应用数学和力学，第2卷第5期（1981年10月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

高阶椭圆型方程第一边值问题的奇摄动(II)*

郑永树

（福州福建师范大学数学系，1981年1月31日收到）

摘　要

本文研究含双参数的高阶椭圆型方程第一边值问题的奇摄动，得到包含两个形式参数的渐近解表达式，并对余项进行估计，拓广了文[2]、[3]的结果.

一、引　　言

在文[1]中，我们引用两个小参数研究了方程和区域边界双摄动的高阶椭圆型方程第一边值问题的奇摄动，即对$2(m+l)$阶线性椭圆型方程的第一边值问题$A_{\varepsilon,\mu}$

$$L_\varepsilon w_{\varepsilon,\mu}\equiv\varepsilon^{2l}L_{2l}w_{\varepsilon,\mu}+L_0w_{\varepsilon,\mu}=f(x).\quad x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega_\mu \tag{1.1}$$

$$\left.\frac{\partial^s w_{\varepsilon,\mu}}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega_\mu}=\psi_s,\quad (s=0,1,\cdots,m+l-1) \tag{1.2}$$

（式中ε，μ为正的小参数，L_0、L_{2l}分别为不含参数的$2m$和$2(m+l)$阶线性强椭圆型算子，Ω_μ为依赖于小参数μ的摄动边界$\partial\Omega_\mu$所围成的有界区域，n表示区域边界的内法线向量.）构造了含双参数的渐近解，并给出余项的估计．当区域的边界不摄动的情况，М．И．Вишик和Л．А．Люстерник[2],[3]关于方程：

$$L_\varepsilon w_\varepsilon\equiv\sum_{r=1}^{2l}\varepsilon^r L_r w_\varepsilon+L_0w_\varepsilon=f(x),x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega \tag{1.3}$$

（式中L_r，$r=1,2,\cdots,2l-1$为不高于$2m+r$阶的线性偏微分算子，Ω为n维有界区域.）的第一边值问题，建立了严格的奇摄动理论．尔后，J. G. Besjes[4]改进了余项估计，建立了按最大模的估计.

为了进一步探讨方程(1.3)的第一边值问题奇摄动的一些性质，我们将在(1.3)的含小参数的最高阶项算子L_{2l}和低阶项算子$L_r(r=1,2,\cdots,2l-1)$分别引用两个不同形式相互依赖的小参数，讨论区域边界不摄动，而方程含双参数的第一边值问题的奇摄动．即考虑问题$A_{\varepsilon,\mu}$:

---

* 林宗池推荐.

$$L_{\varepsilon,\mu}w_{\varepsilon,\mu}\equiv\varepsilon^{2l}L_{2l}w_{\varepsilon,\mu}+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r L_r w_{\varepsilon,\mu}+L_0 w_{\varepsilon,\mu}=f(x)$$

$$x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega \qquad (1.4)$$

$$\left.\frac{\partial^s w_{\varepsilon,\mu}}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega}=0,\ (s=0,1,\cdots,m+l-1) \qquad (1.5)$$

的奇摄动．其中ε、μ为相互依赖的正小参数，$0<\varepsilon\ll1$，$0<\mu\ll1$；Ω表示n维欧氏空间R^n中的有界区域，$\partial\Omega$表示Ω的边界，并假设$\partial\Omega$是足够光滑的；n表示$\partial\Omega$的内法线向量；L_0 表示$2m$阶线性强椭圆型算子：

$$L_0w\equiv\sum_{|\beta|\leqslant 2m}C_\beta(x)D^\beta w\equiv\sum_{k=0}^{2m}\sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=k}C_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)D_{x_1}^{\beta_1}\cdots D_{x_n}^{\beta_n}w \qquad (1.6)$$

式中

$$(-1)^m\sum_{|\beta|=2m}C_\beta(x)\xi^\beta\geqslant\alpha_0|\xi|^{2m} \qquad (1.7)$$

L_{2l} 表示 $2(m+l)$ 阶线性强椭圆型算子：

$$L_{2l}w\equiv\sum_{|\beta|\leqslant 2(m+l)}a_\beta(x)D^\beta w\equiv\sum_{k=0}^{2(m+l)}\sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=k}a_{\beta_1\cdots\beta_n}(x)D_{x_1}^{\beta_1}\cdots D_{x_n}^{\beta_n}w \qquad (1.8)$$

式中

$$(-1)^{m+l}\sum_{|\beta|=2(m+l)}a_\beta(x)\xi^\beta\geqslant\alpha_1|\xi|^{2(m+l)} \qquad (1.9)$$

其中 α_0,α_1 是正的常数；L_r 表示不高于 $2m+r$ 阶线性偏微分算子：

$$L_rw\equiv\sum_{|\beta|\leqslant 2m+r}b_{r,\beta}(x)D^\beta w\equiv\sum_{k=0}^{2m+r}\sum_{\beta_1+\cdots+\beta_n=k}b_{r,\beta_1\cdots\beta_n}(x)D_{x_1}^{\beta_1}\cdots D_{x_n}^{\beta_n}w$$

$$(r=1,2,\cdots,2l-1) \qquad (1.10)$$

上述其余记号与[1]中的相同．

当 $\varepsilon=0$，$\mu=0$ 时，摄动问题 $A_{\varepsilon,\mu}$ 退化为非摄动（退化）问题 A_0：

$$L_0w_{0,0}=f(x),\quad x=(x_1,\cdots x_n)\in\Omega \qquad (1.11)$$

$$\left.\frac{\partial^s w_{0,0}}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega}=0,\quad (s=0,1,\cdots,m-1) \qquad (1.12)$$

在文[4]中，研究的摄动问题是不含参数 μ 的情况，而在文[2]、[3]中，研究 $\varepsilon=\mu$ 的情况．本文则讨论 $\mu/\varepsilon\to0(\varepsilon\to0)$ 的情况．

二、形 式 渐 近 解

我们援用 Люстерник-Вишик 方法构作摄动问题的形式渐近解．鉴于摄动问题包含两个形式参数．因此所构作问题 $A_{\varepsilon,\mu}$ 的渐近解为如下形式：

$$w_{\varepsilon,\mu}(x)=w_{\varepsilon,\mu}^N(x)+\varepsilon^m v_{\varepsilon,\mu}^{N1}(t,\varphi)+Z_N(x,\varepsilon,\mu) \qquad (2.1)$$

式中

$$w_{\varepsilon,\mu}^{N}(x)=\sum_{p=0}^{N}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^{j}w_{p-j,j}(x) \tag{2.2}$$

$$\nu_{\varepsilon,\mu}^{N_1}(t,\varphi)=\sum_{p=0}^{N_1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^{j}\nu_{p-j,j}(t,\varphi) \tag{2.3}$$

$(t=\rho/\varepsilon,(\rho,\varphi)$为下面将引入的局部坐标)

并由迭代法依次求出(2.2)—(2.3)式中的各个函数．其中 $w_{\varepsilon,\mu}^{N}(x)$由方程(1.4)的算子$L_{\varepsilon,\mu}$确定、 $\nu_{\varepsilon,\mu}^{N_2}(t,\varphi)$将由下面关于算子 $L_{\varepsilon,\mu}$ 的分解算子确定．$Z_N(x,\varepsilon,\mu)$是误差项．为此，将求解过程分为以下两步．

（一） 第一迭代过程

在摄动问题 $A_{\varepsilon,\mu}$ 的解的渐近表示式(2.1)中， $w_{\varepsilon,\mu}^{N}(x)$ 是作为在整个区域 Ω 上求解．把(2.2)式右边代入方程(1.4)并比较关于 μ/ε 和 ε 的同次幂的系数，得到关于求 $w_{p-j,j}(x)$ $(j=0,1,\cdots,p;\ p=0,1,\cdots,N)$ 的递推方程：

$$L_0w_{0,0}=f(x) \tag{2.4}$$

$$L_0w_{p-j,j}=-\sum_{r=1}^{2l-1}L_rw_{p-j-r,\,j-r}-L_{2l}w_{p-j,\,j-2l} \tag{2.5}$$

$$(j=0,1,\cdots,p;\ p=1,2,\cdots,N)$$

在(2.5)式及以后的计算中．都将负下标的量取作零．

（二） 第二迭代过程

在退化边值问题 A_0唯一可解的情况下，由于(2.4)，(2.5)是 $2m$ 阶线性椭圆型方程，所求得的解由 m 个边值条件完全确定了．一般地不满足 $w_{\varepsilon,\mu}(x)$ 的全部 $(m+l)$ 个边值条件(1.5)．为此，在边界 $\partial\Omega$ 的邻域，利用构作边界层函数来补足所失去的部分边值条件．

为了构作边界层函数，需要对微分算子 $L_{\varepsilon,\mu}$ 进行分解，假定算子 $L_{\varepsilon,\mu}$ 的系数都是足够光滑的．在边界 $\partial\Omega$ 的邻域建立局部坐标系：$(\rho,\varphi)=(\rho,\varphi_1,\cdots,\varphi_{n-1})$，其定义见[1]．在局部座标系$(\rho,\varphi)$下，算子 $L_{\varepsilon,\mu}$具有形式：

$$\begin{aligned}L_{\varepsilon,\mu}\equiv\varepsilon^{2l}\Big[&a_{2(m+l)}(\rho,\varphi)D_\rho^{2(m+l)}+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\le 2(m+l)\\ \beta_1\ne 2(m+l)}}a_{\beta_1\cdots\beta_n}(\rho,\varphi)D_\rho^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Big]\\
&+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r\Big[b_{2m+r}(\rho,\varphi)D_\rho^{2m+r}+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\le 2m+r\\ \beta_1\ne 2(m+r)}}b_{r,\beta_1\cdots\beta_n}(\rho,\varphi)D_\rho^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Big]\\
&+\Big[c_{2m}(\rho,\varphi)D_\rho^{2m}+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\le 2m\\ \beta_1\ne 2m}}c_{\beta_1\cdots\beta_n}(\rho,\varphi)D_\rho^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Big]\end{aligned} \tag{2.6}$$

在 $\partial\Omega$ 的 η 邻域再引进变量 t，令

$$t=\frac{\rho}{\varepsilon} \tag{2.7}$$

则

$$D^s_\rho=\varepsilon^{-s}D^s_t \tag{2.8}$$

那么又得

$$\begin{aligned}L_{\varepsilon,\mu}\equiv \varepsilon^{-2m}\Bigg\{&\Bigg[a_{2(m+l)}(\varepsilon t,\varphi)D_t^{2(m+l)}\\&+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\leqslant 2(m+l)\\ \beta_1\neq 2(m+l)}}\varepsilon^{2(m+l)-\beta_1}a_{\beta_1\cdots\beta_n}(\varepsilon t,\varphi)D_t^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Bigg]\\&+\sum_{r=1}^{2l-1}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\Bigg[b_{2m+r}(\varepsilon t,\varphi)D_t^{2m+r}\\&+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\leqslant 2m+r\\ \beta_1\neq 2m+r}}\varepsilon^{2m+r-\beta_1}b_{r,\beta_1\cdots\beta_n}(\varepsilon t,\varphi)D_t^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Bigg]\\&+\Bigg[c_{2m}(\varepsilon t,\varphi)D_t^{2m}+\sum_{\substack{\beta_1+\cdots+\beta_n\leqslant 2m\\ \beta_1\neq 2m}}\varepsilon^{2m-\beta_1}c_{\beta_1\cdots\beta_n}(\varepsilon t,\varphi)D_t^{\beta_1}D_{\varphi_1}^{\beta_2}\cdots D_{\varphi_{n-1}}^{\beta_n}\Bigg]\Bigg\}\end{aligned} \tag{2.9}$$

式中 $a_{2(m+l)}=a_{2(m+l),0\cdots0}$； $b_{2m+r}=b_{r,2m+r,0\cdots0}$； $c_{2m}=c_{2m,0\cdots0}$.

(2.9)式中的每一个系数在 $\rho=0$ 的附近作 Taylor 展开，得到

$$\begin{aligned}a_{2(m+l)}(\varepsilon t,\varphi)=a_{2(m+l)}(\varphi)+\sum_{j=1}^{n}(\varepsilon t)^j a_{2(m+l),j}(\varphi)\\+(\varepsilon t)^{n+1}a_{2(m+l),n+1}(\theta\varepsilon t,\varphi)\qquad(0<\theta<1)\end{aligned} \tag{2.10}$$

式中

$$a_{2(m+l)}(\varphi)=a_{2(m+l)}(\rho,\varphi)|_{\rho=0}$$

$$a_{2(m+l),j}(\varphi)=\frac{1}{j!}D^j_\rho a_{2(m+l)}(\rho,\varphi)|_{\rho=0},\qquad(j=1,2,\cdots,n)$$

$$a_{2(m+l),n+1}(\theta\varepsilon t,\varphi)=\frac{1}{(n+1)!}D^{n+1}_\rho a_{2(m+l)}(\rho,\varphi)|_{\rho=\theta\varepsilon t}$$

其余系数均有类似的展开式，并在(2.9)式中各个系数用其展开式替换，则得

$$L_{\varepsilon,\mu}\equiv\varepsilon^{-2m}\left[M_0+\sum_{k=1}^{n+1}\varepsilon^k M_k+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k M_{r,k}\right] \tag{2.11}$$

其中

$$M_0\equiv a_{2(m+l)}(\varphi)D_t^{2(m+l)}+c_{2m}(\varphi)D_t^{2m} \tag{2.12}$$

是关于t的$2(m+l)$阶的常系数常微分算子．而$M_k(k=1,2,\cdots,n)$，$M_{r,k}(r=1,2,\cdots,2l-1;$

$k=0,1,\cdots,n$)均为关于t的不高于$2(m+l)$阶的变系数常微分算子，其系数为关于t 的多项式，次数不超过 $j(j\leqslant n)$； 又 M_{n+1}，$M_{r,n+1}$ $(r=1,2,\cdots,2l-1)$ 也为类似的变系数常微分算子，但其系数是关于t 的光滑函数．

由于经过以上变换，算子L_0 和 L_{2l} 的强椭圆性不变，因此

$$(-1)^{m+l}a_{2(m+l)}(\varphi)>0 \tag{2.13}$$

$$(-1)^{m}c_{2m}(\varphi)>0 \tag{2.14}$$

并由条件(2.13)，(2.14)知道，常微分算子 M_0 的特征方程：

$$c_\varphi(\lambda)\equiv a_{2(m+l)}(\varphi)\lambda^{2(m+l)}+c_{2m}(\varphi)\lambda^{2m}=0 \tag{2.15}$$

存在l个负实部的根．(参见[4])

这样一来，边界 $\partial\Omega$ 邻域的边界层函数，可由求解齐次方程：

$$\left[M_0+\sum_{k=1}^{n+1}\varepsilon^k M_k+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{n+1}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k M_{r,k}\right]\nu^{N_1}_{\varepsilon,\mu}(t,\varphi)=0 \tag{2.16}$$

的解得到．这里 $\nu^{N_1}_{\varepsilon,\mu}(t,\varphi)$为式(2.3)的函数，并以式(2.3)的右边代入(2.16)式，比较μ/ε和ε的同次幂的系数，取$n=N_1=N+m+l-1$，得到关于求边界层函数的递推方程：

$$M_0\nu_{0,0}=0 \tag{2.17}$$

$$M_0\nu_{p-j,j}=-\sum_{k=1}^{j}M_k\nu_{p-j,j-k}-\sum_{k=0}^{j}\sum_{r=1}^{2l-1}M_{r,k}\nu_{p-j-r,j-k} \tag{2.18}$$

$$(j=0,1,\cdots,p;\quad p=1,2,\cdots,N+m+l-1)$$

（三） 形式渐近解的边值条件

首先，我们注意到由局部坐标变换和变换式(2.7)，则在边值条件(1.5)中的算子：

$$D^s_n=D^s_\rho=\varepsilon^{-s}D^s_t$$

并且在边界$\partial\Omega$上，$\rho=0$，再由(2.7)得知$t=0$．这样一来，将形式渐近解(2.1)—(2.3)式代入边值条件(1.5)，仍由比较μ/ε和ε的同次幂的系数得到

$$w_{p-j,j}(0,\varphi)=-\nu_{p-j,j-m}(0,\varphi) \tag{B_0}$$

$$(j=0,1,\cdots,p;\quad p=0,1,\cdots,N)$$

$$Z_N\Big|_{\partial\Omega}=-\varepsilon^m\sum_{p=N+1-m}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^j\nu_{p-j,j}(0,\varphi)\equiv\gamma_0(\varphi,\varepsilon,\mu) \tag{R_0}$$

$$D_\rho w_{p-j,j}(0,\varphi)=-D_t\nu_{p-j,j-m+1}(0,\varphi) \tag{B_1}$$

$$(j=0,1,\cdots,p;\quad p=0,1,\cdots,N)$$

$$D_\rho Z_N\Big|_{\partial\Omega}=-\varepsilon^{m-1}\sum_{p=N+2-m}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^jD_t\nu_{p-j,j}(0,\varphi)\equiv\gamma_1(\varphi,\varepsilon,\mu) \tag{R_1}$$

…………………………………

$$D^{m-1}_\rho w_{p-j,j}(0,\varphi)=-D^{m-1}_t\nu_{p-j,j-1}(0,\varphi) \tag{B_{m-1}}$$

$$(j=0,1,\cdots,p;\quad p=0,1,\cdots,N)$$

$$D_\rho^{m-1} Z_N\Big|_{\partial\Omega} = -\varepsilon \sum_{p=N}^{N+m+l-1} \sum_{j=0}^{p} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j} \varepsilon^j D_t^{m-1} \nu_{p-j,j}(0,\varphi)$$

$$\equiv \gamma_{m-1}(\varphi,\varepsilon,\mu) \qquad (R_{m-1})$$

$$D_t^m \nu_{p-j,j}(0,\varphi) = \begin{cases} -D_\rho^m w_{p-j,j}(0,\varphi), & (j=0,1,\cdots,p;\ \ p=0,1,\cdots N) \\ 0, & (j=0,1,\cdots,p;\ \ p=N+1,\cdots,N+m+l-1) \end{cases} \qquad (B_m)$$

$$D_\rho^m Z_N\Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (R_m)$$

$$D_t^{m+1}\nu_{p-j,j}(0,\varphi) = \begin{cases} 0, & (j=0;\ \ p=0,1,\cdots,\ N+m+l-1) \\ -D_t^{m+1} w_{p-j,j-1}(0,\varphi) & (j=1,2,\cdots,p;\ \ p=1,2,\cdots,N+1) \\ 0, & (j=1,2,\cdots,p;\ \ p=N+2,\cdots,\ N+m+l-1) \end{cases} \qquad (B_{m+1})$$

$$D_\rho^{m+1} Z_N\Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (R_{m+1})$$

………………………………

$$D_t^{m+l-1}\nu_{p-j,j}(0,\varphi) = \begin{cases} 0, & (j=0,1,\cdots,l-2;\ \ p=0,1,\cdots,N+m+l-1) \\ -D_\rho^{m+l-1} w_{p-j,j-l+1}(0,\varphi) & (j=l-1,l,\cdots p;\ \ p=l-1,l,\cdots,N+l-1) \\ 0, & (j=l-1,l,\cdots,p;\ \ p=N+l,\cdots,\ N+m+l-1) \end{cases} \qquad (B_{m+l-1})$$

$$D_\rho^{m+l-1} Z_N\Big|_{\partial\Omega} = 0 \qquad (R_{m+l-1})$$

（四） 渐近解的构作

由前面所导出的第一、二迭代过程的递推方程和边值条件 $(B_0)-(B_{m+l-1})$，我们可以构作出按(2.1)—(2.3)给定的摄动问题 $A_{\varepsilon,\mu}$ 的渐近解．由递推方程(2.4)、(2.5)和边值条 (B_0)—(B_{m-1}) 知道，通过解 $2m$ 阶线性椭圆型方程的第一边值问题求得 $w_{p-j,j}(x)$ $(j=0,1,\cdots,p;\ \ p=0,1,\cdots,N)$．另方面，由递推方程(2.17)、(2.18)和初值条件 (B_m)—(B_{m+l-1})，解 $2(m+l)$ 阶常微分方程满足 l 个初值条件，求得边界层函数 $\nu_{p-j,j}(t,\varphi)$ $(j=0,1,\cdots,p;\ \ p=0,1,\cdots,\ N+m+l-1)$ 其求解的程序与文[1]相同．这里不再赘述．

依上述假定退化问题 A_0 的解存在唯一，且算子 $L_{\varepsilon,\mu}$ 的系数是足够光滑的．由L．Nirenberg[5]的结果知道，所求得的 $w_{p-j,j}(x)$ 都是足够光滑的．这样就保证了第一迭代过程能够进行．同时已知常微分算子 M_0 的特征方程(2.15)有 l 个负实部的根，即摄动问题是正则退化的．以 $-\lambda_1,\ -\lambda_2,\cdots,-\lambda_l$ 表示特征方程(2.15)的 l 个负实部的根，由常微分方程初值问题的理论得知，第二迭代过程同样可以进行，且所求得的边界层函数具有如下形式：

$$\sum_{j=1}^{l} P_j(t,\varphi)e^{-\lambda_j t} \qquad (2.19)$$

其中 $P_j(t,\varphi)$ 为 t 的多项式，其系数是 φ 的光滑函数．

但是，由第二迭代过程所求得的函数 $\nu_{p-j,j}(t,\varphi)$ $(j=0,1,\cdots,p;\ \ p=0,1,\cdots,\ N+m+l-1)$ 只在边界 $\partial\Omega$ 的 η 邻域有定义，为了得到在整个区域 Ω 上有定义的边界层函数，援用平

滑函数$\Psi(\rho)\in c^{\infty}(\bar{\Omega})$且

$$\Psi(\rho)=\begin{cases}1, & 0\leqslant\rho\leqslant\eta/3\\ 0, & \rho\geqslant\eta\end{cases} \quad 和\ 0\leqslant\Psi(\rho)\leqslant 1$$

作函数：

$$\tilde{v}_{p-j,j}(t,\varphi)=\Psi(\rho)v_{p-j,j}(t,\varphi),\ (j=0,1,\cdots,p;\ \ p=0,1,\cdots,\ N+m+l-1)$$

则$\tilde{v}_{p-j,j}(t,\varphi)$为定义于整个区域$\Omega$上的边界层函数，且在边界$\partial\Omega$的$\eta/3$邻域内，$\tilde{v}_{p-j,j}(t,\varphi)\equiv v_{p-j,j}(t,\varphi)$.

因此，可以证明按上述构作所得到的函数：

$$W^N_{\varepsilon,\mu}(x)\equiv\sum_{p=0}^{N}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^j w_{p-j,j}(x)+\varepsilon^m\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^j\tilde{v}_{p-j,j}(t,\varphi) \tag{2.20}$$

是摄动问题(1.4)—(1.5)的形式渐近解．证明如下：

为书写方便，记(2.20)式中

$$w^N_{\varepsilon,\mu}(x)=\sum_{p=0}^{N}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^j w_{p-j,j}(x) \tag{2.21}$$

$$\tilde{v}^N_{\varepsilon,\mu}(t,\varphi)\equiv\varepsilon^m\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^j\tilde{v}_{p-j,j}(t,\varphi) \tag{2.22}$$

当$x\in\Omega$时，由递推方程(2.4)、(2.5)得

$$\begin{aligned}L_{\varepsilon,\mu}w^N_{\varepsilon,\mu}&=f(x)+\varepsilon^{2l}\sum_{p=N+1-2l}^{N}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^j L_{2l}w_{p-j,j}\\&\quad+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r\sum_{p=N+1-2r}^{N}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^j L_r w_{p-j,j}\\&=f(x)+\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{N+1}\left[\varepsilon^{2l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{-2l}+\sum_{r=1}^{2l-1}\mu^r\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{-2r}\right]\Phi_1(x)\end{aligned} \tag{2.23}$$

其中$\Phi_1(x)=O(1)$.

以Ω_δ表示边界$\partial\Omega$的δ邻域．当$x\in\Omega\backslash\Omega_\eta$时，由$\tilde{v}_{p-j,j}(t,\varphi)\equiv 0$ $(j=0,1,\cdots,p;p=0,1,\cdots,N+m+l-1)$则

$$L_{\varepsilon,\mu}\tilde{v}^N_{\varepsilon,\mu}=0 \tag{2.24}$$

当$x\in\Omega_{\eta/3}$时，由$\tilde{v}_{p-j,j}(t,\varphi)\equiv v_{p-j,j}(t,\varphi)$，得到

$$\tilde{v}^N_{\varepsilon,\mu}(t,\varphi)=\varepsilon^m\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^j v_{p-j,j}(t,\varphi)$$

再由递推方程(2.17)、(2.18)得

$$L_{\varepsilon,\mu}\,\tilde{v}^N_{\varepsilon,\mu}\equiv\varepsilon^{-2m}\left[M_0+\sum_{k=1}^{N+m+l}\varepsilon^k M_k+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{N+m+l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k M_{r,k}\right]\tilde{v}^N_{\varepsilon,\mu}$$

$$=\varepsilon^{-2m}\left[M_0+\sum_{k=1}^{N+m+l}\varepsilon^k M_k+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{N+m+l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k M_{r,k}\right]$$

$$\cdot\left[\varepsilon^m\sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^j\nu_{p-j,j}\right]$$

$$=\varepsilon^{-m}\Bigg[\sum_{k=1}^{N+m+l}\varepsilon^k\sum_{p=N+m+l-k}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^j M_k\nu_{p-j,j}$$

$$+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{N+m+l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k\sum_{p=N+m+l-r-k}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^j M_{r,k}\nu_{p-j,j}\Bigg]$$

$$=\varepsilon^{-m}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{N+m+l}\Bigg[\sum_{k=1}^{N+m+l}\varepsilon^k\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{-k}$$

$$+\sum_{r=1}^{2l-1}\sum_{k=0}^{N+m+l}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^r\varepsilon^k\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{-(r+k)}\Bigg]\Phi_2(x) \tag{2.25}$$

其中 $\Phi_2(x)=O(1)$. 又当 $x\in\Omega_\eta\backslash\Omega_{\eta/3}$ 时, 则 $\rho\neq 0$, 并由(2.19)式知道函数

$$\Psi(\rho)\sum_{j=1}^{l}P_j(t,\varphi)e^{-\lambda_j t}$$

及其一切阶偏导数, 当 $\varepsilon\to 0$ 时比 ε 的任意次幂还要快地一致趋于零. 再由前面关于函数 $\nu_{p-j,j}(t,\varphi)$ 的结构形式知道, 这些函数亦具有此性质. 所以

$$L_{\varepsilon,\mu}\,\tilde{v}^N_{\varepsilon,\mu}=\varepsilon^M\Phi_3(x) \tag{2.26}$$

对任意正整数 M 成立. 式中 $\Phi_3(x)=O(1)$.

综合(2.23)—(2.26), 所以在整个区域 Ω 成立

$$L_{\varepsilon,\mu}W^N_{\varepsilon,\mu}=f(x)+G(\varepsilon,\mu)\Phi(x)$$

其中 $\Phi(x)=O(1)$,

$$G(\varepsilon,\mu)=\begin{cases}\varepsilon^{N+1}, & \text{当 } \mu/\varepsilon^2\to\beta(\varepsilon\to 0),\ (0\leqslant\beta<\infty)\\ \left(\dfrac{\mu}{\varepsilon}\right)^N\left[\varepsilon+\varepsilon^{-m}\left(\dfrac{\mu}{\varepsilon}\right)^{m+l}\right], & \text{当 } \mu/\varepsilon^2\to\infty(\varepsilon\to 0)\end{cases} \tag{2.27}$$

又由边值条件的关系式 (R_0)—(R_{m+l-1}) 得到

$$D^s_\rho W^N_{\varepsilon,\mu}\Big|_{\partial\Omega}=-\gamma_s(\varphi,\varepsilon,\mu)\begin{cases}\varepsilon^{m-s}\left(\dfrac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{N+1+s-m}\Phi_s(\varphi), & (s=0,1,\cdots,m-1)\\ 0, & (s=m,m+1,\cdots,m+l-1)\end{cases} \tag{2.28}$$

其中 $\Phi_s(\varphi)=O(1)$. 所以 $W^N_{\varepsilon,\mu}(x)$是摄动问题的形式渐近解.

三、余 项 估 计

下面将导出摄动问题的解 $w_{\varepsilon,\mu}(x)$与所构作的形式渐近解 $W^N_{\varepsilon,\mu}(x)$的余项的估计，以Z_N表示余项，即

$$Z_N=w_{\varepsilon,\mu}(x)-W^N_{\varepsilon,\mu}(x) \tag{3.1}$$

将$w_{\varepsilon,\mu}=W^N_{\varepsilon,\mu}+Z_N$代入摄动边值问题(1.4)—(1.5)，得到关于 Z_N 的边值问题：

$$L_{\varepsilon,\mu}Z_N=-G(\varepsilon,\mu)\Phi(x),\quad x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega \tag{3.2}$$

$$D^s_\rho Z_N|_{\partial\Omega}=\gamma_s(\varphi,\varepsilon,\mu),\quad (s=0,1,\cdots,m+l-1) \tag{3.3}$$

其中当 $s\geqslant m$ 时，$\gamma_s(\varphi,e,\mu)=0$.

作函数：

$$\tilde{Z}_N=\Psi(\rho)\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\rho^k}{k!}\gamma_k(\varphi,\varepsilon,\mu) \tag{3.4}$$

由(R_0)—(R_{m-1})式得到

$$L_{\varepsilon,\mu}\tilde{Z}_N=\sum_{k=1}^{m}\varepsilon k\left(\frac{\mu}{\varepsilon}+\varepsilon\right)^{N+1-k}\tilde{\Phi}(x)=\tilde{G}(\varepsilon,\mu)\dot{\Phi}(x) \tag{3.5}$$

其中$\tilde{\Phi}(x)=O(1)$，

$$\tilde{G}(\varepsilon,\mu)=\begin{cases}\varepsilon^{N+1}，\text{当 }\mu/\varepsilon^2\to\beta(\varepsilon\to0)，(0\leqslant\beta<\infty)\\ \varepsilon\left(\dfrac{\mu}{\varepsilon}\right)^N，\text{当 }\mu/\varepsilon^2\to\infty\ (\varepsilon\to0)\end{cases} \tag{3.6}$$

置

$$\bar{Z}_N=Z_N-\tilde{Z}_N \tag{3.7}$$

则 $\bar{Z}_N$ 满足如下齐次边值问题：

$$L_{\varepsilon,\mu}\bar{Z}_N=G(\varepsilon,\mu)\bar{\Phi}(x),\quad x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega \tag{3.8}$$

$$D^s_\rho\bar{Z}_N|_{\partial\Omega}=0,\quad (s=0,1,\cdots,m+l-1) \tag{3,9}$$

其中 $\bar{\Phi}(x)=O(1)$.

假定当 $0<\varepsilon\leqslant\varepsilon_0$，$0<\mu\leqslant\mu_0$ 时，算子 $L_{\varepsilon,\mu}$ 有一致有界的逆算子 $L^{-1}_{\varepsilon,\mu}$，即对于任意函数 $w\in\hat{C}^{2(m+l)}(\bar{\Omega})$，成立

$$\|w\|_{L_2}\leqslant k_0\|L_{\varepsilon,\mu}w\|_{L_2} \tag{3.10}$$

其中 k_0 是与 w 及小参数 ε，μ 无关的正常数，$\hat{C}^{2(m+l)}(\bar{\Omega})$ 表示 $C^{2(m+l)}(\bar{\Omega})$ 中满足齐次边值条件(3.9)的函数集合．则

$$\|\bar{Z}_N\|_{L_2}\leqslant k_1G(\varepsilon,\mu) \tag{3.11}$$

又由(3.4)得到

$$\|\tilde{Z}_N\|_{L_2} \leqslant k_2 G(\varepsilon,\mu) \tag{3.12}$$

故得

$$\|Z_N\|_{L_2} \leqslant \|\bar{Z}_N\|_{L_2} + \|\tilde{Z}_N\|_{L_2} \leqslant k_3 G(\varepsilon,\mu) \tag{3.13}$$

以上 k_1, k_2, k_3 均为正的常数.

四、结　　论

综合前面各个部分的结果，我们得到下面两个定理：

定理 1 假设成立如下条件：

（Ⅰ） 算子 L_0 和 L_{2l} 分别为 $2m$ 和 $2(m+l)$ 阶的线性强椭圆型算子．算子 $L_r(r=1,2,\cdots,2l-1)$ 为不高于 $2m+r$ 阶的线性偏微分算子；

（Ⅱ） 问题 $A_{\varepsilon,\mu}$ 的参数，即算子 $L_{\varepsilon,\mu}$ 的系数，函数 $f(x)$，边界 $\partial\Omega$ 都是足够光滑的；

（Ⅲ） 问题 A_0 的解存在且唯一；

（Ⅳ） 算子 $L_{\varepsilon,\mu}$ 有一致有界的逆算子 $L^{-1}_{\varepsilon,\mu}$ （如上述意义）；

（Ⅴ） ε,μ 为相互依赖的正小参数，且 $\mu/\varepsilon\to 0\ (\varepsilon\to 0)$．则问题 $A_{\varepsilon\mu}$ 的解 $w_{\varepsilon,\mu}(x)$ 有渐近式：

$$w_{\varepsilon,\mu}(x) = \sum_{p=0}^{N}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^j w_{p-j,j}(x)$$

$$+\varepsilon^m \sum_{p=0}^{N+m+l-1}\sum_{j=0}^{p}\left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j}\varepsilon^j \tilde{v}_{p-j,j}(t,\varphi) + Z_N(x,\varepsilon,\mu) \tag{4.1}$$

其中 $w_{0,0}(x)$ 是退化边值问题 A_0 的解；$w_{p-j,j}(x)$ $(j=0,1,\cdots,p;\ p=1,2,\cdots,N)$ 由递推方程(2.5)和边值条件 (B_0)—(B_{m-1}) 确定；$\tilde{v}_{p-j,j}(t,\varphi)=\Psi(\rho)v_{p-j,j}(t,\varphi)$ $(j=0,1,\cdots,p;$ $p=0,1,\cdots,N+m+l-1)$ 其中 $v_{p-j,j}(t,\varphi)$ 是边界层函数，由递推方程(2.17)、(2.18)和初值条件 (B_m)—(B_{m+l-1}) 确定．又若 $\mu/\varepsilon^2\to\beta(\varepsilon\to 0)$ $(0\leqslant\beta<\infty)$，则余项 Z_N 有如下估计式：

$$\|Z_N\|_{L_2} = O(\varepsilon^{N+1}) \tag{4.2}$$

对于 $\mu/\varepsilon^2\to\infty(\varepsilon\to 0)$ 的情形，我们只讨论一种特殊情况，即 $\mu=\varepsilon^{1+\alpha}$ $(0<\alpha<1)$．这时有

$$G(\varepsilon,\mu)=\varepsilon^{\alpha N}\left[\varepsilon+\varepsilon^{m(\alpha-1)+2l}\right]=\begin{cases} O(\varepsilon^{\alpha N}), & \text{当}\ \dfrac{m}{m+l}\leqslant\alpha<\dfrac{m+1}{m+l} \\ O(\varepsilon^{\alpha N+1}), & \text{当}\ \dfrac{m+1}{m+l}\leqslant\alpha<1 \end{cases}$$

因此．得到如下结果：

定理 2 在定理 1 的假设条件（Ⅰ）—（Ⅴ）之下　若 $\mu=\varepsilon^{1+\alpha}\left(\dfrac{m}{m+l}\leqslant\alpha<1\right)$ 则问题 $A_{\varepsilon,\mu}$ 的解 $w_{\varepsilon,\mu}(x)$ 仍有渐近式(4.1)，而其余项 Z_N 有如下估计式：

$$\|Z_N\|_{L_2}=\begin{cases}O(\varepsilon^{\alpha N}), & \text{当}\dfrac{m}{m+l}\leqslant\alpha<\dfrac{m+1}{m+l}\\ O(\varepsilon^{\alpha N+1}), & \text{当}\dfrac{m+1}{m+l}\leqslant\alpha<1\end{cases}$$

最后指出一点，当摄动算子$L_{\varepsilon,\mu}$的最高阶项算子L_{2l}所含参数ε与低阶项算子L_r ($r=1,2,\cdots,2l-1$) 所含参数μ满足 $\mu/\varepsilon\to 0$ ($\varepsilon\to 0$) 的情况，此时摄动问题 $A_{\varepsilon,\mu}$ 自然正则退化，而文[2]、[3]中所讨论$\varepsilon=\mu$的情形，一般地不具有自然正则退化性。

本文得到林宗池老师的热情指导，笔者谨致谢意。

参 考 文 献

1. 郑永树，高阶椭圆型方程第一边值问题的奇摄动（Ⅰ），福建师大学报，（自然科学版），1(1980)，9—22.
2. Вишик, М. И. и Люстерник, Л. А., Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром, *УМН* 12, 5 (1957), 3—122.
3. Вишик, М. И. и Люстерник, Л. А. Решение некоторых задач о возмущении в случае матриц и самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных уравнений Ⅰ, *УМН*, 15, 3(1960), 3—80.
4. Besjes, J. G. Singular perturbation problems for linear elliptic differential operators of arbitrary order, *J. Math Anal. and Appl.*, 49, 1(1975) 24—46.
5. Nirenberg, L., Estimates and existence of solutions of elliptic equations, *Comm. Pure Appl Math.*, 9(1956), 509—530.

Singular Perturbation of First Boundary Value Problem for Higher Order Elliptic Equations (II)

Zheng Yong-shu

(Department of Mathematics, Fujian Teachers' University, Fuzhou)

Abstract

In this paper we discuss the singular perturbations of the first boundary value problem for higher order elliptic equations of two-parameter We discuss the problem:

$$L_{\varepsilon,\mu} w_{\varepsilon,\mu} \equiv \varepsilon^{2l} L_{2l} w_{\varepsilon,\mu} + \sum_{r=1}^{2l-1} \mu^r L_r w_{\varepsilon,\mu} + L_0 w_{\varepsilon,\mu} = f(x),\quad x=(x_1,\cdots,x_n)\in\Omega$$

$$\left.\frac{\partial^s w_{\varepsilon,\mu}}{\partial n^s}\right|_{\partial\Omega} = 0,\quad (s=0,1,\cdots,m+l-1)$$

where ε and μ are small positive interrelated parameters approaching zero simultaneously, Ω denotes a finite region in n-dimensional Euclidean space R^n, n denotes the inner normal vector of the boundary $\partial\Omega$ of Ω, L_0, L_{2l} represent strong linear elliptic operators of order $2m$ and $2(m+l)$ respectively, L_r $(r=1,2,\cdots,2l-1)$ represent linear differential operators of order$\leqslant 2m+r$.

In case $\mu/\varepsilon\to 0$ $(\varepsilon\to 0)$, we obtain the asymptotic expansion of $w_{\varepsilon,\mu}(x)$:

$$w_{\varepsilon,\mu}(x) = \sum_{p=0}^{N} \sum_{j=0}^{p} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j} \varepsilon^j w_{p-j,j}(x)$$

$$+\varepsilon^m \sum_{p=0}^{N+m+l-1} \sum_{j=0}^{p} \left(\frac{\mu}{\varepsilon}\right)^{p-j} \varepsilon^j \tilde{v}_{p-j,j}(t,\varphi) + Z_N(x,\varepsilon,\mu)$$

and the following estimation of error Z_N:

(i) In case $\mu/\varepsilon^2\to\beta$ $(\varepsilon\to 0)$ $(0\leqslant\beta<\infty)$,

$\|Z_N\|_{L_2} = O(\varepsilon^{N+1})$

(ii) In case $\mu=\varepsilon^{1+\alpha}\left(\frac{m}{m+l}\leqslant\alpha<1\right)$

$$\|Z_N\|_{L_2} = \begin{cases} O(\varepsilon^{\alpha N}), & \text{as } \frac{m}{m+l}\leqslant\alpha<\frac{m+1}{m+l} \\ O(\varepsilon^{\alpha N+1}), & \text{as } \frac{m+1}{m+l}\leqslant\alpha<1 \end{cases}$$