应用数学和力学，第2卷第5期（1981年10月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

固体的离散型变分原理——有限元离散分析的变分原理*

牛庠均

（北京工业大学，1979年12月30日收到）

摘　要

本文提出一类新的固体的离散型变分原理．它是从有限元离散分析的实际出发，考虑到元素的边界为可动边界，并且由于分片构造待解函数，使待解函数在元素的交界处具有各种间断性．由此，我们利用数学中的具有各种间断性的可动边界的变分方法，基于一阶变分为零的驻值条件上，建立了固体的离散型变分原理．离散型变分原理消除了元素交界处所导入的误差．它概括了古典与非古典变分原理．本文得到的待解函数应满足的交界方程，是有限元的收敛性（包括非保形元素在内）的必要条件，它开拓了待解函数应满足协调性的收敛性要求．

一、引　　言

传统的固体力学是基于固体具有连续性假设基础上，假定应力函数、位移函数在整个定义域为解析函数的基础上形成的，我们称之为古典固体力学，其变分原理称为古典变分原理．类似在[1]中提出的变分原理，我们称之为非古典或修正的变分原理．在对固体体系进行数值计算时，首先要进行离散分析，建立离散方程，然后进行数值分析，选取适宜的求解方法，用数值计算机求解离散方程，以期获得所需要的数值结果．在离散分析过程，要对固体进行几何剖分；分片构造待解函数（应力函数、位移函数或应变函数）；选取适宜的变分原理建立离散方程．基于这样的情况，为解决种种情况下的固体的应力、位移、应变所形成的系统，我们称为离散型固体力学，其相应的变分原理，我们称之为离散型变分原理，与离散型变分原理等价的尤拉方程是微分形式的数学物理方程．

从离散分析的角度而言，这里有二个特点，其一是对固体进行几何剖分，划分为有限个元素，对每个元素而言，其内部边界，也就是元素的交界边界，随着变形过程而变动，因此，它们是可动的边界．其二是由于采用分片多项式插值逼近待解函数，在元素的交界处待解函数具有各种间断性．因此，在这种情况下，求能量泛函的变分问题，实质是具有各种间断性的可动边界的变分问题，也就是在具有间断性的函数类中寻求其解的问题．由于变分原理的

* 钱伟长推荐．

描述与其微分方程形式的描述的等价性是基于能量泛函的一阶变分为零的条件上，但用有限元作离散分析时，应用古典与非古典变分原理建立离散方程，在元素的交界处其一阶变分并不为零．为此，我们应用具有间断性的可动边界的变分问题，基于一阶变分为零的驻值条件，来建立各种类型的固体的离散型变分原理．

1. 几何剖分

记固体体系为 Ω，其整体边界记为$\partial\Omega$，并 $\partial\Omega=\partial\Omega_1\cup\partial\Omega_2$，其$\partial\Omega_1$ 为力的边界，而$\partial\Omega_2$ 则为几何边界，取 $\bar{\Omega}=\Omega\cup\partial\Omega$．对固体用点、线、面作离散分割，把固体分割为有限个子区 S_a，称为元素 S_a，它的边界为分片光滑的，记为Γ_a．于是建立一种几何剖分 S_h，用有限个元素 S_a 的和，去逼近固体 $\bar{\Omega}$，记为

$$\bar{\Omega}=\bigcup_{a=1}^{M}S_a \tag{1.1}$$

几何剖分与元素的形状具有任意性．在分割时要考虑到对固体的几何形状的逼近性；要考虑到固体物理性质的间断性；要考虑到收敛性的要求；要考虑某种意义下的最佳剖分的问题；以及等等其它因素．

2. 待解函数的逼近

对于待解函数的插值逼近，是以元素 S_a 为定义域，多用多项式插值逼近．在离散的全部节点 $P_i(i=1,2,3\cdots N)$ 上定义广义函数值 U_i，它们的集合记为

$$K_U=\{U_i(P),\ i=1,2,\cdots N\} \tag{1.2}$$

称为离散型固体的自由度．在元素 S_a 上作以节点的广义函数值 U_i 为待定参数的多项式插值函数 $u_i(P)$，由 $u_i(P)$ 形成的函数空间记为 V_h，而 V_h 与 S_h 和 $u_i(P)$ 有关．可选取一组函数

$$G_i(P_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \tag{1.3}$$

称为函数空间 V_h 的一组基函数，或称形状函数．则任意的函数 $u(P)\in V_h$，可表为

$$u(P)=\sum_{i=1}^{N}U_i(P)G_i(P) \tag{1.4}$$

这就是待解函数的一般形式．

待解函数在元素 S_a 内部具有充分的光滑性，但在元素的交界处，待解函数或为连续的 C^0 函数类；或为函数本身及其一阶导数连续的 C^1 函数类；或为具有更高光滑性的 C^n 函数类．就整体而言，待解函数类 V_h 不是解析函数类，但它是由分片解析函数类所组成．在整个定义域内，或 $V_h\subset C^0(\bar{\Omega})$，或为 $V_h\subset C^1(\bar{\Omega})$，或为 $V_h\subset C^n(\bar{\Omega})$．

3. 坐标变换

为了分析可动边界的变分问题，对于每个元素而言，我们取如下坐标变换

$$\xi_i=x_i+\alpha\delta x_i \tag{1.5}$$

其中 x_i 为固体元素各点的变形前的坐标，ξ_i 为变形后的坐标，δx_i 为坐标的改变量，α 为微小参量．当 $\alpha=0$ 时，上述变换退化为恒等变换．在上述变换下，把积分区域 $S'_a(\xi_i)$ 变换成积分区域 $S_a(x_i)$，是一一对应的，变换是连续的且具有连续的偏导数，并设雅各比行列式 $J_i\neq 0$．由此，待解函数在变换（1.5）的情况下，可写为

$$u_i(\xi_i)=u_i(x_i)+\alpha\delta u_i$$

$$u_{i,j}(\xi_i)=u_{i,j}(x_i)+\alpha\delta u_{i,j} \tag{1.6}$$

当 $\alpha=0$ 时，有

$$u_i(\xi_i)=u_i(x_i),\quad u_{i,j}(\xi_i)=u_{i,j}(x_i)$$

在这里，有

$$\delta x_i=\frac{\partial\xi_i}{\partial\alpha}\qquad\qquad \delta u_i=\frac{\partial u_i(\xi_i)}{\partial\alpha}$$

$$\delta u_{i,j}=\frac{\partial u_{i,j}(\xi_i)}{\partial\alpha} \tag{1.7}$$

现在我们引入另外的 δu_i 与 $\delta u_{i,j}$ 的表示式．取

$$\bar{\delta}u_i=\frac{\partial u_i(x_i,\alpha)}{\partial\alpha}$$

$$\bar{\delta}u_{i,j}=\frac{\partial u_{i,j}(x_i,\alpha)}{\partial\alpha} \tag{1.8,a}$$

和

$$\bar{\bar{\delta}}u_i=\frac{\partial u_i(\xi_i,\alpha)}{\partial x_j}\delta x_j=u_{i,j}\delta x_j$$

$$\bar{\bar{\delta}}u_{i,j}=\frac{\partial u_{i,j}(\xi_i,\alpha)}{\partial x_K}\delta x_K=u_{i,j,K}\delta x_K \tag{1.8,b}$$

这里 $\bar{\delta}u_i$ 和 $\bar{\delta}u_{i,j}$ 表示坐标 x_i 固定时，仅由参量 α 的改变时而产生 u_i 和 $u_{i,j}$ 的变分．而 $\bar{\bar{\delta}}u_i$ 和 $\bar{\bar{\delta}}u_{i,j}$ 则表示仅由于坐标 x_i 改变时而产生的 u_i 和 $u_{i,j}$ 的变分．

由此，方程(1.7)可表示为

$$\delta u_i=\bar{\delta}u_i+\bar{\bar{\delta}}u_i=\bar{\delta}u_i+u_{i,j}\delta x_j \tag{1.9,a}$$

$$\delta u_{i,j}=\bar{\delta}u_{i,j}+\bar{\bar{\delta}}u_{i,j}=\bar{\delta}u_{i,j}+u_{i,j,K}\delta x_K \tag{1.9,b}$$

二、具有间断性的可动边界的变分问题

据上所述，对于固体的离散分析过程中，能量泛函的变分问题是待解函数具有间断性的可动边界的变分问题．下面应用数学中的可动边界的变分方法[2-3]，来进行分析，并基于一阶变分为零的驻值条件上，建立固体的离散型变分原理．

1. 基于势能函数（第一能量函数）的情况

根据对固体的离散分割，把整个固体分割为有限个元素 S_a 之和，则固体的总势能为每个元素 S_a 的势能之和．对于边界固定的情况下，其总势能为

$$\Pi=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}\Pi_0(x_i,u_i,u_{i,j})dV-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_iu_idr\right\} \tag{2.1}$$

其中 $$\Pi_0=\frac{1}{2}\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})\varepsilon_{ij}-F_iu_i=\Pi_1(x_i,u_i,u_{i,j})-F_iu_i$$

其变分为 $$\delta\Pi_1=\sigma_{ij}(\varepsilon_{ij})\delta\varepsilon_{ij}$$

这里 Π_1 称为单位体积的势能(势能密度).

由于变形的原因、积分区域与待解函数都与参变量 α 有关，则固体变形后的总势能，为

$$\Pi(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{S_a'(\alpha)}\Pi_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),u_{i,j}(\xi_i,\alpha))dV(\xi_i)\right.$$
$$\left.-\iint\limits_{\Gamma_a(\alpha)\cap\partial\Omega_1(\alpha)}\bar{P}_1u_i(\xi_i,\alpha)dr(\xi_i)\right\} \tag{2.2}$$

利用坐标变换(1.5)，可把泛函 $\Pi(\alpha)$ 用固定积分域表示，则有

$$\Pi(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{S_a}\Pi_0(\xi_i(\alpha),u_i(\xi_i,\alpha),u_{i,j}(\xi_i,\alpha))|J_1|dV\right.$$
$$\left.-\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_iu_i(\xi_i,\alpha)|J_i|dr\right\} \tag{2.3}$$

其中 $$J_1=\frac{D(\xi_1,\xi_2,\xi_3)}{D(x_1,x_2,x_3)},\quad J_i=\frac{D(\xi_j,\xi_K)}{D(x_j,x_K)}$$
$$(i,j,K=1,\ 2,\ 3)$$

为雅各比行列式.

泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零，现在来计算方程(2.3)的一阶变分，有

$$\delta\Pi(\alpha)=\frac{\partial\Pi(\alpha)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{S_a}[(\Pi_0)_{,i}\delta x_i\right.$$
$$+(\Pi_0)_{,u_i}\delta u_i+(\Pi_0)_{,u_{i,j}}\delta u_{i,j}+\Pi_0(\delta x_i)_{,i}]dV$$
$$-\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[(\bar{P}_iu_i)_{,j\neq i}\delta x_j+(\bar{P}_iu_i)_{,u_i}\delta u_i$$
$$\left.+(\bar{P}_iu_i)(\delta x_j)_{,j\neq i}]dr\right\} \tag{2.4}$$

其中
$$\left.\begin{aligned}(\Pi_0)_{,i}\delta x_i&=\sum_{i=1}^{2,3}\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial x_i}\right)\delta x_i\\(\Pi_0)_{,u_i}\delta u_i&=\sum_{i=1}^{2,3}\left(\frac{\partial\Pi_0}{\partial u_i}\right)\delta u_i\\(\bar{P}_iu_i)_{,j\neq i}\delta x_j&=\sum_{\substack{j=i\\j\neq i}}^{K}\frac{\partial(\bar{P}_iu_i)}{\partial x_j}\delta x_j\end{aligned}\right\} \tag{2.5}$$

其他符号意义类同.

利用方程(2.4)，则方程(2.3)的一阶变分，为

$$\delta\Pi(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint\limits_{S_a}[\sigma_{ij}(u_{i,j})\delta u_{i,j}-F_i\delta u_i]dV\right.$$

$$+\iiint\limits_{S_a}\Pi_0(\delta x_i)_{,i}dV-\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[(\bar{P}_iu_i)(\delta x_j)_{,j\neq i}+\bar{P}_i\delta u_i]dr\Big\}\qquad(2.6)$$

考虑到方程(1.9)，并利用 *Green* 定理、方程(2.6)可化为

$$\delta\Pi(a)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{S_a}-(\sigma_{ij,j}+F_i)\bar{\delta}u_idV+\iint\limits_{\Gamma_a}\sigma_{ij}l_j\bar{\delta}u_i\,dr+\iint\limits_{\Gamma_a}\Pi_0l_j\delta x_jdr$$

$$+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\bar{\delta}u_i+\Pi_0l_j\delta x_j-(\bar{P}_iu_i\delta x_j)_{,j\neq i}]dr\Big\}\qquad(2.7)$$

其中 l_j 为方向余弦．今后为写的方便，记

$$P_{\rm II}=\Pi_0l_j\delta x_j-(\bar{P}_iu_i\delta x_j)_{,j\neq i}$$

由上式可知，能量泛函的可动边界的变分可分为二个部分，一部分为待解函数本身的改变(当积分区域固定)引起的；一部分为积分区域的变动而引起的．

在元素的边界 Γ_a 上，用 $\bar{\delta}u_i=\delta u_i-u_{i,K}\delta x_K$ 的关系代入方程(2.7)，并且令其等于零，则

$$\delta\Pi(a)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{S_a}-(\sigma_{ij,j}+F_i)\bar{\delta}u_idV+\iint\limits_{\Gamma_a}\sigma_{ij}l_j\,\delta u_idr+\iint\limits_{\Gamma_a}[\Pi_0l_K-u_{i,K}(\sigma_{ij}l_j)]\delta x_Kdr$$

$$+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_idr+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[P_{\rm II}-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,K}\delta x_K]dr\Big\}=0$$
$$(2.8)$$

如果变分 δu_i 和 δx_K 相互无关，且为任意的函数，则由(2.8)式得

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0\text{，(在 }S_a\text{ 内)}\qquad(2.9,a)$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0\text{，(在 }\partial\Omega_1\text{)}\qquad(2.9,b)$$

$$P_{\rm II}-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,K}\delta x_K=0\text{，(在 }\partial\Omega_1\text{)}\qquad(2.9,c)$$

$$\sum_{a=1}^{M}(\sigma_{ij}l_j)\Big|_{\Gamma_a}=0\text{，(在 }\Gamma_a\text{上)}\qquad(2.9,d)$$

$$\sum_{a=1}^{M}(\Pi_0l_K-u_{i,K}\sigma_{ij}l_j)\Big|_{\Gamma_a}=0\text{ (在 }\Gamma_a\text{ 上)}\qquad(2.9,e)$$

就整体而言，在元素交界处 Γ_a 上，方程(2.9,d)，(2.9,e)可写为

$$\sigma_{ij}l_j\Big|_{\Gamma_{ab}+0}=\sigma_{ij}l_j\Big|_{\Gamma_{ab}-0}\qquad(2.10,a)$$

$$(\Pi_0l_K-u_{i,K}\sigma_{ij}l_j)\Big|_{\Gamma_{ab}+0}=(\Pi_0l_K-u_{i,K}\sigma_{ij}l_j)\Big|_{\Gamma_{ab}-0}\qquad(2.10,b)$$

$$\Gamma_{ab}=1,2\cdots M'$$

这里 Γ_{ab} 为元素 S_a 与 S_b 的交界处，M' 为固体中的元素交界处的总数目．

如果变分 δu_i 与 δx_K 相互有关时，当变形后元素边界上的待解函数 u_i 为

$$u_i=R_i(\xi_i),\ \therefore\quad \delta u_i=R_{i,K}\delta x_K \tag{2.11}$$

将方程（2.11）代入方程（2.8）. 则方程（2.9）变为

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0,\ (\text{在 } S_a \text{ 内}) \tag{2.12,a}$$

$$P_{\rm II}+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,K}-u_{i,K})\delta x_K=0,\ (\text{在 } \partial\Omega_1) \tag{2.12,b}$$

$$\Pi_0 l_K+(R_{i,K}-u_{i,K})\sigma_{ij}l_j\Big|_{\Gamma_{ab}+0}=\Pi_0 l_K+(R_{i,K}-u_{i,K})\sigma_{ij}l_j\Big|_{\Gamma_{ab}-0} \tag{2.12,c}$$

方程（2.9）与（2.12）是根据待解函数具有间断性的可动边界的变分问题，在能量泛函的一阶变分为零的条件上，求得的离散型固体应满足的部分微分方程. 方程（2.9,a），（2.9,b）、（2.12,a）均为古典固体力学的平衡方程与力的边界条件. 方程（2.9,c）为由积分区域的改变. 在力的边界上应满足的附加条件. 方程（2.9,d），（2.9,e），或（2.10）或（2.12,c）为待解函数在元素交界处应满足的交界条件，我们称之为交界方程. 交界方程的物理意义是对连续体用有限元作离散分析时，在元素交界处待解函数应满足的条件. 在不满足时，能量泛函的一阶变分不等于零. 在元素交界处导入了误差. 因交界方程是基于待解函数具有间断性的可动边界的变分问题，在一阶变分为零的条件下求得的. 所以用有限元作离散分析时，包括采用保形与非保形元素在内的情况，交界方程是保证收敛性的必要条件.

2. 基于余能函数（第二能量函数）的情况

与上类同，基于对固体体系的离散分割，在固定区域的情况下，其总余能，为

$$\mathscr{L}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}\mathscr{L}_0(x_i,\sigma_{ij})dV-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_jdr\right\} \tag{2.13}$$

其中 $\quad\mathscr{L}_0=\frac{1}{2}\varepsilon_{ij}(\sigma_{ij})\sigma_{ij},\ \delta\mathscr{L}_0=\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}$

称$\mathscr{L}_0$为单位体积的余能（余能密度）.

由于变形的原因，待解函数与积分区域都随参变量α改变，则固体变形后的总余能，为

$$\mathscr{L}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S'_a(\alpha)}\mathscr{L}_0(\xi_i(\alpha),\ \sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))dV(\xi_i)-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)l_jdr\right\} \tag{2.14}$$

利用坐标变换(1.5)，可把能量泛函$\mathscr{L}(\alpha)$用固定积分域表示. 则有

$$\mathscr{L}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}\mathscr{L}_0(\xi_i(\alpha),\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha))|J_1|dV-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}(\xi_i,\alpha)l_jdr\right\} \tag{2.15}$$

由于能量泛函实现极值的必要条件为一阶变分为零. 现在来分析方程(2.15)的一阶变分.

已知
$$\delta\mathscr{L}(\alpha)=\frac{\partial\mathscr{L}(\alpha)}{\partial\alpha}\bigg|_{\alpha=0}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S}[(\mathscr{L}_0)_{,i}\delta x_i+(\mathscr{L}_0)_{,\sigma_{ij}}\delta\sigma_{ij}+(\mathscr{L}_0)(\delta x_i)_{,i}]dV-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}l_jdr\Big\}$$
$$=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a}[\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}+(\mathscr{L}_0)(\delta x_i)_{,i}]dV-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}l_jdr\Big\} \tag{2.16}$$

与方程(1.9)类似，有
$$\delta\sigma_{ij}=\bar{\delta}\sigma_{ij}+\bar{\bar{\delta}}\sigma_{ij}=\bar{\delta}\sigma_{ij}+\sigma_{ij,K}\delta x_K \tag{2.17}$$

当假定 $\bar{\delta}\sigma_{ij,j}=0$，故 $\iiint_{S_a}u_i\bar{\delta}\sigma_{ij,j}dV=0$．再利用 Green 定理．有
$$\iiint_{S_a}u_i\bar{\delta}\sigma_{ij,j}dV=\iint_{\Gamma_a}u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jdr-\iiint_{S_a}u_{i,j}\bar{\delta}\sigma_{ij}dV=0 \tag{2.18}$$

考虑到方程(2.17)，(2.18)，则方程(2.16)可化为
$$\delta\mathscr{L}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a}[u_i\bar{\delta}\sigma_{ij,j}+\varepsilon_{ij}\delta\sigma_{ij}+(\mathscr{L}_0)(\delta x_i)_{,i}]dV-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\delta\sigma_{ij}l_jdr\Big\}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a}(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})\bar{\delta}\sigma_{ij}dV$$
$$+\iint_{\Gamma_a}u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jdr+\iint_{\Gamma_a}\mathscr{L}_0l_j\delta x_jdr+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jdr\Big\} \tag{2.19}$$

在元素的边界 Γ_a 上，取 $\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j=\delta\sigma_{ij}l_j-(\sigma_{ij}l_j)_{,K}\delta x_K$ 关系式代入(2.19)，并令其等于零，则得
$$\delta\mathscr{L}(\alpha)=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a}(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})\bar{\delta}\sigma_{ij}dV+\iint_{\Gamma}u_i\delta\sigma_{ij}l_jdr$$
$$+\iint_{\Gamma_a}[\mathscr{L}_0l_K-u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,K}]\delta x_Kdr+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jdr\Big\}=0 \tag{2.20}$$

当 $\delta\sigma_{ij}l_j$ 与 δx_K 无关，且具任意性，则得
$$\varepsilon_{ij}-u_{i,j}=0\quad(\text{在 } S_a \text{ 内}) \tag{2.21,a}$$
$$u_i-\bar{u}_i=0\quad(\text{在 } \partial\Omega_2) \tag{2.21,b}$$

$$\sum_{a=1}^{M} u_i \Big|_{\Gamma_a} = 0 \text{（在 } \Gamma_a \text{ 上）} \tag{2.21,c}$$

$$\sum_{a=1}^{M} (\mathscr{L}_0 l_K - u_i(\sigma_{ij} l_j),_K \Big|_{\Gamma_a} = 0 \text{（在 } \Gamma_a \text{ 上）} \tag{2.21,d}$$

就整体而言，方程(2.21,c)，(2.21,d)可写为

$$u_i \Big|_{\Gamma_{ab}+0} = u_i \Big|_{\Gamma_{ab}-0} \tag{2.22,a}$$

$$(\mathscr{L}_0 l_K - u_i(\sigma_{ij} l_j),_K)\Big|_{\Gamma_{ab}+0} = (\mathscr{L}_0 l_K - u_i(\sigma_{ij} l_j),_K)\Big|_{\Gamma_{ab}-0} \tag{2.22,b}$$

如果变形 $\delta\sigma_{ij} l_j$ 与 δx_K 有关时，在变形后的元素的边界 Γ_a 上，取

$$\sigma_{ij} l_j = T_i(\xi_i), \quad \therefore \quad \delta(\sigma_{ij} l_j) = T_{i,K} \delta x_K \tag{2.23}$$

把(2.23)代入(2.20)，则得

$$\varepsilon_{ij} - u_{i,j} = 0 \text{，（在 } S_a \text{ 内）} \tag{2.24,a}$$

$$u_i - \bar{u}_i = 0 \text{，（在 } \partial\Omega_2\text{）} \tag{2.24,b}$$

$$\mathscr{L}_0 l_K + [T_{i,K} - (\sigma_{ij} l_j),_K] u_i \Big|_{\Gamma_{ab}+0}$$

$$= \mathscr{L}_0 l_K + [T_{i,K} - (\sigma_{ij} l_j),_K] u_i \Big|_{\Gamma_{ab}-0} \tag{2.24,c}$$

方程（2.21），（2.24）是根据待解函数具有间断性的可动边界的变分问题，在一阶变分为零的条件上求得的离散型固体应满足的部份尤拉微分方程．方程（2.21，a），（2.21，b）和（2.24，a），（2.24，b）正是古典固体力学的几何方程与几何边界条件．方程（2.21，c），（2.21，d）和（2.24，c）为待解函数在元素的交界处应满足的交界条件，我们称之为交界方程．其物理意义与上述相同．顺便指出，方程（2.12，c）和（2.24，c）就是数学中所谓横截条件．在这里我们称之为交界方程．

基于固体的总势能与总余能的情况，我们分析了可动边界的变分问题，并基于一阶变分为零的条件下，求得了与之等价的微分方程，即离散型固体体系的待解函数应满足的微分方程与边界条件，它们是在元素 S_a 内，应满足的几何方程，平衡方程，物理方程．在元素交界处 Γ_a 上，应满足的交界方程．在整体力的边界上，应满足力的和附加的边界条件，在整体几何边界上，应满足的几何边界条件．当待解函数在整个定义域内具有充分的光滑性时，以及在整体边界上略去由于边界可动性带来的影响时，则这些方程就退化为古典固体力学的全部方程．我们称这些方程为离散型固体力学的微分方程．

三、可动边界的离散型变分原理

基于上述，现在可以建立确切描述有限元离散分析的离散型变分原理．

1． 离散型第一变分原理 I：

对固体体系进行几何剖分与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素 S_a 内部满

足几何方程，在整体边界上满足几何边界条件时，则满足下面泛函的变分方程：

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\bar{\delta}\Big[\iiint\limits_{S_a}\Pi_0 dV-\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_i u_i dr\Big]+\iint\limits_{\Gamma_a}\Pi_0 l_j\delta x_j dr+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}P_{\text{п}} dr\Big\}=0 \tag{3.1}$$

的位移函数为其驻值条件下的真实解.

证明很简单，直接从(2.4)—(2.8)的方程推演过程，就可由(3.1)得到与之等价的微分方程(2.9)或(2.12)，这里不必多述．当略去此变分原理中与 δx_j 有关项时，这个变分原理就退化为古典的势能极值原理.

2. 离散型第一变分原理Ⅱ：

对固体体系进行几何剖分与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素 S_a 内部满足几何方程，在整体边界上满足几何边界条件，在元素的交界处 Γ_a 满足交界方程(2.12,c)时，则满足下面泛函的变分方程

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\bar{\delta}\Big[\iiint\limits_{S}\Pi_0 dV-\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_i u_i dr\Big]-\iint\limits_{\Gamma_a}\sigma_{ij}l_j\bar{\delta}u_i dr+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}P_{\text{п}} dr\Big\}=0 \tag{3.2}$$

的位移函数为其驻值条件下的真实解

证明：

利用 Green 定理，上式可化为

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint\limits_{S_a}-(\sigma_{ij,j}+F_i)\bar{\delta}u_i dV+\iint\limits_{\Gamma_a}\sigma_{ij}l_j\bar{\delta}u_i dr-\iint\limits_{\Gamma_a}\sigma_{ij}l_j\bar{\delta}u_i dr+\iint\limits_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\bar{\delta}u_i+P_{\text{п}}]dr\Big\}=0 \tag{3.3}$$

当取 $\bar{\delta}u_i=(R_{i,K}-u_{i,K})\delta x_K$ 时，代入上式，则

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0\ (\text{在 } S_a \text{ 内}) \tag{2.12,a}$$

$$P_{\text{п}}+(R_{i,K}-u_{i,K})(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta x_K=0\ (\text{在 } \partial\Omega_1) \tag{2.12,b}$$

当考虑到预先已假定位移函数满足几何方程，几何边界条件，交界方程，以及物理方程在把应力函数用应变表示时已经用到了．则求得的解满足离散型固体力学的全部方程.

3. 离散型第一变分原理Ⅲ：

对固体体系进行几何剖分与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素 S_a 内部满足几何方程，在元素交界处 Γ_a 应力函数与位移函数均为独立变量，并且应力函数为连续时，则满足下面泛函的变分方程

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\bar{\delta}\left[\iiint_{S}-\Pi_0 dV+\iint_{\Gamma_a}\sigma_{ij}l_j\cdot u_i dr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_j dr\right]\right.$$

$$\left.-\iint_{\Gamma}\Pi_0 l_j\delta x_j dr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}P_{\rm II}dr\right\}=0 \quad (\bar{\Gamma}_a=\Gamma_a+\partial\Omega_1+\partial\Omega_2) \tag{3.4}$$

的应力函数与位移函数为其驻值条件的真实解.

证明：上式可等于

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S}-\sigma_{ij}\bar{\delta}\varepsilon_{ij}dV+\iiint_{S}F_i\bar{\delta}u_i dV-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j dr\right.$$

$$\left.+\iint_{\bar{\Gamma}_a}(\sigma_{ij}l_j\bar{\delta}u_i+u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j)dr-\iint_{\Gamma_a}\Pi_0 l_j\delta x_j dr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}P_{\rm II}dr\right\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}(\sigma_{ij,j}+F_i)\bar{\delta}u_i dV-\iint_{\Gamma_a}\sigma_{ij}l_j\bar{\delta}u_i dr+\iint_{\bar{\Gamma}_a}(\sigma_{ij}l_j\bar{\delta}u_i\right.$$

$$\left.+u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j)dr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j dr-\iint_{\Gamma_a}\Pi_0 l_j\delta x_j dr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}P_{\rm II}dr\right\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}(\sigma_{ij,j}+F_i)\bar{\delta}u_i dV+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j dr\right.$$

$$-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\delta u_i dr-\iint_{\Gamma_a}[\Pi_0 l_K+u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,K}]\delta x_K dr$$

$$\left.+\iint_{\Gamma_a}u_i\delta\sigma_{ij}l_j dr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[P_{\rm II}-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,K}\delta x_K]dr\right\}=0 \tag{3.5,a}$$

由于 δu_i, $\delta\sigma_{ij}l_j$, $\bar{\delta}u_i$ 和 δx_K 的任意性，我们得到

$$\sigma_{ij,j}+F_i=0 \quad (\text{在 } S_a \text{ 内}) \tag{2.9,a}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \quad (\text{在 } \partial\Omega_2) \tag{2.21,b}$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \quad (\text{在 } \partial\Omega_1) \tag{2.9,b}$$

$$P_{\rm II}-(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)u_{i,K}\delta x_K=0 \quad (\text{在 } \partial\Omega_1) \tag{2.9,c}$$

$$\sum_{a=1}^{M}u_i\Big|_{\Gamma_a}=0 \tag{2.21,c}$$

$$\sum_{a=1}^{M}\Pi_0 l_K+u_i(\sigma_{ij}l_j)_{,K}\Big|_{\Gamma_a}=0 \tag{3.5,b}$$

这里方程 (3.5,b) 是基于一阶变分为零条件下，对于这种情况的交界方程．当考虑到事先假定待解函数满足几何方程，以及物理方程在应力函数用应变函数表示时已用上了，则应力函数与位移函数满足应满足的全部微分方程．当略去由于边界的可动性的影响，则此变分原理

就退化为非古典变分原理[1].

4. 离散型第二变分原理Ⅰ：

对固体体系进行几何剖分与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素 S_a 内部满足平衡方程，在整体边界上满足力的及其附加的边界条件时，则满足下面泛函变分方程

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\bar{\delta}\left[\iiint_{S_a}\mathscr{L}_0(\sigma_{ij})dV-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_jd\Gamma\right]+\iint_{\Gamma_a}\mathscr{L}_0l_j\delta x_jd\Gamma\right\}=0 \tag{3.6}$$

的应力函数及位移函数为其在驻值条件下的真实解.

证明：

已假定应力函数满足平衡方程，在每个元素 S_a 内，有

$$\iiint_{S_a}u_i\bar{\delta}\sigma_{ij,j}dV=\iint_{\Gamma_a}u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jd\Gamma-\iiint_{S_a}u_{i,j}\bar{\delta}\sigma_{ij}dV=0$$

将此式与(3.6)相加，则有

$$\begin{aligned}&\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})\bar{\delta}\sigma_{ij}dV+\iint_{\Gamma_a}[u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j]d\Gamma\right.\\&\left.\quad+\iint_{\Gamma_a}\mathscr{L}_0l_j\delta x_jd\Gamma+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jd\Gamma\right\}\\&=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}(\varepsilon_{ij}-u_{i,j})\bar{\delta}\sigma_{ij}dV+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jd\Gamma\right.\\&\left.\quad+\iint_{\Gamma_a}[\mathscr{L}_0l_K+(T_{i,K}-(\sigma_{ij}l_j)_{,K})u_i]\delta x_Kd\Gamma\right\}=0\end{aligned} \tag{3.7}$$

由于 $\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j$ 与 δx_K 的任意性，则得到全部方程(2.24)，再考虑到本变分原理的前提条件，则求得的解满足离散型固体力学的全部方程．当略去 δx_K 的影响时，此变分原理退化为古典的余能原理.

5. 离散型第二变分原理Ⅱ：

对固体体系进行几何剖分与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素 S_a 内部满足平衡方程，在整体边界上满足力的及其附加边界条件，在元素交界处 Γ_a 满足交界方程(2.24,c)时，则满足下面泛函的变分方程

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\bar{\delta}\left[\iiint_{S_a}\mathscr{L}_0(\sigma_{ij})dV-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_jd\Gamma\right]-\iint_{\Gamma_a}u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jd\Gamma\right\}=0 \tag{3.8}$$

的应力函数与位移函数为其驻值条件下的真实解.

证明与上类同，不必多述.

6. 离散型第二变分原理Ⅲ：

对固体体系进行几何剖分与分片构造待解函数的基础上，当待解函数在元素 S_a 内部满足平衡方程，在元素的交界处 Γ_a 应力函数与位移函数均为独立变量，并且位移函数为连续时，则满足下面泛函的变分方程

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\bar{\delta}\Big[\iiint_{S_a}-\mathscr{L}_0(\sigma_{ij})dV+\iint_{\bar{\Gamma}_a}\sigma_{ij}l_j\cdot u_i dr - \iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_i u_i dr\Big]-\iint_{\Gamma}\mathscr{L}_0 l_j\delta x_j dr\Big\}=0 \tag{3.9}$$

$$(\bar{\Gamma}_a=\Gamma_a+\partial\Omega_1+\partial\Omega_2)$$

的应力函数与位移函数为其在驻值条件下的真实解.

证明：已假定在元素 S_a 内部满足平衡方程。则有

$$-\iiint_{S_a}u_i\bar{\delta}\sigma_{ij,j}dV=-\iint_{\Gamma_a}u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j dr+\iiint_{S_a}u_{i,j}\bar{\delta}\sigma_{ij}dV=0$$

将此式与(3.9)式相加，则有

$$\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a}(u_{i,j}-\varepsilon_{ij})\bar{\delta}\sigma_{ij}dV-\iint_{\bar{\Gamma}_a}u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j dr\\
&\quad+\iint_{\bar{\Gamma}_a}(\sigma_{ij}l_j\bar{\delta}u_i+u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j)dr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_i\bar{\delta}u_i dr\\
&\quad-\iint_{\Gamma_a}\mathscr{L}_0 l_j\delta x_j dr\Big\}=\sum_{a=1}^{M}\Big\{\iiint_{S_a}(u_{i,j}-\varepsilon_{ij})\bar{\delta}\sigma_{ij}dV\\
&\quad+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\bar{\delta}u_i dr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j dr\\
&\quad-\iint_{\Gamma_a}[\mathscr{L}_0 l_K+(\sigma_{ij}l_j)\cdot u_{i,K}]\delta x_K dr+\iint_{\Gamma_a}\sigma_{ij}l_j\delta u_i dr\Big\}\\
&=0
\end{aligned}\tag{3.10,a}$$

由于 $\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j$，$\bar{\delta}u_i$，$\delta u_i$ 和 δx_K 的任意性，我们得到

$$u_{i,j}-\varepsilon_{ij}=0 \qquad (\text{在 } S_a \text{ 内}) \tag{2.21,a}$$

$$u_i-\bar{u}_i=0 \qquad (\text{在 } \partial\Omega_2) \tag{2.21,b}$$

$$\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i=0 \qquad (\text{在 } \partial\Omega_1) \tag{2.9,b}$$

$$\sum_{a=1}^{M}\sigma_{ij}l_j\Big|_{\Gamma_a}=0 \tag{2.9,d}$$

$$\sum_{a=1}^{M} \mathscr{L}_0 l_K+(\sigma_{ij}l_j)\cdot u_{i,K}\Big|_{\Gamma}=0 \tag{3.10,b}$$

这里方程（3.10,b）是基于一阶变分为零的条件上，对于这种情况的交界方程．当再考虑到本变分原理的前提条件，则求得的解满足全部应满足的方程．当略去变分原理中与 δx_K 有关的项时，也就是不考虑积分区域的变动的影响时，此变分原理就退化为非古典变分原理[1]．

7. 离散型第三变分原理Ⅰ：

对固体体系进行几何剖分与分片构造待解函数的基础上，假定应力函数和位移函数在元素 S_a 内部满足平衡方程，几何方程，物理方程，在元素的交界处 Γ_a 满足交界方程时，则满足下面泛函变分方程

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\bar{\delta}\Big[\iiint_{S_a}(u_{i,j}\cdot\sigma_{ij}-F_iu_i)dV-\iint_{\Gamma_a}\sigma_{ij}l_j\cdot u_idr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_i\cdot u_idr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\cdot\sigma_{ij}l_jdr\Big]+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_{\text{II}}dr\right\}=0 \tag{3.11}$$

的应力函数与位移函数为其驻值条件下的真实解．

其中 $\bar{P}_{\text{II}}=[\Pi_0l_K+\mathscr{L}_0l_K+u_i(T_{i,K}-(\sigma_{ij}l_j)_{,K})]\delta x_K-(\bar{P}_iu_i\delta x_j)_{,j\neq i}$

证明：上式等于

$$\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}[u_{i,j}\bar{\delta}\sigma_{ij}+\sigma_{ij}\bar{\delta}u_{i,j}-F_i\bar{\delta}u_i]dV-\iint_{\Gamma_a}[\sigma_{ij}l_j\bar{\delta}u_i+u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j]dr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_i\bar{\delta}u_idr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jdr+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}P_{\text{II}}dr\right\}$$

$$=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iiint_{S_a}[-u_i\bar{\delta}\sigma_{ij,j}-(\sigma_{ij,j}+F_i)\bar{\delta}u_i]dV+\iint_{\Gamma_a}(u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j+\sigma_{ij}l_j\bar{\delta}u_i)dr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_i\bar{\delta}u_idr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jdr-\iint_{\Gamma_a}[\sigma_{ij}l_j\bar{\delta}u_i+u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j]dr+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_{\text{II}}dr\right\}=\sum_{a=1}^{M}\left\{\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jdr+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[\bar{P}_{\text{II}}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,K}-u_{i,K})\delta x_K]dr\right\}=0 \tag{3.12}$$

由于 $\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j$ 与 δx_K 的任意性，则得

$$u_i-\bar{u}_i=0,\ (\text{在 }\partial\Omega_2) \tag{2.21,b}$$

$$\bar{P}_{\text{II}}+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,K}-u_{i,K})\delta x_K=0\ (\text{在 }\partial\Omega_1) \tag{2.12,b}$$

这是待解函数应满足的力的和几何的边界条件．再考虑到此变分原理的前提条件，可知求得

的解满足全部微分方程，当略去 δx_K 的影响时，则此条件就退化为古典情况的边界条件．

8．　离散型第三变分原理Ⅱ：

对固体体系进行几何剖分与分片构造待解函数的基础上，假定应力函数与位移函数在元素 S_a 内部满足平衡方程、几何方程，物理方程时，则满足下面泛函的变分方程

$$\sum_{a=1}^{M}\Big\{\bar{\delta}\Big[\iiint_{S}(u_{i,j}\sigma_{ij}-F_iu_i)dV-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_iu_idr-\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}\bar{u}_i\sigma_{ij}l_jdr\Big]$$
$$+\iint_{\Gamma}(\Pi_0l_j+\mathscr{L}_0l_j)\delta x_jdr+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_{\text{n}}dr\Big\}=0 \qquad (3.13)$$

的应力函数与位移函数为在其驻值条件下的真实解。

证明：上式等于

$$\sum_{j=1}^{M}\Big\{\iint_{\Gamma_a}[\Pi_0l_j\delta x_j+\sigma_{ij}l_j\bar{\delta}u_i]dr+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jdr$$
$$+\iint_{\Gamma_a}[\mathscr{L}_0l_j\delta x_j+u_i\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j]dr+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)\bar{\delta}u_idr$$
$$+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}\bar{P}_{\text{n}}dr\Big\}=\sum_{j=1}^{M}\Big\{\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_2}(u_i-\bar{u}_i)\bar{\delta}\sigma_{ij}l_jdr$$
$$+\iint_{\Gamma_a\cap\partial\Omega_1}[\bar{P}_{\text{n}}+(\sigma_{ij}l_j-\bar{P}_i)(R_{i,K}-u_{i,K})\delta x_K]dr$$
$$+\iint_{\Gamma_a}[\Pi_0l_K+(R_{i,K}-u_{i,K})\sigma_{ij}l_j]\delta x_Kdr$$
$$+\iint_{\Gamma_a}[\mathscr{L}_0l_K+(T_{i,K}-(\sigma_{ij}l_j)_{,K})u_i]\delta x_Kdr\Big\}=0 \qquad (3.14)$$

由于 $\bar{\delta}\sigma_{ij}l_j$ 和 δx_K 的任意性．可由此方程得到全部的交界方程（2.12，c），（2.24，c）和边界条件（3.12，a），（2.24，b），再注意到本变分原理的前提条件，则求得的解满足离散型固体力学的全部微分方程．

四、结　　语

1．　离散型固体力学的全部微分方程，除包括古典固体力学的全部方程（平衡方程，几何方程，物理方程，边界条件）之外，还有交界方程和附加边界条件．与这些微分方程提法等价的是基于一阶变分为零的可动边界的离散型变分原理．这种变分原理是在具有间断性的函数类中寻求能量泛函的驻值点的变分原理．

2．　固体的离散型变分原理概括了古典与非古典变分原理．当待解函数在整个定义域内为充分光滑时，它退化为古典变分原理．当略去边界可动性的影响时，它退化为非古典变分原理．

3. 交界方程是有限元离散分析（包括非保形元素）的收敛性必要条件．它的实质是保证元素交界处的能量的协调性，开拓了目前对待解函数满足协调性的要求．在离散分析时，用古典与非古典变分原理建立离散方程时，它在元素的交界处导入了误差．用离散型变分原理去建立离散方程时，它消除了在元素交界处所导入的误差．

在此，我衷心感谢钱伟长教授给予的帮助和鼓励．

参 考 文 献

1. Pian T. H. H. and Tong, P., Basis of finite element method for solid continua, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1, (1969), 3-28.
2. Courant R. and Hilbert D., 《数学物理方法 I》（中译本），科学出版社 (1958)
3. 钱伟长，《变分法及有限元》上册（讲义，1978），科学出版社．(1980).

The Solid Variational Principles of the Discrete Form—The Variational Principles of the Discrete Analysis by the Finite Element Method

Niu Xiang-jun

(Beijing Polytechnic University, Beijing)

Abstract

This paper puts forward a new solid variational principle of discrete form. Basing on the true case of the discrete analysis by the finite element method and considering the variable boundaries of the elements and the unknown functions of piecewise approximation, it has been found out that the unknown functions have various discontinuities at the interfaces between successive elements

Thus we have used mathematical technique of variable boundaries with discontinuity of the unknown functions, based on the condition that the first variation vanishes immediately, so as to establish the solid variational principles of discrete form. It generalizes the classical and non-classical variational principles. Successive equations that have to be satisfied by the unknown functions are the convergency necessary conditions for the finite elements method (including conforming and non-conforming). They expand the convergency necessary conditions of the compatibility conditions in the internal interfaces