

薛大为（北京工业学院）

孟宪纲同志对拙文提出了改进的意见，我对此表示感谢.