应用数学和力学，第2卷第5期（1981年10月）
Applied Mathematics and Mechanics
应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

关于薄板弯曲问题的摄动方法*

莫嘉琪　　石秉国

（安徽师范大学，1980年11月3日收到）

摘　　要

本文利用多重尺度法研究了薄板在中面力的作用下的弯曲问题.

今考虑环形薄板在中面力的作用下的非均匀弯曲问题. W. E. Alzheimer 和 R. T. Davis (1968) 曾经用匹配法讨论了这类问题[1],[2]. 江福汝 (1980) 利用多重尺度法曾讨论了在径向力N_r，环向力N_θ，剪力$N_{r\theta}$满足$N_r>0$，$N_rN_\theta-N_{r\theta}^2>0$的情形[3]. 本文是利用同一方法来讨论当$N_r=N(r)$，$N_\theta=0$，$N_{r\theta}=0$的情形. 在这种情形下$N_rN_\theta-N_{r\theta}^2=0$.

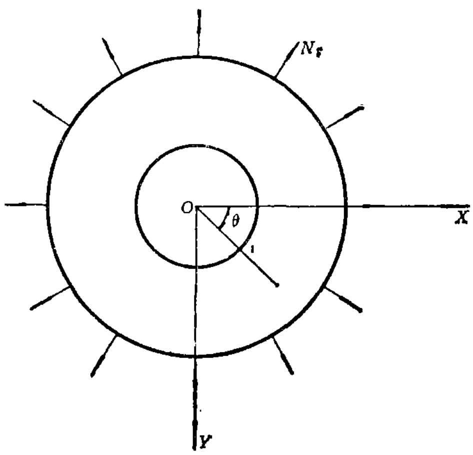

图 1　板在变形前的俯视图

利用极坐标 (r,θ)，薄板在径向力$N_r=N(r)$ (>0) 的作用下（图1）的挠度方程为[1],[2],[3]：

$$\Delta\Delta W-\frac{N(r)}{D}\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}=0 \qquad (1)$$

其中$W(r,\theta)$为挠度函数，$D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$为板的弯曲刚度，$h$为薄板的厚度，$E$为Young弹性模量，$\nu$为Poisson比，$\Delta$为Laplace算子.

设环形板的内缘半径与外缘半径分别为r_0，r_1. 引入无量纲量：

$$\tilde W=\frac{W}{h},\qquad \tilde r=\frac{r}{r_1},\qquad \tilde N(r)=\frac{N(r)}{r_1E}$$

方程(1)化为（略去符号"～"）

$$L_\varepsilon[W]\equiv\varepsilon^2\Delta\Delta W-N(r)\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}=0 \qquad (2)$$

其中　$\varepsilon^2=\dfrac{h^3}{12(1-\nu^2)r_1^3}\ll 1.$

* 江福汝推荐.

设给定的边界条件为

$$W|_{r=b}=f_0(\theta),\ W|_{r=1}=f_1(\theta) \qquad (3)$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r=b}=g_0(\theta),\ \left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r=1}=g_1(\theta) \qquad (4)$$

其中 $b=\frac{r_0}{r_1}<1$；$f_0(\theta)$，$f_1(\theta)$，$g_0(\theta)$，$g_1(\theta)$为充分光滑的函数．

方程（2）当 $\varepsilon=0$ 时退化为

$$F[W_0]\equiv\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}=0 \qquad (5)$$

方程（5）在边界条件（3）的解为：

$$W_0(r,\theta)=\frac{1}{1-b}[(f_0(\theta)-bf_1(\theta))-(f_0(\theta)-f_1(\theta))r] \qquad (6)$$

先考虑在边界 $r=b$，$r=1$ 的外部解：

$$W(r,\theta,\varepsilon)=W_0(r,\theta)+\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n W_n(r,\theta) \qquad (7)$$

将（7）代入（2），令 ε 的各次幂的系数为零，得到

$$F[W_n]=\frac{1}{N}\Delta\Delta W_{n-2}\ (n=1,2,\cdots) \qquad (8)$$

在（8）式和以后都将带负下标的函数取作零．方程（8）的解一般不能同时满足（3）—（4）的边界条件．为此，尚需补充边界层项．

首先，在 $r=b$ 的邻域内引入变量 ξ 和 η：

$$\xi=\frac{1}{\varepsilon}\int_b^r[N(r_1)]^{\frac{1}{2}}dr_1,\ \eta=r$$

这时关于 r 的偏导数变为：

$$\frac{\partial}{\partial r}=\varepsilon^{-1}\left(N^{\frac{1}{2}}\frac{\partial}{\partial\xi}+\varepsilon\frac{\partial}{\partial\eta}\right)$$

将上述微分算子代入（2）：

$$\varepsilon^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)W-N\frac{\partial^2 W}{\partial r^2}=0$$

便有

$$\varepsilon^{-2}\left[\sum_{i=0}^{4}\varepsilon^i K_i\right]W=0 \qquad (9)$$

其中

$$K_0\equiv N^2\left(\frac{\partial^4}{\partial\xi^4}-\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\right)$$

$$K_1\equiv 4N^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^4}{\partial\xi^3\partial\eta}+\left(3N^{\frac{1}{2}}N'+\frac{2}{\eta}N^{\frac{3}{2}}\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi^3}-2N^{\frac{3}{2}}\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}-\frac{N^{\frac{1}{2}}N'}{2}\frac{\partial}{\partial\xi}$$

$$K_2\equiv 6N\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+6\left(N'+\frac{1}{\eta}N\right)\frac{\partial^3}{\partial\xi^2\partial\eta}+\left(-\frac{1}{4}N^{-1}N'^2+2N''\right.$$

$$+\frac{3}{\eta}N'-\frac{1}{\eta^2}N\Big)\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}+\frac{2}{\eta^2}N\frac{\partial^4}{\partial\xi^2\partial\theta^2}-N\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}$$

$$K_3\equiv 4N^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^4}{\partial\xi\partial\eta^3}+\Big(3N^{-\frac{1}{2}}N'+\frac{6}{\eta}N^{\frac{1}{2}}\Big)\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\eta}$$

$$+\Big(-N^{-\frac{3}{2}}N'+2N^{-\frac{1}{2}}N''+\frac{3}{\eta}N^{-\frac{1}{2}}N'-\frac{2}{\eta^2}N^{\frac{1}{2}}\Big)\frac{\partial^2}{\partial\xi\partial\eta}$$

$$+\frac{4}{\eta}N^{\frac{1}{2}}\frac{\partial^4}{\partial\xi\partial\eta\partial\theta^2}+\Big(\frac{1}{\eta^2}N^{-\frac{1}{2}}N'-\frac{2}{\eta^3}N^{\frac{1}{2}}\Big)\frac{\partial^3}{\partial\xi\partial\theta^2}$$

$$+\Big(\frac{3}{8}N^{-\frac{5}{2}}N'^3-\frac{3}{4}N^{-\frac{3}{2}}N'N''+\frac{1}{2}N^{-\frac{1}{2}}N'''$$

$$+\frac{1}{\eta}\Big(-\frac{1}{2}N^{-\frac{3}{2}}N'^2+N^{-\frac{1}{2}}N''\Big)-\frac{1}{2\eta^2}N^{-\frac{1}{2}}N'+\frac{1}{\eta^3}N^{\frac{1}{2}}\Big)\frac{\partial}{\partial\xi}$$

$$K_4\equiv\frac{\partial^4}{\partial\eta^4}+\frac{2}{\eta}\frac{\partial^3}{\partial\eta^3}+\frac{2}{\eta^2}\frac{\partial^4}{\partial\eta^2\partial\theta^2}-\frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2}-\frac{2}{\eta^3}\frac{\partial^3}{\partial\eta\partial\theta^2}$$

$$+\frac{1}{\eta^3}\frac{\partial}{\partial\eta}+\frac{1}{\eta^4}\frac{\partial^4}{\partial\theta^4}+\frac{4}{\eta^4}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}$$

其中 $N=N(\eta)$，撇号表示它关于 η 的求导.

设在 $r=b$ 邻域的边界层项具有如下展开式：

$$V^{(b)}(\xi,\eta,\theta,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n+1}V_n^{(b)}(\xi,\eta,\theta) \tag{10}$$

将（10）代入（2）并令 ε 的各次幂的系数为零，得到

$$K_0[V_0^{(b)}]=0$$

即

$$\frac{\partial^4 V_0^{(b)}}{\partial\xi^4}-\frac{\partial^2 V_0^{(b)}}{\partial\xi^2}=0 \tag{11}$$

及

$$K_0[V_n^{(b)}]=-\sum_{i=1}^{4}K_i[V_{n-i}^{(b)}]\quad(n=1,2,\cdots) \tag{12}$$

由（11）得到 $V_0^{(b)}$ 具有边界层项性质的解为：

$$V_0^{(b)}=C_0^{(b)}(\eta,\theta)\exp(-\xi)=C_0^{(b)}(r,\theta)\exp\Big(-\frac{1}{\varepsilon}\int_b^r N^{\frac{1}{2}}dr_1\Big) \tag{13}$$

其中 $C_0^{(b)}$ 为任意函数.

由（12）（当 $n=1$ 时）可得：

$$K_0[V_1^{(b)}]=-K_1[V_0^{(b)}] \tag{14}$$

令 $K_1[V_0^{(b)}]=0$，可得

$$2N\frac{\partial C_0^{(b)}}{\partial\eta}+\Big(\frac{5}{2}N'+\frac{2}{\eta}N\Big)C_0^{(b)}=0 \tag{15}$$

方程（15）的边界条件将在后面提出（参见(27)）.

此时（14）便为：

$$K_0[V_1^{(b)}]\equiv\frac{\partial^4 V_1^{(b)}}{\partial\xi^4}-\frac{\partial^2 V_1^{(b)}}{\partial\xi^2}=0$$

得到$V_1^{(b)}$具有边界层项性质的解为：

$$V_1^{(b)}=C_1^{(b)}(\eta,\theta)\exp(-\xi)=C_1^{(b)}(r,\theta)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_b^r N^{\frac{1}{2}}dr_1\right) \tag{16}$$

其中$C_1^{(b)}$为任意函数.

用上述相同的方法. 利用递推关系式（12）, 可以逐次地确定$V_n^{(b)}$：

$$V_n^{(b)}=C_n^{(b)}(\eta,\theta)\exp(-\xi)=C_n^{(b)}(r,\theta)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_b^r N^{\frac{1}{2}}dr_1\right)$$

$$(n=2,\ 3,\ \cdots) \tag{17}$$

其中$C_n^{(b)}$满足一阶偏微分方程：

$$2N\frac{\partial C_n^{(b)}}{\partial\eta}+\left(\frac{5}{2}N'+\frac{2}{\eta}N\right)C_n^{(b)}=N^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=2}^{4}K_i[V_{n+1-i}^{(b)}]\exp\xi$$

$$(n=1,2,\cdots) \tag{18}$$

方程（18）的边界条件也将在后面提出（参见(30)）.

其次，在$r=1$的邻域也可构造具有如下形式的边界层项：

$$V^{(1)}(\bar{\xi},\bar{\eta},\theta,\varepsilon)=\sum_{n=0}^{\infty}\varepsilon^{n+1}V_n^{(1)}(\bar{\xi},\bar{\eta},\theta) \tag{19}$$

其中$\bar{\xi}$, $\bar{\eta}$为

$$\bar{\xi}=\frac{1}{\varepsilon}\int_r^1[N(r_1)]^{\frac{1}{2}}dr_1,\qquad \bar{\eta}=r$$

相应地可得

$$V_n^{(1)}=C_n^{(1)}(\bar{\eta},\ \theta)\exp(-\bar{\xi})=C_n^{(1)}(r,\ \theta)\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_r^1 N^{\frac{1}{2}}dr_1\right)$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{20}$$

其中$C_n^{(1)}$满足一阶偏微分方程：

$$2N\frac{\partial C_0^{(1)}}{\partial\bar{\eta}}+\left(\frac{5}{2}N'+\frac{2}{\bar{\eta}}N\right)C_0^{(1)}=0 \tag{21}$$

$$2N\frac{\partial C_n^{(1)}}{\partial\bar{\eta}}+\left(\frac{5}{2}N'+\frac{2}{\bar{\eta}}N\right)C_n^{(1)}=N^{-\frac{1}{2}}\sum_{i=2}^{4}K_i[V_{n+1-i}^{(1)}]\exp\bar{\xi}$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{22}$$

关于$C_0^{(1)}$, $C_n^{(1)}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$的边界条件将在后面提出（参见(28),（31)）.

根据上述，若假设边值问题(2)---(4)的解的渐近展开式为：

$$W(r,\theta,\varepsilon)=W_0(r,\theta)+\sum_{n=1}^{N}\varepsilon^n W_n(r,\theta)+\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+1}V_n^{(b)}$$

$$+\sum_{n=0}^{N}\varepsilon^{n+1}V_n^{(1)}+Z_N \tag{23}$$

则对于余项 Z_n 成立

$$L_\varepsilon[Z_N]=O(\varepsilon^{N+1})\quad(b<r<1,\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi) \tag{24}$$

下面再确定 W_n, $C_n^{(b)}$, $C_n^{(1)}$ 的边界条件使在边界上对于 Z_N 成立：

$$\left.\begin{array}{ll} Z_N|_{r=b}=O(\varepsilon^{N+1}) & Z_N|_{r=1}=O(\varepsilon^{N+1}) \\ \left.\dfrac{\partial Z_N}{\partial r}\right|_{r=b}=O(\varepsilon^{N+1}) & \left.\dfrac{\partial Z_N}{\partial r}\right|_{r=1}=O(\varepsilon^{N+1}) \end{array}\right\} \tag{25}$$

将(23)代入边界条件(3)—(4)，令 ε 的低于 $N+1$ 次幂的系数为零，便得到

$$W_0|_{r=b}=f_0(\theta)\qquad W_0|_{r=1}=f_1(\theta) \tag{26}$$

$$\left.\frac{\partial W_0}{\partial r}\right|_{r=b}-\left.(N^{\frac{1}{2}}C_0^{(b)})\right|_{\eta=b}=g_0(\theta) \tag{27}$$

$$\left.\frac{\partial W_0}{\partial r}\right|_{r=1}+\left.(N^{\frac{1}{2}}C_0^{(1)})\right|_{\bar\eta=1}=g_1(\theta) \tag{28}$$

$$W_n\Big|_{r=b}+C_{n-1}^{(b)}\Big|_{\eta=b}=0,\quad W_n\Big|_{r=1}+C_{n-1}^{(1)}\Big|_{\bar\eta=1}=0$$

$$(n=1,2,\cdots,N) \tag{29}$$

$$\left.\frac{\partial W_n}{\partial r}\right|_{r=b}+\left.\left(-N^{\frac{1}{2}}C_n^{(b)}+\frac{\partial C_{n-1}^{(b)}}{\partial\eta}\right)\right|_{\eta=b}=0\quad(n=1,2,\cdots,N) \tag{30}$$

$$\left.\frac{\partial W_n}{\partial r}\right|_{r=1}+\left.\left(N^{\frac{1}{2}}C_n^{(1)}+\frac{\partial C_{n-1}^{(1)}}{\partial\bar\eta}\right)\right|_{\bar\eta=1}=0\quad(n=1,2,\cdots,N) \tag{31}$$

由此我们便可把 W_n, $C_n^{(b)}$, $C_n^{(1)}$ 依次确定出来：

由(5)，(26)得到(6)．将 W_0 代入(27)，(28)，可分别得到 $C_0^{(b)}|_{\eta=b}$，$C_0^{(1)}|_{\bar\eta=1}$，且由(15)，(21)可分别确定 $C_0^{(b)}$，$C_0^{(1)}$．将 $C_0^{(b)}$，$C_0^{(1)}$ 代入(29)（当 $n=1$ 时），可得到 $W_1|_{r=b}$，$W_1|_{r=1}$，且由(8)（当 $n=1$ 时）可确定 W_1．再将 W_1，$C_0^{(b)}$，$C_0^{(1)}$ 代入(30)，(31)（当 $n=1$ 时），可分别确定 $C_1^{(b)}|_{\eta=b}$，$C_1^{(1)}|_{\bar\eta=1}$，且由(18)，(22)（当 $n=1$ 时）可分别确定 $C_1^{(b)}$，$C_1^{(1)}$．按照这样的方法，由(8)，(29)，(18)，(22)，(30)，(31)便可依次确定 W_n，$C_n^{(b)}$，$C_n^{(1)}$ $(n=2,3,\cdots,N)$．

再由(13)，(16)，(17)，(20)便可确定 $V_n^{(b)}$，$V_n^{(1)}$ $(n=0,1,2,\cdots,N)$．这时(23)中 Z_N 便满足(25)．考虑到(24)，(25)及椭圆型方程的性质[5]便有：

$$[Z_N]_i\equiv\sup\sum_{j=0}^{i}\left|\frac{\partial^i Z_N}{\partial r^{i-j}\partial\theta^j}\right|=O(\varepsilon^{N+1-i})\qquad(i=0,1,2,\cdots,N)$$

如上所述，将关系式(6)中的 W_0 代入(27)，(28)可得：

$$C_0^{(b)}|_{\eta=b}=[N(b)]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{1-b}(f_1(\theta)-f_0(\theta))-g_0(\theta)\right] \tag{32}$$

$$C_0^{(1)}|_{\tilde{\eta}=1}=[N(1)]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{1-b}(f_1(\theta)-f_0(\theta))-g_1(\theta)\right] \tag{33}$$

由(15)，(21)，(32)，(33)可分别求出 $C_0^{(b)}$，$C_0^{(1)}$：

$$C_0^{(b)}(\eta,\ \theta)=b[N(b)]^{\frac{3}{4}}\left[\frac{1}{1-b}(f_1(\theta)-f_0(\theta))-g_0(\theta)\right][N(\eta)]^{-\frac{5}{4}}\eta^{-1}$$

$$C_0^{(1)}(\tilde{\eta},\ \theta)=[N(1)]^{\frac{3}{4}}\left[\frac{1}{1-b}(f_1(\theta)-f_0(\theta))-g_1(\theta)\right][N(\tilde{\eta})]^{-\frac{5}{4}}\tilde{\eta}^{-1}$$

再由(13)，(20)（当$n=0$时）可分别得到$V_0^{(b)}$，$V_0^{(1)}$：

$$V_0^{(b)}(r,\ \theta)=b[N(b)]^{\frac{3}{4}}\left[\frac{1}{1-b}(f_1(\theta)-f_0(\theta))-g_0(\theta)\right][N(r)]^{-\frac{5}{4}}$$

$$\cdot r^{-1}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_b^r[N(r_1)]^{\frac{1}{2}}dr_1\right) \tag{34}$$

$$V_0^{(1)}(r,\ \theta)=[N(1)]^{\frac{3}{4}}\left[\frac{1}{1-b}(f_1(\theta)-f_0(\theta))-g_1(\theta)\right][N(r)]^{-\frac{5}{4}}$$

$$\cdot r^{-1}\exp\left(-\frac{1}{\varepsilon}\int_r^1[N(r_1)]^{\frac{1}{2}}dr_1\right) \tag{35}$$

由(29)（当$n=1$时），(32)，(33)可得到

$$W_1|_{r=b}=-[N(b)]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{1-b}(f_1(\theta)-f_0(\theta))-g_0(\theta)\right] \tag{36}$$

$$W_1|_{r=1}=-[N(1)]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{1-b}(f_1(\theta)-f_0(\theta))-g_1(\theta)\right] \tag{37}$$

再由(8)（当$n=1$时）：

$$F[W_1]\equiv\frac{\partial^2 W_1}{\partial r^2}=0$$

并由条件(36)，(37)得到W_1：

$$\begin{aligned}W_1(r,\ \theta)=&\frac{1}{1-b}\left\{-[N(b)]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{1-b}(f_1(\theta)-f_0(\theta))-g_0(\theta)\right]\right.\\&\left.+b[N(1)]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{1-b}(f_1(\theta)-f_0(\theta))-g_1(\theta)\right]\right\}\\&+\frac{r}{1-b}\left\{[N(b)]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{1-b}(f_1(\theta)-f_0(\theta))-g_0(\theta)\right]\right.\\&\left.-[N(1)]^{-\frac{1}{2}}\left[\frac{1}{1-b}(f_1(\theta)-f_0(\theta))-g_1(\theta)\right]\right\}\end{aligned} \tag{38}$$

我们便得到原问题(2)—(4)解的一阶渐近展开式：

$$W(r,\theta,\varepsilon)=W_0(r,\theta)+\varepsilon[W_1(r,\theta)+V_0^{(b)}(r,\theta)+V_0^{(1)}(r,\theta)]+O(\varepsilon^2) \tag{39}$$

其中 W_0，W_1，$V_0^{(b)}$，$V_0^{(1)}$分别由(6)，(38)，(34)，(35)给出.

最后．我们来考虑一个特殊情形．设环形薄板的侧棱被卡紧．板的中心含有一个半径为b的刚性物．刚性物绕直径旋转而离开平板所在的平面一个小的转角α，如图2所示，并设$N_r=N_0>0$（N_0为常数）．现求板的挠度．

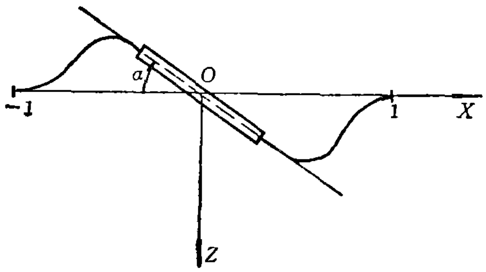

图2 板的变形图

在这种情形下，挠度函数$W(r,\theta,\varepsilon)$满足如下问题：

$$\varepsilon^2\Delta\Delta W-N_0\frac{\partial^2W}{\partial r^2}=0 \tag{2)'$$

$$W|_{r=b}=b\alpha\cos\theta,\qquad W|_{r=1}=0 \tag{3)'$$

$$\left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r=b}=\alpha\cos\theta,\qquad \left.\frac{\partial W}{\partial r}\right|_{r=1}=0 \tag{4)'$$

将$f_0(\theta)=b\alpha\cos\theta$，$f_1(\theta)=0$，$g_0(\theta)=\alpha\cos\theta$，$g_1(\theta)=0$代入(6)，可得$W_0$：

$$W_0(r,\ \theta)=\frac{b\alpha}{1-b}(1-r)\cos\theta \tag{6)'$$

由(34)，(35)可分别得到$V_0^{(b)}$ $V_0^{(1)}$：

$$V_0^{(b)}(r,\theta)=\frac{b(-b\alpha-\alpha+\alpha b)}{(1-b)\sqrt{N_0}\,r}\cos\theta\exp\left(-\frac{\sqrt{N_0}(r-b)}{\varepsilon}\right) \tag{34)'$$

$$V_0^{(1)}(r,\ \theta)=\frac{-b\alpha}{(1-b)\sqrt{N_0}\,r}\cos\theta\exp\left(-\frac{\sqrt{N_0}(1-r)}{\varepsilon}\right) \tag{35)'$$

并由（38）可得$W_1(r,\theta)$：

$$W_1(r,\theta)=\frac{1}{(1-b)\sqrt{N_0}}(b\alpha+\alpha+\alpha r)\cos\theta \tag{38)'$$

将(6)′，(38)′，(34)′，(35)′代入（39）便得到问题(2)′—(4)′解的一阶渐近展开式：

$$W(r,\theta,\varepsilon)=\frac{b\alpha}{1-b}(1-r)\cos\theta+\frac{\varepsilon\cos\theta}{(1-b)\sqrt{N_0}}\Bigg[(b\alpha+\alpha+\alpha r)+\frac{b(-b\alpha-\alpha+\alpha b)}{r}\exp\left(-\frac{\sqrt{N_0}(r-b)}{\varepsilon}\right)+\frac{b\alpha}{r}\exp\left(-\frac{\sqrt{N_0}(1-r)}{\varepsilon}\right)\Bigg]+O(\varepsilon^2)$$

参考文献

1. Alzheimer, W. E. and Davis, R. T., Unsymmetrical bending of prestressed annular plates, *J. Eng. Mech. Div. Proc. ASCE*, 4 (1968). 905—917.
2. Nayfeh, A. H., *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons New York, London Sydney, Toronto, (1973).
3. 江福汝，摄动方法在薄板弯曲问题中的某些应用，应用数学和力学，1，1，(1980)，37—53.
4. Timoshenko, S. and Woinowsky-Krieger, S. *Theory of Plates and Shells*, 2nd ed., McGraw-Hill, New York, (1959)
5. Besjes, J. G., Singular perturbation problems for linear elliptic differential operators of arbitrary order, *J. Math. and Appl.*, 49, (1975), 24-46.

Perturbation Method for Thin Plate Bending Problems

Mo Jia-ji　　　　Shi Bing-guo

(Anhui Teachers' University, Wuhu, Anhui)

Abstract

In this paper, problems of bending of a thin plate under the action of in-plane forces are studied by using the method of multiple scales.