

文章编号: 1000-0887(2005) 01-0001-06

# 射流速度剖面形状变化及其对 界面稳定性的影响<sup>\*</sup>

李小军, 胡国辉, 周哲玮

(上海大学, 上海市应用数学和力学研究所, 上海 200072)

(本刊编委周哲玮来稿)

**摘要:** 用线性稳定性理论研究了内部为轴对称液体射流、外部为同轴气体射流的粘性双流模型。在液体射流和气体射流分别处于不同压力梯度作用的条件下, 讨论了数学模型中射流速度剖面形状变化, 并用 Chebyshev 配点法研究了剪切层厚度变化及其对界面稳定性产生的影响

**关键词:** 自由射流; 速度剖面; Chebyshev 配点法; 界面稳定性

**中图分类号:** O358 **文献标识码:** A

## 引 言

自十九世纪以来, 气液两相射流的稳定性因其广泛的工程应用价值, 一直吸引人们理论研究的兴趣。由于流动的稳定性特征与基本流剖面的形状密切相关, 而实验测量的剖面形状往往不是十分精确, 因此在数值模拟中采用何种速度模型进行研究是一个值得关注的问题。在简化的模型中可以假设气体、液体均为无粘、不可压基本流为“帽子流”(top\_hat)剖面<sup>[1, 2]</sup>。为了和实际流动相对照, 苏海容<sup>[3]</sup>在 Lin 和 Ibrahim<sup>[4]</sup>的研究基础上, 假设气液体均为有粘、不可压、气液压力梯度均为常数并相等, 得到了自由射流的精确解, 并用 Chebyshev 配点法分析了流动的稳定性。

本文立足于将苏海容等人的工作推广到更为实际的情况, 研究气液压力梯度均为常数但不相等的情况, 探讨由此引起剪切层厚度的变化及其对稳定的影响。

## 1 数学模型

考虑无穷域中轴对称的双流模型, 其中内部为圆柱形液体射流, 周围是同轴气体射流(如图 1 所示)。假设液体和气体均为粘性不可压, 将流动变量写成基本流加小扰动的形式, 并用正则模态方法将小扰动量表示成:

\* 收稿日期: 2003\_05\_12; 修订日期: 2004\_10\_22

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(50371049); 上海宝钢集团公司联合资助项目; 上海市博士点基金和上海市优秀青年教师后备人选资助项目(03YQH092)

作者简介: 李小军(1973—), 男, 四川攀枝花人, 硕士;

周哲玮(1950—), 男, 湖北武汉人, 教授, 博士, 博导, 副校长(联系人, Tel: + 86\_21\_66134661;

Fax: + 86\_21\_36033287; E\_mail: zhwzhou@yc.shu.edu.cn)•

$$[V_i(r, z, t), p_i(r, z, t), \eta(z, t)] = [V_i(r), p_i(r), \eta] \cdot e^{(ikz + \omega t)}$$

其中  $V_i(r), p_i(r)$  是扰动的特征函数,  $\omega, k$  分别是我们要讨论的时间频率和轴向波数,  $\eta$  是界面的径向坐标. 可得到一组由原始变量形成的常微分方程组和界面及边界条件(1)~(9).

$$\begin{cases} \omega V_{1r} = \frac{1}{Re} \left[ \frac{d^2 V_{1r}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_{1r}}{dr} - \left( k^2 + \frac{1}{r^2} + ikReW_1 \right) V_{1r} \right] - \frac{dp_1}{dr}, \\ \omega V_{1z} = -\frac{dW_1}{dr} V_{1r} + \frac{1}{Re} \left[ \frac{d^2 V_{1z}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_{1z}}{dr} - \left( k^2 + ikReW_1 \right) V_{1z} \right] - ikp_1, \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} 0 = \frac{dV_{1r}}{dr} + \frac{1}{r} V_{1r} + ikV_{1z}, \\ \omega V_{2r} = \frac{1}{Re} \frac{N}{Q} \left[ \frac{d^2 V_{2r}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_{2r}}{dr} - \left( k^2 + \frac{1}{r^2} + ikReW_2 \right) V_{2r} \right] - \frac{1}{Q} \frac{dp_2}{dr}, \\ \omega V_{2z} = -\frac{dW_2}{dr} V_{2r} + \frac{1}{Re} \frac{N}{Q} \left[ \frac{d^2 V_{2z}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV_{2z}}{dr} - \left( k^2 + ikReW_2 \right) V_{2z} \right] - \frac{1}{Q} ikp_2, \\ 0 = \frac{dV_{2r}}{dr} + \frac{1}{r} V_{2r} + ikV_{2z}. \end{cases} \quad (2)$$

界面及边界条件是:

1)  $r = 0$  处:

$$V_{1r} = \frac{dV_{1z}}{dr} = \frac{dp_1}{dr} = 0 \quad (3)$$

2)  $r = 1$  处:

$$\omega \eta = V_{1r} - ikW_1 \eta \quad (4)$$

$$V_{1r} - V_{2r} = 0, \quad (5)$$

$$V_{1z} - V_{2z} + \left( \frac{dW_1}{dr} - \frac{dW_2}{dr} \right) \eta = 0, \quad (6)$$

$$ikV_{1r} + \frac{dV_{1z}}{dr} - N \left( ikV_{2r} + \frac{dV_{2z}}{dr} \right) + \left( \frac{d^2 W_1}{dr^2} - N \frac{d^2 W_2}{dr^2} \right) \eta = 0, \quad (7)$$

$$p_1 - \frac{2}{Re} \frac{dV_{1r}}{dr} - \left( p_2 - \frac{2N}{Re} \frac{dV_{2r}}{dr} \right) + \frac{1}{We} (1 - k^2) \eta = 0 \quad (8)$$

3)  $r = \infty$  处:

$$V_{2r} = V_{2z} = \frac{\partial p_2}{\partial r} = 0, \quad (9)$$

其中  $W_1, W_2$  为气体和液体射流中的基本流剖面,  $V_{1r}, V_{2r}, V_{1z}, V_{2z}, p_1, p_2, \eta$  为扰动量. 无量纲参数为:

$$Re = \frac{\rho_2 W a}{\mu_1}, \quad Fr = \frac{W^2}{g a}, \quad We = \frac{\rho_1 W^2 a}{\sigma}, \quad Q = \frac{\rho_2}{\rho_1}, \quad R = \frac{Re}{Fr}, \quad N = \frac{\mu_2}{\mu_1},$$

选择气液速度差  $W$  为特征速度, 液体射流半径  $a$  为特征长度.  $Re$  为雷诺数,  $Fr$  为弗罗得数,  $We$  为韦伯数,  $Q$  为气液密度比,  $R$  为雷诺与弗罗得数之比,  $N$  为气液动力学粘性系数比.

本文采用 Chebyshev 配点法<sup>[5]</sup> 求解齐次常微分方程组(1)~(9), 得到形如

$$\omega C y = D y$$

的广义特征值问题, 其中  $C, D$  为系数矩阵,  $y$  是由未知数构成的列向量. 对于以上广义特征值问题我们采用 QZ 方法求解. 在程序中采用非线性坐标变换将物理参数从物理空间变换到计算空间(见文献[3]). 在进行计算前, 我们通过改变 Chebyshev 多项式的展开项数, 对计算结

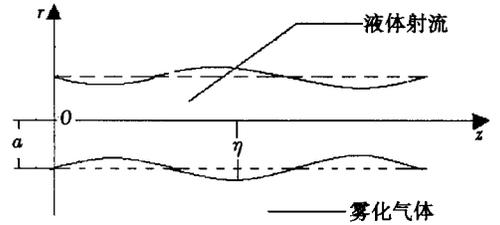


图 1 模型示意图

果进行了收敛性测试,在程序中内部液体和外部气体所采用的展开项数分别为  $M_1 = 60$ ,  $M_2 = 90$ 。

## 2 基本流

Lin 和 Ibrahim 在求解管道中的气液两相流射流稳定性时,假设气液压力梯度为常数且相等得到了有粘不可压流动的精确解<sup>[4]</sup>,苏海容等人将其推广到自由射流的情况<sup>[3]</sup>。在实际工程应用中,喷嘴内外的压力梯度往往是不相等的,本文在以上参考文献的基础上,假设两相流的压力梯度均为常数且  $(dP_1/dz)/(dP_2/dz) = \beta$ ,求得满足控制方程和边界条件的精确解为:

$$\begin{cases} W_1(r) = \frac{R(L^2 - 1)(\beta - Q)}{4(\beta L^2 - \beta + 1)}(r^2 - 1) - \\ \frac{R(Q - \beta)(L^2 - 1)}{4(\beta L^2 - \beta + 1)} - \frac{RL^2(\beta - Q)\ln L}{2N(\beta L^2 - \beta + 1)} + C & (0 \leq r \leq 1), \\ W_2(r) = \begin{cases} \frac{R(Q - \beta)}{4N(\beta L^2 - \beta + 1)}(r^2 - L^2) - \frac{RL^2(\beta - Q)}{2N(\beta L^2 - \beta + 1)}\ln\left(\frac{L}{r}\right) + C \\ C & (r > L) \end{cases} & (1 \leq r \leq L), \end{cases}$$

由此可以得到气液速度差为

$$dv = W_2(L) - W_1(0) = \frac{R(L^2 - 1)(\beta - Q)}{4(\beta L^2 - \beta + 1)} - \frac{R(Q - \beta)}{4N(\beta L^2 - \beta + 1)}(1 - L^2) + \frac{RL^2(\beta - Q)}{2N(\beta L^2 - \beta + 1)}\ln L,$$

其中  $C$  为无穷远处气体速度,  $L$  剪切层厚度。由于本文中选取气液速度差作为特征速度,因此有  $dv = 1$ 。

在苏海容等人<sup>[3]</sup>的工作中,速度差表达式为

$$dv = W_2(L) - W_1(0) = \frac{R(L^2 - 1)(1 - Q)}{4L^2} - \frac{R(Q - 1)}{4NL^2}(1 - L^2) + \frac{R(1 - Q)}{2N}\ln L.$$

显然当  $\beta = 1$  时,本文的速度剖面与文献[3]是一致的。文献[3]的速度剖面由于受雷诺数  $Re$ , 弗诺得数  $Fr$ , 气液密度比  $Q$ , 气液粘性比  $N$  和剪切层厚度  $L$  的约束。在具体的实验条件下  $Re$ ,  $Fr$ ,  $Q$  和  $N$  是一定的,这样气液速度差就决定了剪切层厚度  $L$ ,且气液速度差越大,剪切层厚度  $L$  越大。我们知道在喷射雾化过程中,气液速度差比较大而剪切层厚度一般都比较小。这样就在事实上程度上限制了该理论模型的实际应用。因此引入气液压力梯度比有助于克服这一困难。

实际过程中,通常气液压力梯度之比越大,速度差就越大,剪切层就越薄。但是实验资料中给出的仅有速度差,还未见到压力梯度和剪切厚度的测量数据。因此我们还无从判断这三者在实际问题中的关系。本文考虑气液速度差固定时压力梯度比影响剪切层厚度的情况。

图 2 是剪切层厚度随参数  $\beta$  的变化关系。其中  $Re = 37\,708$ ,  $Fr = 417\,870$ ,  $Q = 0.000\,2$ ,  $We = 48\,980$ 。我们可以看出随着  $\beta$  的增加,剪切层厚度  $L$  相应减小,且当  $\beta$  达到一定值之后,  $L$  相对与  $\beta$  的变化就会变得相对很小。 $\beta = 1$  时  $L = 1.086$ ,  $N = 0.000\,292$  就是文献[3]的速度剖面。

### 3 流动稳定性特征

首先我们研究参数  $\beta$  的变化对射流稳定性的影响(图3)。为了便于比较,我们所有参数都取自实验数据(见文献[2])。

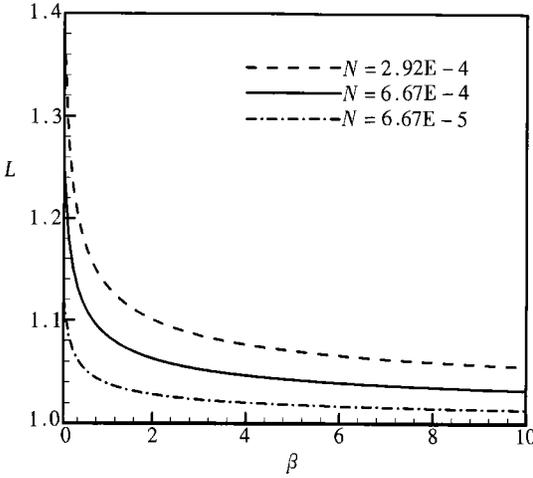


图2 L随 $\beta$ 的变化关系

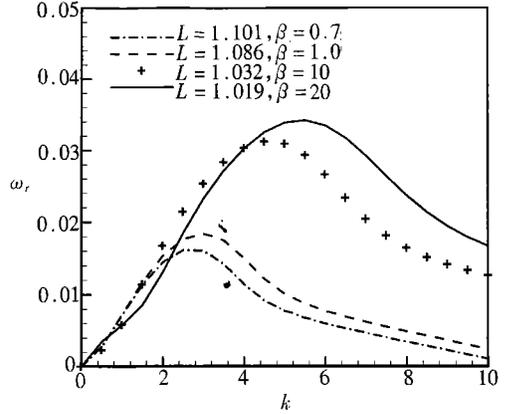


图3 剪切层厚度L对射流稳定性的影响

$$We = 4.8985 \times 10^4, Re = 3.7708 \times 10^4,$$

$$Fr = 4.1787 \times 10^5, Q = 2 \times 10^{-4}, N = 2.92 \times 10^{-4}$$

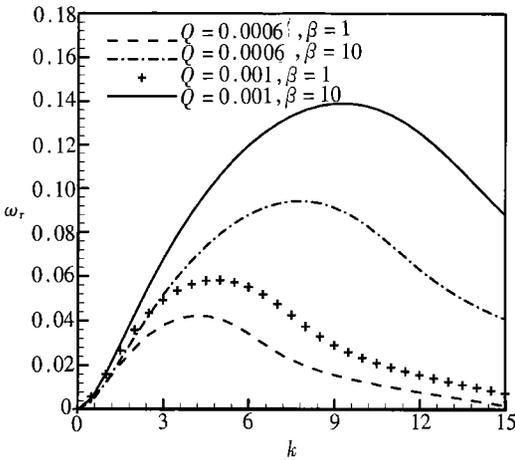


图4 两种剖面下气液密度比对射流稳定性的影响比较

$$Re = 3.7708 \times 10^4, Fr = 4.1787 \times 10^5,$$

$$We = 4.898 \times 10^4, N = 2.92 \times 10^{-4}$$

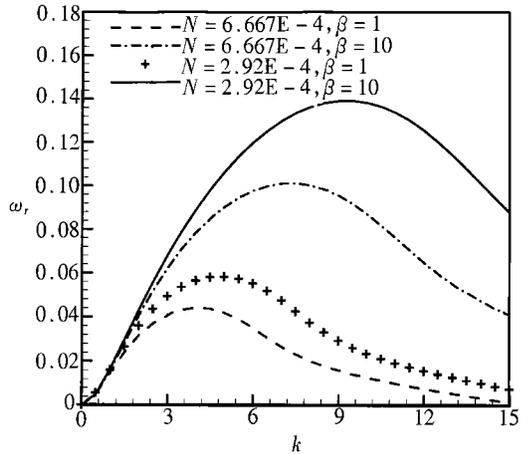


图5 两种速度剖面气液粘性比变化对射流稳定性的影响比较

$$Re = 3.7708 \times 10^4, Fr = 4.1787 \times 10^5,$$

$$We = 4.898 \times 10^4, Q = 0.001$$

图3中  $\beta = 1, L = 1.086$  时的曲线代表了文献[3]的情形,此时时间增长率和波数分别为  $\omega_r = 0.018426, k_r = 3.0$ 。图中显示在不改变其他参数的情况下,随着参数  $\beta$  的增加,剪切层厚度  $L$  减小,不稳定模态时间增长率和波数都相应增加。这表明增加气液压力梯度比使剪切层变薄,射流会更不稳定。

下面我们考察其他参数变化时本文的速度剖面与文献[3]的速度剖面对射流稳定性的影

响有何差别。

### 3.1 两种速度剖面下气液密度比对射流稳定性的影响的差别

引入参数  $\beta$  后, 本文与文献[3]两种剖面在气液密度比变化时对射流稳定性的影响的差别如图4, 从图中我们可以看出随着气液密度比的增加, 两种速度剖面中不稳定模态的时间增长率和波数都增加, 但在相同的气液密度比时本文的速度剖面比同样情况下的文献[3]的速度剖面更不稳定。

### 3.2 两种速度剖面下气液粘性比 $N$ 变化对射流稳定性的影响的差别

图5表示了引入参数  $\beta$  后, 本文与文献[3]两种剖面在气液粘性比变化时对射流稳定性的影响的差别, 从图中我们可以看出随着气液粘性比的减小, 两种速度剖面中不稳定模态的时间增长率和波数都增加, 但在相同的气液粘性比时本文的速度剖面比同样情况下文献[3]的速度剖面更不稳定。

### 3.3 两种速度剖面下表面张力(韦伯数 $We$ )变化对射流稳定性的影响

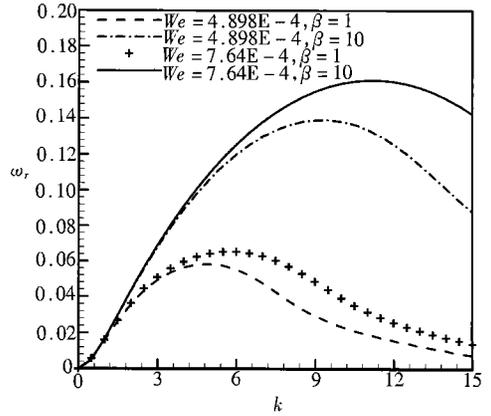
图6表示了引入参数  $\beta$  后, 本文与文献[3]两种剖面在液体的表面张力变化时对射流稳定性的影响的差别, 从图中我们可以看出随着液体表面张力的减小(韦伯数  $We$  的增加), 两种速度剖面中不稳定模态的时间增长率和对应波数都增加, 但在液体表面张力相同时本文的速度剖面比同样情况下文献[3]的速度剖面更不稳定。

## 4 结 论

本文在文献[3]的基础上, 进一步讨论了气液两相压力梯度之比  $\beta$  所引起的速度剖面变化及其对界面稳定性的影响。计算证明: 在一定速度差下, 压力梯度之比越大, 则剪切层越薄。但是目前实验资料中给出的仅有速度差, 还未见到压力梯度和剪切层厚度的测量数据, 因此我们还无从判断这三者在实际问题中的关系, 只能通过数值实验来进行探讨。通过对理论模型的计算, 发现在相同物理参数下气液压力梯度比越大, 剪切层越薄, 射流越不稳定。在相同的压力梯度比下, 随着气液密度比  $Q$  的增加, 气液粘性比  $N$  的减小, 表面张力的减小(韦伯数  $We$  的增加), 射流越不稳定<sup>[6,7]</sup>。这一结果是与前人的研究结果一致的。

### [参 考 文 献]

- [1] ZHOU Zhe\_wei, TANG Xiao\_dong. The effect of the pulsation in gas flow on the stability of metered metal jet [A]. In: Fourth International Conference on Spray Forming [C]. USA: Baltimore, 1999, 35—41.
- [2] 马铮, 周哲玮. 气流雾化问题中的流动稳定性研究[J]. 应用数学和力学, 1999, 20(10): 991—995.
- [3] 苏海容, 胡国辉, 周哲玮. 自由射流界面稳定性的伪谱分析[J]. 应用数学力学, 2004, 25(12): 1211—1219.
- [4] Lin S P, Ibrahim E A. Instability of a viscous liquid jet surrounded by a viscous gas in a vertical pipe



$$Re = 3.7708 \times 10^4, Fr = 4.1787 \times 10^5, \\ N = 6.67 \times 10^{-4}, Q = 0.001$$

图6 两种速度剖面韦伯数变化对射流稳定性的影响比较

- [J]. *J Fluid Mech*, 1990, **218**: 641—658.
- [5] 向新民. 谱方法的数值分析[M]. 北京: 科学出版社, 2000.
- [6] Taylor G I. Generation of ripples by wind blowing over viscous fluid[A]. In: Taylor G I, Batchelor G K Eds. *The Scientific Papers of sir Geoffery Ingram Taylor* [C]. Vol 3. Cambridge U K: Cambridge University Press, 1965, 952—963.
- [7] Lin S P, Chen J N. Role played by the interfacial shear in the instability mechanism of a viscous liquid jet surrounded by a viscous gas in a pipe[J]. *J Fluid Mech*, 1998, **376**: 37—51.

## Variation of Velocity Profile of Jet and Its Effect on Interfacial Stability

LI Xiao\_jun, HU Guo\_hui, ZHOU Zhe\_wei  
(Shanghai Institute of Applied Mathematics and Mechanics,  
Shanghai University, Shanghai 200072, P. R. China)

**Abstract:** Linear stability theory is used to study a double fluid model for a liquid jet surrounded by a coaxial gas steam. Under the different pressure gradients for liquid and gas flow, the variation of the velocity profile in the model and the thickness of the shear layer were investigated. The effects of such variation on the interfacial stability were discussed with the application of Chebyshev spectral collocation method.

**Key words:** free jet; velocity profile; Chebyshev collocation method; interfacial stability