应用数学和力学，第2卷第5期（1981年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

Maxwell 方程的一类解*

熊锡金

（吉林通化师院，1980年12月收到）

摘　要

本文导出了 Maxwell 方程的一类含有任意泛复变解析函数的解 并简略地分析 了它们的物理意义，得到了比经典电磁理论更为广泛的一些性质：

1. 电磁场可有任意的形状：可以非周期性地传播 一般可有全息性质.
2. 电磁场的传播速度可以小于、等于或大于光速.
3. 电磁场传播线可以是任意的曲线.
4. 存在着共生的分蘖电磁场. 可能存在着共生世界.

对上述导出的奇异电磁场存在的实例，本文也作了推测及描述. 大多涉及到现今各种物理模型难以解释的一些现象.

一、解的表达式

描述电磁场运动的 Maxwell 方程组，通常都用分离变量的方法，求得它们周期形式的解. 一般电磁场就利用傅里叶方法展开成单色波加以分析[1][2]. 近来也有人利用超复数将其简化[3]. 本文从另一个角度，利用超复数给出一种具有任意泛复解析函数[4]的真空中 Maxwell 方程的解.

众所周知，用 $\mathbf{A}(A^1, A^2, A^3)$ 表示电磁场的矢势，c 表示光速，真空中电磁场可由 Maxwell方程等价的电磁势方程组(1.1)和洛伦兹条件(1.2)来描述：

$$A^{\mu}_{xx}+A^{\mu}_{yy}+A^{\mu}_{zz}-\frac{1}{c^2}A^{\mu}_{tt}=0 \tag{1.1}$$

$$(\mu=1,\ 2,\ 3)$$

$$A^1_x+A^2_y+A^3_z=0 \tag{1.2}$$

代数方程(1.3)是(1.1)的特征方程：

$$e_1^2+e_2^2+e_3^2-\frac{1}{c^2}e_4^2=0 \tag{1.3}$$

对于广域变量 $\eta=xe_1+ye_2+ze_3+te_4$，其中 e_i 是任意广域 $S(e)$ 中的元素，且满足

* 钱伟长推荐.

(1.3) 我们给出如下的结果：

定理1 若 $f(\eta)$、$g(\eta)$和 $h(\eta)$ 是 η 的任意泛复变解析函数，且满足：

$$f(\eta)e_1+g(\eta)e_2+h(\eta)e_3=0$$

则
$$A^1=f(\eta), \qquad A^2=g(\eta), \qquad A^3=h(\eta) \tag{1.4}$$

① 它们是(1.1)、(1.2)的广域解；

② 它们各实分蘖是(1.1)、(1.2)的实解.

证明 ① 将(1.4)代入(1.1)、(1.2)直接计算即得.

②，将(1.4)在实域上分解成几个分蘖：

$$A^1=\sum_{\nu=1}^{n} f^\nu\omega_\nu, \quad A^2=\sum_{\nu=1}^{n} g^\nu\omega_\nu, \quad A^3=\sum_{\nu=1}^{n} h^\nu\omega_\nu \tag{1.5}$$

其中 ω_ν 是广域 $S(e)$ 的基．因 A^1，A^2，A^3 满足(1.1)、(1.2)将(1.5)代入，则得：

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(f^\nu_{xx}+f^\nu_{yy}+f^\nu_{zz}-\frac{1}{c^2}f^\nu_{tt}\right)\omega_\nu=0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(g^\nu_{xx}+g^\nu_{yy}+g^\nu_{zz}-\frac{1}{c^2}g^\nu_{tt}\right)\omega_\nu=0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}\left(h^\nu_{xx}+h^\nu_{yy}+h^\nu_{zz}-\frac{1}{c^2}h^\nu_{tt}\right)\omega_\nu=0$$

$$\sum_{\nu=1}^{n}(f^\nu_x+g^\nu_y+h^\nu_z)\omega_\nu=0$$

由于基 ω_ν 的实域线性无关性，则得 f^ν，g^ν，$h^\nu(\nu=1, 2, \cdots n)$ 满足(1.1)、(1.2)．定理得证.

另外，对于一般电磁运动中，推迟势以外的原有电磁场所满足的齐次波动方程(1.6)和洛伦兹条件(1.7)，其矢势为 $\mathbf{A}(A^1, A^2, A^3)$以及标势$\varphi$，则有：

$$A^\mu_{xx}+A^\mu_{yy}+A^\mu_{zz}-\frac{1}{c^2}A^\mu_{tt}=0 \qquad (\mu=1, 2, 3)$$

$$\varphi_{xx}+\varphi_{yy}+\varphi_{zz}-\frac{1}{c^2}\varphi_{tt}=0 \tag{1.6}$$

$$A^1_x+A^2_y+A^3_z+\frac{1}{c}\varphi_t=0 \tag{1.7}$$

同样可得：

定理2 若$f(\eta)$、$g(\eta)$、$h(\eta)$和 $\varphi(\eta)$是 η 的任意泛复解析函数，且满足：

$$f(\eta)e_1+g(\eta)e_2+h(\eta)e_3+\varphi(\eta)e_4=0$$

则
$$A^1=f(\eta), \qquad A^2=g(\eta), \qquad A^3=h(\eta), \qquad \varphi=\varphi(\eta) \tag{1.8}$$

① 它们是(1.6)，(1.7)的广域解；

② 它们的各实分蘖是(1.6)、(1.7)的实解.

证明方法同定理 1.

上面两定理中广域变量 η 起着重要作用，我们把它叫做解的生成元，或电磁场的生成元．函数 $f(\eta)$、$g(\eta)$、$h(\eta)$、$\varphi(\eta)$则叫做电磁场的生成函数.

对于一般符合条件(1.3)的广域是无限维的．它有 $(n+1)^2$个 n 阶整基 $e_1^\kappa e_2^\lambda e_3^\mu e_4^\nu$ $(\kappa+\lambda+\mu+\nu=n)$．因而其它有限维广域只能是它特殊地满足另外条件的情况．下面观察几个具体的例子：

例 1 取特征方程（1.3）实域中的一组解：

$$e_1=1,\qquad e_2=2,\qquad e_3=-3,\qquad e_4=-\sqrt{14}c$$

这时生成元为实的：$\eta=x+2y-3z-\sqrt{14}ct$.

我们任取两个可微函数 $f(\eta)=\eta^2$，$g(\eta)=\eta^3$

因而有
$$A^1=\eta^2,\qquad A^2=\eta^3,\qquad A^3=\frac{1}{3}(\eta^2+2\eta^3).$$

由关系式
$$\mathbf{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t},\qquad \mathbf{B}=\nabla\times\mathbf{A}$$

可得电磁场的电场强度 $\mathbf{E}(E^1, E^2, E^3)$和磁感应强度 $\mathbf{B}(B^1, B^2, B^3)$各分量为：

$$E^1=2\sqrt{14}\eta,\qquad E^2=3\sqrt{14}\eta^2,\qquad E^3=\frac{\sqrt{14}}{3}(2\eta+6\eta^2)$$

$$B^1=\frac{4}{3}\eta+13\eta^2,\qquad B^2=-\frac{20}{3}\eta-2\eta^2,\qquad B^3=-4\eta+3\eta^2$$

(其中 $\eta=x+2y-3z-\sqrt{14}ct$)

例 2 取(1.3)式在复域中的解：

$$e_1=1,\qquad e_2=2,\qquad e_3=2i,\qquad e_4=c.$$

则生成元为复域变量 $\eta=x+2y+2zi+ct$.

并令生成函数为 $f(\eta)=\sin\eta$，$g(\eta)=\cos\eta$．因此有

$$A^1=\sin\eta=\mathrm{ch}2z\sin(x+2y+ct)+i\,\mathrm{sh}2z\cos(x+2y+ct)$$
$$A^2=\cos\eta=\mathrm{ch}2z\cos(x+2y+ct)-i\,\mathrm{sh}2z\sin(x+2y+ct)$$
$$A^3=-\frac{1}{2i}(\sin\eta+2\cos\eta)$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{sh}2z[\sin(x+2y+ct)-\cos(x+2y+ct)]$$
$$+\frac{i}{2}\mathrm{ch}2z[\sin(x+2y+ct)+\cos(x+2y+ct)]$$

从而
$$E^1=-\mathrm{ch}2z\cos(x+2y+ct)+i\,\mathrm{sh}2z\sin(x+2y+ct)$$
$$E^2=\mathrm{ch}2z\sin(x+2y+ct)+i\,\mathrm{sh}2z\cos(x+2y+ct)$$

等，它们每个分量的实部或虚部都构成一组 Maxwell 方程的解.

例 3 取(1.3)式在四维椭圆双曲数[4]（和这种数同构的数及其函数理论已有深入的研究[5][6].）中的元素：

$e_1=i \qquad e_2=\sqrt{3}\,j \qquad e_3=ij \qquad e_4=-c$

这种数实域上基为 1，i，j，ij 乘法表如下：

	1	i	j	ij
1	1	i	j	ij
i	i	-1	ij	$-j$
j	j	ij	1	i
ij	ij	$-j$	i	-1

生成元为$\eta=xi+\sqrt{3}\,jy+zij-ct$.

令生成函数为：

$$f(\eta)=\exp\eta,\ g(\eta)=a\ (\text{常数})$$

由基的运算规律，可将泛复函数展成四个分蘖，于是得

$$\begin{aligned}A^1=\exp\eta=e^{-ct}&(\cos x\,\mathrm{ch}\sqrt{3}\,y\cos z-\sin x\,\mathrm{sh}\sqrt{3}\,y\sin z)\\&+ie^{-ct}(\cos x\,\mathrm{sh}\sqrt{3}\,y\sin z+\sin x\,\mathrm{ch}\sqrt{3}\,y\cos z)\\&+je^{-ct}(\cos x\,\mathrm{sh}\sqrt{3}\,y\cos z-\sin x\,\mathrm{ch}\sqrt{3}\,y\sin z)\\&+ije^{-ct}(\cos x\,\mathrm{ch}\sqrt{3}\,y\sin z+\sin x\,\mathrm{sh}\sqrt{3}\,y\cos z)\end{aligned}$$

$$A^2=a=a_1+a_2i+a_3j+a_4ij$$

$$A^3=-j\exp\eta+\sqrt{3}\,ia=\cdots\cdots\quad \text{等}.$$

所以
$$E^1=-\frac{1}{c}\frac{\partial A^1}{\partial t}=\exp\eta,\qquad E^2=-\frac{1}{c}\frac{\partial A^2}{\partial t}=0\qquad\text{等}$$

每个E^μ和B^μ($\mu=1,2,3$)均有四个分蘖．每组对应分蘖均满足 Maxwell 方程组

二、物理意义简析

由 Maxwell 方程组上述形式的解所描述的电磁场，我们简略地分析其物理意义，结果与经典的电磁理论相比较，有许多不同之处．因现未经物理实验证明，只好作推论叙述．以期引起百家的争鸣和导致实验．因水平和条件限制，定有许多不当之处，敬请指正．

1．电磁场可以是各种形状的，一般可有全息性质．可以是非周期性地向空间传播、扩散的，即它的强度不一定在某一特殊方向上起周期性变化．

事实上，经典电磁波只是生成元取实数，生成函数取某特殊周期函数F的一种特例：设电磁波传播方向上单位矢量为 $\mathbf{n}(n^1,n^2,n^3)$，我们取(1.3)的实解：

$$e_1=\frac{\omega}{c}n^1,\qquad e_2=\frac{\omega}{c}n^2,\qquad e_3=\frac{\omega}{c}n^3,\qquad e_4=-\omega \tag{2.1}$$

电磁场生成元为

$$\eta=\frac{\omega}{c}n^1x+\frac{\omega}{c}n^2y+\frac{\omega}{c}n^3z-\omega t=\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r}-\omega t$$

生成函数取

$$A^1=\alpha\cos\eta-\beta\sin\eta$$

$$A^2=\gamma\cos\eta-\delta\sin\eta$$

$$A^3=-\frac{1}{n^3}[n^1(\alpha\cos\eta-\beta\sin\eta)+n^2(\gamma\cos\eta-\delta\sin\eta)]$$

($\alpha,\beta,\gamma,\delta$ 为实常数)

这即是真空中经典形式的一般电磁波[2]

$$A=Re\{\mathbf{A}_0e^{-i(\omega t-\frac{\omega}{c}\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})}\}=Re\{\mathbf{A}_0e^{i\eta}\}$$

而我们现在导出的解除上述特解外，生成函数可以包含任意形式的泛复变解析函数，如

生成函数可取非周期函数，更为不同的是这些解的生成元所在的广域不一定要求实域．因此电磁场的形式，可以是极为广泛多样的．当边、初值连续时，一般可有全息性质．

2．电磁场的传播，当其解的生成元为实域变量时，存在着实的确定的传播方向，在这个方向它的速度才是光速 c，其它方向将小于 c．

对于确定的电磁势 $\mathbf{A}_0\,(A_0^1, A_0^2, A_0^3)$ 当时间和地点变化时，它在坐标为 x，y，z，ct 的四维空间构成的图形是一类四维曲面：

$$A_0^\mu=F^\mu(xe_1+ye_2+ze_3+te_4)\qquad(\mu=1,2,3)$$

这种曲面在 $t=t_0$ 的截面是三维的等势面：

$$A_0^\mu=F^\mu(xe_1+ye_2+ze_3+t_0e_4)\qquad(\mu=1,2,3)$$

我们把这种等势面的法线方向叫做电磁场的传播方向，按经典的说法，把它叫做"光线"方向．（这样规定的光线在生成元为实数时和用 E 与 B 规定是统一的　但当生成元非实域时即有区别）光线的方程为：

$$\frac{x-x_0}{F_x^\mu}=\frac{y-y_0}{F_y^\mu}=\frac{z-z_0}{F_z^\mu}=\frac{ct-ct_0}{F_{ct}^\mu}\qquad(\mu=1,2,3)\tag{2.2}$$

即

$$\frac{x-x_0}{e_1}=\frac{y-y_0}{e_2}=\frac{z-z_0}{e_3}=\frac{c^2t-c^2t_0}{e_4}\tag{2.3}$$

沿光线方向传播的速度简称光线速度，它在各坐标 x，y，z 上的分量称为相速度．由 (2.3) 相速度为：

$$x_t=\frac{e_1}{e_4}c^2,\quad y_t=\frac{e_2}{e_4}c^2,\quad z_t=\frac{e_3}{e_4}c^2$$

光线速度：

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})_t=\sqrt{x_t^2+y_t^2+z_t^2}=c$$

例如生成元为实数的电磁场，生成元为

$$\eta=x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma+ct,\qquad 其中\ \cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

当 $\mathbf{A}$ 确定，即 $\mathbf{A}=\mathbf{A}_0$ 确定时，如例 1 中的电磁场其等势面是一种三次曲面．它的传播方向，即光线是

$$\frac{x-x_0}{\cos\alpha}=\frac{y-y_0}{\cos\beta}=\frac{z-z_0}{\cos\gamma}=ct-ct_0$$

也就是

$$\frac{x-x_0}{-1/\sqrt{14}}=\frac{y-y_0}{-2/\sqrt{14}}=\frac{z-z_0}{3/\sqrt{14}}=ct-ct_0$$

其各相速度都小于光速：

$$x_t=-\frac{1}{\sqrt{14}}c,\quad y_t=-\frac{2}{\sqrt{14}}c,\quad z_t=\frac{3}{\sqrt{14}}c$$

但光线速度仍为 c．

3．电磁场的传播速度可以超过光速；也可以随时间和地点变化的；同一时间和地点各分量的传播速度可以有区别．在现实世界中，电磁场并不一定存在着一个固定速度为 c 的直线传播方向，即"光线"可以是各式各样的曲线．这些从下面结果的分析即可看出．

当电磁场的生成元不在实域时（请注意它生成的电磁场仍是实的）当然也是在非经典解时，各方向的速度出现了异常，如，

例 2 中：$x_t=c$，$y_t=2c$，$z_t=2ic$

例 3 中：$x_t=-ic$、$y_t=-\sqrt{3}\,jc$、$z_t=-ijc$

这些速度的物理意义是什么呢？首先看到非实生成元形成的电磁场传播速度可以大于或等于光速．其次我们来研究一些非实的速度：

如观察例 2 中实部形成的电磁势$\mathbf{A}(A^1, A^2, A^3)$，有着不同的“光线”，利用（2.2）简化可得：

A^1: $$x-x_0=\frac{1}{2}(y-y_0)=\frac{z-z_0}{2\mathrm{th}2z_0\mathrm{tg}(x_0+2y_0+ct_0)}=ct-ct_0$$

A^2: $$x-x_0=\frac{1}{2}(y-y_0)=\frac{z-z_0}{2\mathrm{th}2z_0\mathrm{ctg}(x_0+2y_0+ct_0)}=ct-ct_0$$

它们有着不同的各相速度和光线速度：

$$x_t{}^1=x_t{}^2=c \qquad y_t{}^1=y_t{}^2=2c$$

但 $$z_t{}^1=2c\mathrm{th}2z_0\mathrm{tg}(x_0+2y_0+ct_0),\quad z_t^2=2c\mathrm{th}2z_0\mathrm{ctg}(x_0+2y_0+ct_0)$$

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})_t{}^1=c\sqrt{5+4\mathrm{th}^2 2z_0\mathrm{tg}^2(x_0+2y_0+ct_0)}>c$$

$$(\mathbf{n}\cdot\mathbf{r})_t{}^2=c\sqrt{5+4\mathrm{th}^2 2z_0\mathrm{ctg}^2(x_0+2y_0+ct_0)}>c$$

可知它们有的是随时间地点变化的．

对例 3 也可有类似的分析．从分析可知，当电磁场的生成元非实域时，电磁场不一定存在一个统一确定的传播方向，由于解包含有任意的泛复解析函数，与等势面正交的曲线族，即经典场论中的光线也就可以是任意曲线了．

4． 存在着共生的分蘖电磁场，其物理机制尚需探索．也许是在不同的共生空间中的一种联系．

如例 2 有两个共生分蘖，例 3 有四个共生分蘖．如果说这些电磁场有一个不变的“直线”的传播方向，那么例 2 的电磁场传播方向是在复空间中即两个共生的实空间中确定的方向：

$$x-x_0=\frac{y-y_0}{2}=\frac{z-z_0}{2i}=ct-ct_0$$

例 3 中电磁场传播的方向是在椭圆双曲空间中即在四个共生的实空间中所确定的一条“直线”：

$$\frac{x-x_0}{i}=\frac{y-y_0}{\sqrt{3}\,j}=\frac{z-z_0}{ij}=\frac{ct-ct_0}{-1}$$

这些共生的空间是不是存在的实体呢？这些“共生世界”的探索确是很迷人的．

三、结　　语

上述推论只是一些逻辑结果，现在尚未有精确的实验验证，但我想这类实验是可以进行的．而现在物理中的一些新现象，如非视觉器官的图象识别[7]；经络与气功的奇迹[8]；百慕

大三角区的奥秘以及飞碟（U F. O）等现象可能都和这些异常的电磁场有关系 因此探索这些电磁场的性质是一项很有趣味、很有价值的工作.

特别应该引起重视的，是李政道先生等的一个杰出的思想：某些单子可能是基本粒子[9]-[11]. 事实上，我们上面讨论的有的就是一些电磁单子. 因此这里也许可能为揭示基本粒子的奥秘找到一条途径.

本文得到钱伟长、朱静航、齐民友、吴学谋、李疏昌、肖荫庵等老师的帮助和指导，特此深表感谢.

参 考 文 献

1. 曹昌琪，《电动力学》，人民教育出版社，33—36.
2. 朗道等，任朗、袁炳南译《场论》，127—133.
3. Deavours. C. A., *Amer. Math. Mon.*, 80(1973). 995—1008.
4. 熊锡金，武汉大学学报，1 (1980)，26—39.
5. Minda. C. D., *Trans. Amer Math. Soc* 195. (1974)
6. 朱静航，吉林师大学报，1 (1963)，1—8.
7. 《自然杂志》记者，自然杂志，9 (1979)，575.
8. 顾涵森，赵伟，自然杂志，5(1979),271.
9. 李政道等，*Phys Rev.* D13 (1976)，2739.
10. 李政道，*Phys Reports*, 23c, 3(1976)254.
11. Rajaraman. R., *Phys. Reports*, 21c, 5(1975)，229—312.

Some Solutions of Maxwell Equations

Xiong Xi-jin

(The Tonghua Normal College, Jilin)

Abstract

This article obtains a kind of Maxwell equations which implies the solution arbitrary holomorphic hypercomplex functionals and also briefly analyses their physical meaning. It obtains some wider nature than classical electromagnetic theory:

(1) An electromagnetic field may spread non-periodically and may have the holographic nature and free shape.

(2) The electromagnetic field may spread more slowly equally or quickly than light speed.

(3) The electromagnetic field may spread in arbitrary curve direction.

(4) There is a branch electromagnetic field intergrowth space An intergrowth world may exist.

This article also makes an inference and a description about the example of the above-mentioned strange electromagnetic field It relates to some hard-to-explain phenomena through different physical models nowadays.