

文章编号: 1000-0887(2005) 01-0007-09

二阶类摆系统的临界阻尼*

李鑫滨^{1,2}, 黄永念¹, 杨莹¹, 黄琳¹

(1. 北京大学 力学与工程科学系, 北京 100871;
2. 燕山大学 电气工程学院, 秦皇岛 066004)

(本刊编委黄永念来稿)

摘要: 首先, 分析了一具有特定非线性函数的二阶类摆系统的解的性质; 进而, 针对具有一般非线性形式的二阶类摆系统, 利用微分方程的定性分析方法讨论了其总体性质, 并由此给出了估算其临界阻尼的充分性条件. 改进了 Leonov 等人的工作.

关键词: 类摆系统; Lagrange 稳定; 类梯度; 第二类极限环

中图分类号: O322 文献标识码: A

引 言

类摆系统是一类特殊的具有多平衡点的非线性系统, 其在工程上对应于各类相同步系统, 如摆、具振动悬挂点的摆、同步电机等^[1, 2]. 对于多平衡点系统, 其解的总体性质比单平衡点系统复杂得多.

对二阶类摆系统的研究最早是由 F. Tricomi^[3] 开始的, 其后, 结合相应的工程实际, 对含有特定非线性函数的二阶类摆系统进行了相应的研究^[4~7]. 总的来说, 对二阶类摆系统总体性质的研究主要是研究其阻尼系数对方程解的相轨迹的影响, 其中最感兴趣的是解的有界性、收敛性以及各类环解的存在性等. 研究二阶类摆系统的另外一个重要原因是非局部降阶法在研究高阶类摆系统总体性质中的应用. 最近, 文献[8] 讨论了如何利用非局部降阶法来研究类摆系统的总体性质, 其特点是将 Liapunov 直接法与二阶系统的定性分析相结合, 由二阶系统的总体性质推导出高阶系统的对应性质, 从而使得对二阶系统的研究显得更加重要.

当二阶类摆系统中的非线性函数在一个周期内具有零均值时, 文献[8] 证明对任意的、大于零的阻尼系数, 系统的所有解都是收敛的. 当非线性函数具有非零均值时, 又可分为非线性函数不变号和变号两种情形. 首先我们分析了一个具有特定非线性函数的二阶类摆系统的解的性质. 其次, 针对具有一般非线性形式的二阶类摆系统, 利用微分方程的定性分析方法讨论了当非线性函数不变号及变号时的总体性质. 由其变号时的总体性质可以看出, 对任意给定的具有周期性的非线性函数, 只要阻尼系数足够大, 则系统的所有解都是收敛的. 因而, 研究

* 收稿日期: 2003_11_15; 修订日期: 2004_09_25

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(10272001, 60334030); 国家重点基础研究专项经费资助项目(G20000773)

作者简介: 李鑫滨(1969—), 男, 北京大兴人, 博士(联系人. Tel: + 86_335_8047169; Fax: + 86_335_8072979; E_mail: lixb@pku.org.cn)•

二阶类摆系统的一个重要的目的就是能尽量准确地估算系统的临界阻尼。文献[8]给出了一个估算临界阻尼上界的充分性条件。本文也给出了一个估算临界阻尼上界的方法,不但包含了非线性函数具有零均值时的情况,而且估算的结果优于文献[8]的估算结果。

1 一个具有特定非线性函数的二阶类摆系统例子

为了对类摆系统有更直观的了解,我们首先考虑如下—具有特定非线性函数的二阶类摆系统:

$$\ddot{\sigma} + a\dot{\sigma} + \varphi(\sigma) = 0, \quad \varphi(\sigma) = -(a + d\cos\sigma)(c + d\sin\sigma), \quad (1)$$

其中 a, c 和 d 均为大于零的常数, $a \neq 0$ 。令 $\sigma = \eta$ 方程(1)可化为:

$$\begin{cases} \dot{\sigma} = \eta \\ \dot{\eta} = -a\eta - \varphi(\sigma), \end{cases} \quad (2)$$

其轨迹在相平面上的一阶微分方程为:

$$\eta \frac{d\eta}{d\sigma} + a\eta + \varphi(\sigma) = 0 \quad (3)$$

此时方程(2)存在一特解

$$\eta_k = \frac{d\eta}{d\sigma} = c + d\sin\sigma \quad (4)$$

此特解同时是相空间上的一条轨迹。由方程(2)可知其平衡点集为 $\Lambda = \{(\eta_{eq}, \sigma_{eq}) \mid \eta_{eq} = 0, \varphi(\sigma_{eq}) = 0\}$, 即 $\varphi(\sigma)$ 与 σ 轴的交点决定了系统的平衡点。如图1所示,下面分3种情况分析系统的总体性质。

1) $\varphi(\sigma)$ 没有零点, 即 $a + d\cos\sigma \neq 0$ 及 $c + d\sin\sigma \neq 0$, 因而系统不存在平衡点。例如当 $a = 2, c = 1.5, d = 1$ 时, 如图1中(a)所示, 方程的特解 η_k 满足 $\eta_k(\sigma + 2\pi) = \eta_k(\sigma)$, 虽然此解在平面相空间上是沿 σ 轴无限延伸的, 但在柱面相空间中却是一条闭合的极限环, 因此称其为方程的第二类极限环。并且当 $\sigma \rightarrow +\infty$ 时, 方程的所有解都趋近于第二类极限环。

2) $\varphi(\sigma)$ 在区间 $[0, 2\pi)$ 内有两个零点。此时又可分为两种情况:

a) $a + d\cos\sigma = 0$ 而 $c + d\sin\sigma \neq 0$, 因而系统的平衡点只由函数 $a + d\cos\sigma$ 的零点决定, 而方程的特解 η_k 仍为一第二类极限环。例如当 $a = 0.5, c = 1.5, d = 1$ 时, 则 $\varphi(\sigma) = -(0.5 + \cos\sigma)(1.5 + \sin\sigma)$, 此时在一个周期内平衡点为函数 $0.5 + \cos\sigma$ 的零点, 即点 $(2.094, 0)$ 和点 $(4.189, 0)$, 其中在点 $(2.094, 0)$ 处平衡点的特征方程为

$$k^2 + 0.5k + 2.094 = 0, \quad (5)$$

其根为一对共轭复根, 且实部为负, 因而此平衡点为一稳定的焦点。而在点 $(4.189, 0)$ 处平衡点的特征方程为

$$k^2 + 0.5k - 0.549 = 0, \quad (6)$$

其根 $k_1 k_2 < 0$, 因而此平衡点为一鞍点。解的相轨迹如图1(b)所示, 当 $\sigma \rightarrow +\infty$ 时, 第二类极限环上方的解都趋近于此环解; 在第二类极限环的下方, 由鞍点的稳定流形所包围的区域内出发的解都收敛, 而在此区域外出发的解则趋近于第二类极限环。

b) $a + d\cos\sigma \neq 0$ 而 $c + d\sin\sigma = 0$ 。例如当 $a = 2, c = 0.5, d = 1$ 时, 此时, 在一个周期内系统的平衡点为曲线 $\eta_k = 0.5 + \sin\sigma$ 与 σ 轴的交点, 即点 $(3.665, 0)$ 和点 $(5.76, 0)$, 同样我们可以证明前一个平衡点为稳定的结点, 而后一个为鞍点。解的相轨迹如图1(c)所示, 此时方程的任一解都收敛到一个平衡点, 而平衡点有无穷多个, 方程不存在第二类极限环, 在平面相

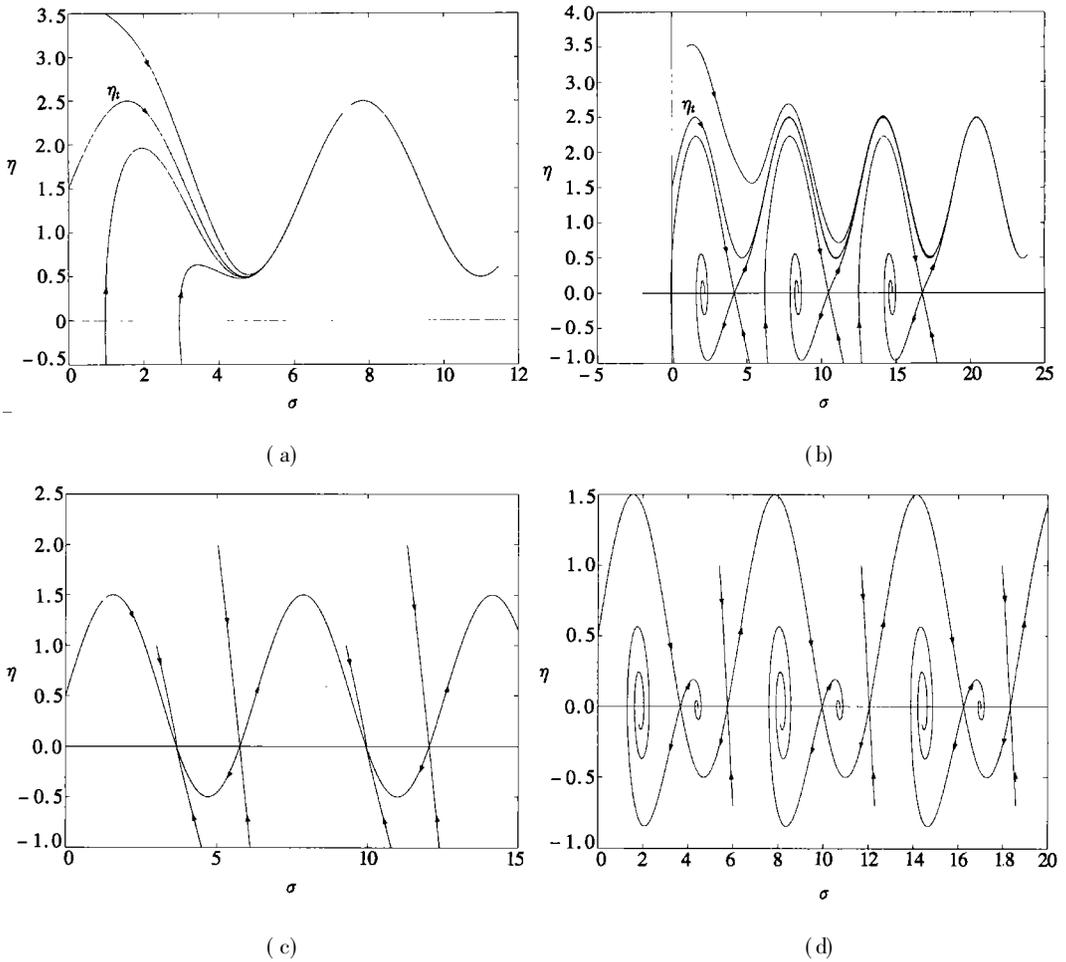


图 1 四种不同情况时的相图

空间上每两个相邻的平衡点之间存在一条异宿轨,而在柱面相空间上,从一个平衡点到另一个平衡点间则存在两条异宿轨。

3) 下面考虑最后一种情况, $\Psi(\sigma)$ 有四个零点, 即 $a + d\cos\sigma = 0$ 且 $c + d\sin\sigma = 0$ 。例如当 $a = 0.3, c = 0.5, d = 1$ 时, 则在一个周期内函数 $0.3 + \cos\sigma$ 的零点为 $(1.875, 0)$ 和 $(4.41, 0)$, 曲线 $\eta = 0.5 + \sin\sigma$ 与 σ 轴的交点为 $(3.665, 0)$ 和 $(5.76, 0)$, 因而在一个周期内有四个平衡点。同样, 我们可以证明前面两个平衡点是稳定的焦点, 后两个平衡点是鞍点。焦点和鞍点是交叉出现的, 此时, 方程不存在第二类极限环, 任一解都收敛到一个平衡点。同样, 在平面相空间上每两个相邻的鞍点之间存在一条异宿轨, 而在柱面相空间上, 从一个鞍点到另一个鞍点间则存在两条异宿轨。解的相轨迹如图 1(d) 所示。另外, 需要说明的是, $a + d\cos\sigma$ 的两个零点可以和 $c + d\sin\sigma$ 的两个零点分开, 而不是交替出现, 此时平衡点的类别有所变化。

由上面的分析可见: 1) 不论 $\Psi(\sigma)$ 有两个还是四个零点, 只要方程(1) 不存在第二类极限环则方程的解都是收敛的。2) 方程是否出现第二类极限环与方程的系数有关。我们通常感兴趣的是系统所有解的收敛性, 因此在下面的分析中, 针对具有一般非线性函数的二阶类摆系统, 我们主要讨论当其参数发生变化时, 是否会出现第二类极限环, 以及如何估算其临界参数。

2 二阶类摆系统的总体性质

考虑二阶类摆系统如下:

$$\ddot{\sigma} + a\dot{\sigma} + \varphi(\sigma) = 0 \quad (a > 0), \tag{7}$$

其中 $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ 为一连续可微函数且满足:

$$(\exists \Delta \in \mathbf{R})(\forall \sigma \in \mathbf{R}): \varphi(\sigma + \Delta) = \varphi(\sigma), \tag{8}$$

其中 Δ 称为非线性函数 $\varphi(\sigma)$ 关于变量 σ 的周期. 不失一般性, 假定:

$$\varphi = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta \varphi(\sigma) d\sigma < 0, \tag{9}$$

令 $\sigma = \eta$, 方程(7) 同样可化为(2) 式及(3) 式, 其中的非线性函数 $\varphi(\sigma)$ 满足上面的假定. 由于 $\varphi(\sigma) = \varphi(\sigma + \Delta)$ 对 $\forall \sigma$ 成立, 又设

$$\varphi^2(\sigma) + [\dot{\varphi}(\sigma)]^2 \neq 0 \quad (\forall \sigma \in \mathbf{R}), \tag{10}$$

则 $\varphi(\sigma)$ 没有重根, 于是 $\varphi(\sigma)$ 在一周期内的零点为偶数个.

定义 1^[8] 如果方程(7) 的所有解均有界则称对应的系统是 Lagrange 稳定的.

定义 2^[8] 如果方程(7) 的所有解均收敛则称系统是类梯度的.

定义 3^[8] 如果方程(2) 的解满足

$$(\exists k \neq 0)(\tau > 0): \eta(t + \tau) = \eta(t), \tag{11}$$

$$\sigma(t + \tau) - \sigma(t) = k\Delta \quad (k \in \mathbf{Z}),$$

则称此解为第二类极限环.

首先, 考虑 $\varphi(\sigma)$ 没有零点的情况, 此时无平衡点. 不妨设 $\varphi(\sigma) < 0, \forall \sigma \in \mathbf{R}$. 由于 $\varphi(\sigma)$ 是周期连续函数, 可令 $m = a^{-1} \max \varphi(\sigma) > 0$, 由(2) 式中第二个方程可知, 若 $\eta \leq m$, 则 $\dot{\eta} = -a\eta - \varphi(\sigma) \geq 0$, 因而当 $t = t_0$ 时对任意的初值 η , 存在一时刻 $t_1 > 0$ 使得当 $t > t_1$ 时, $\eta \geq m > 0$, 即 $\sigma \geq m > 0$, 从而随时间的增加 σ 是无界的. 由上所述, 若 $\varphi(\sigma)$ 没有零点, 则系统对任意的 $a > 0$ 都不可能是 Lagrange 稳定的.

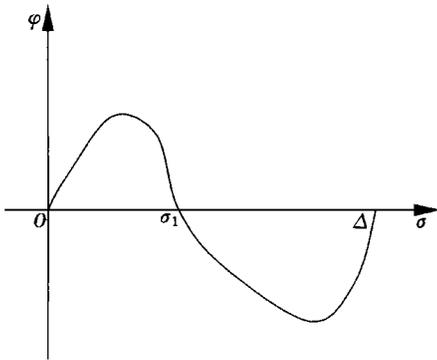


图2 函数 $\varphi(\sigma)$ 的一类典型形状

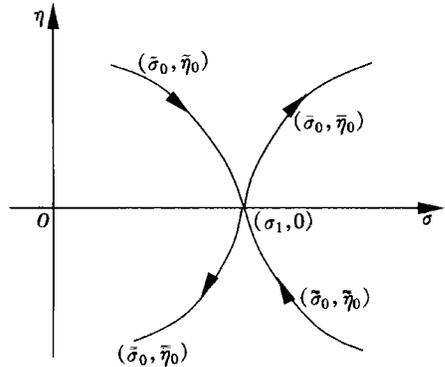


图3 平衡点 $(\sigma_1, 0)$ 附近的相图

不失一般性, 假定函数 $\varphi(\sigma)$ (如图2所示) 在一个周期内即在区间 $[0, \Delta)$ 上有两个零点 $0, \sigma_1$, 不妨设

$$\varphi(0) > 0, \quad \varphi(\sigma_1) < 0 \tag{12}$$

由于 $a, \varphi(0)$ 都是正的, 因此通过其在点 $(0, 0)$ 的线性化方程, 可以看出平衡点 $(0, 0)$ 为稳定的结点或焦点. 而在点 $(\sigma_1, 0)$ 处的特征方程为

$$k^2 + ak + \varphi(\sigma_1) = 0, \quad (13)$$

其根为

$$k_{1,2} = -\frac{a}{2} \pm \frac{\sqrt{a^2 - 4\varphi(\sigma_1)}}{2}. \quad (14)$$

由于 $\varphi(\sigma_1) < 0$, 因此 $k_1 k_2 < 0$, 即平衡点 $(\sigma_1, 0)$ 是一鞍点, 且其附近的相轨迹如图 3 所示.

由方程(3), 当 $\eta \neq 0$ 时, 由轨线上切线平行于 σ 轴的点所形成的曲线方程为:

$$L: \eta = -\frac{1}{a}\varphi(\sigma) \quad (15)$$

而 $\eta = 0, \varphi(\sigma) = 0$ 的点为系统的平衡点, 在此处轨线不满足唯一性, 因而可以利用 $\eta \neq 0$ 时的方程取极限得到. 由此可知曲线 L 在点 $(\sigma_1 - \Delta, 0)$ 的斜率为 $-a^{-1}\varphi'(\sigma_1)$.

令 $M = -a^{-1} \max_{\sigma \in [0, \Delta]} \varphi(\sigma)$, 如图 4 所示, 下面研究通过鞍点的轨线的性态. 由于由平衡点 $(\sigma_1 - \Delta, 0)$ 出发、位于 σ 轴上方的不稳定流形 η_1 的斜率 k_1 要小于曲线 L 在点 $(\sigma_1 - \Delta, 0)$ 的斜率, 因而 η_1 是从由曲线 L 和 σ 轴围成的区域内出发, 与曲线 L 的交点中离 η 轴最近的为 P . 由(2) 式的第 2 个方程可知, 轨线 η_1 的纵坐标过点 P 后是递减的, 然后与 η 轴交于点 A_1 . 由此可知

$$|A_1 O| < M. \quad (16)$$

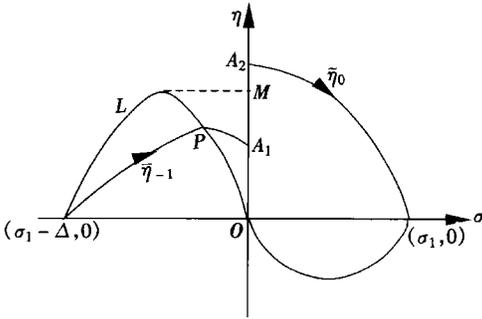


图 4 $\eta \geq 0$ 时通过鞍点的轨线的相图

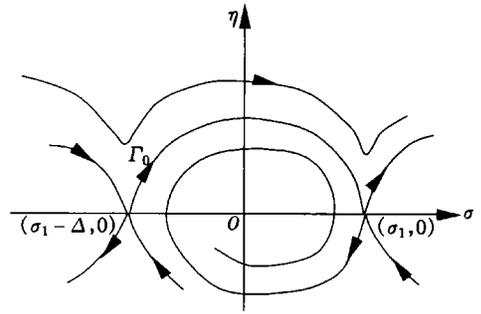


图 5 $a = a_0$ 时的临界相图

另外, 由(3) 式可得

$$\frac{1}{2} \frac{d\eta^2}{d\sigma} = -a\eta - \varphi(\sigma). \quad (17)$$

当 $\eta, \varphi(\sigma)$ 都大于 0 时, $d\eta^2/d\sigma < 0$, 因此当 σ 由 σ_1 递减到 0 时, η_0 的纵坐标递增, 其中, η_0 为由 σ 轴上方趋近于平衡点 $(\sigma_1, 0)$ 的稳定流形, 其与 η 轴的交点为 A_2 . 且由式(17) 可知, 当 $\eta > 0$ 时, 若 $0 < a_1 < a_2$, 有

$$-a_2\eta - \varphi(\sigma) < -a_1\eta - \varphi(\sigma), \quad (18)$$

可知斜率 $\eta^{-1} d\eta^2/d\sigma$ 随 a 的增加而减小, 即 $|A_2 O|$ 随 a 的增加变大. 同样有 $|A_1 O|$ 随 a 的增加变小. 由式(16) 并根据轨线对于 a 的连续依赖性可以推出, 对于充分小的 a 有 $|A_1 O| > |A_2 O|$, 而对于充分大的 a , 有 $|A_2 O| > |A_1 O|$, 由此存在唯一的 $a = a_0$ 使对应方程的解实现 $|A_1 O| = |A_2 O|$, 它对应着半平面 $\eta \geq 0$ 中的一个连接点 $(\sigma_1 - \Delta, 0)$ 与 $(\sigma_1, 0)$ 的轨线 Γ_0 . 需要特别说明的是轨线 Γ_0 并不是我们要所讨论的第二类极限环, 在平面相空间上此轨线为一条异宿轨, 而在柱面相空间上则是一条同宿轨. 通过下面的研究可以发现, 此轨线的出现对应于是否出现第二类极限环的临界情况. 图 5 为临界状态时解的相轨迹示意图, 此时, Γ_0 下方的轨线都收敛于稳定的焦点, 而其上方的轨线随 $\sigma \rightarrow +\infty$ 时趋近于异宿轨线.

引理 1^[8]: 给定一个一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \tag{19}$$

其中 $F: R^2 \rightarrow R$ 在域上 $D \subset R^2$ 是连续. 令 $M_0(x_0, y_0)$ 是中的一点, $z: R \rightarrow R$ 是一个图位于 D 中的可微函数且包含点 M_0 . 设 $y(x)$ 是初始值为 $y(x_0) = y_0$ 的方程(19)的解, 若有

$$\frac{dz}{dx} \geq F(x, z(x)), \tag{20}$$

其中 $(x, z) \in D$, 则对 $x > x_0$ 有 $z(x) > y(x)$; 对 $x < x_0$ 有 $z(x) < y(x)$, 其中 $(x, z(x)) \in D, (x, y(x)) \in D$.

由文献[8]的性质 2. 12. 5 可知, 方程(2) 不存在第一类极限环, 因此其 Lagrange 稳定性与类梯度性是等价的. 下面我们考虑的环解均指第二类极限环. 设 $a = a_0$ 为临界阻尼值, 此时, 有轨线连接点 $(\sigma_1 - \Delta, 0)$ 与 $(\sigma_1, 0)$.

命题 1 当 a 小于临界阻尼即 $a < a_0$ 时, 方程(2) 存在第二类极限环.

证 由于当 $0 < a < a_0$ 时, 有 $|A_1 O| > |A_2 O|$, 因此当 $\sigma \in [\sigma_1 - \Delta, +\infty)$ 时, $\eta_1 > 0$. 且由(2) 式的第二个方程可知, 若 $\eta_1 \geq M$, 则 $\dot{\eta}_1 \leq 0$, 因此 η_1 有上界. 定义一个函数序列 $\eta_k(\sigma)$ 为在 σ 轴上方, 由平衡点 $(\sigma_1 - k\Delta, 0)$ 出发的不稳定流形, $k \in Z$. 由于 $\eta_k(\sigma)$ 可以由 $\eta_1(\sigma)$ 沿 σ 轴平移 $(-k+1)\Delta$ 得到, 于是对 $\sigma \in [\sigma_1 - \Delta, \sigma_1]$, 有 $M > \eta_{k-1}(\sigma) > \eta_k(\sigma)$ 及 $\eta_{k-1}(\sigma) = \eta_k(\sigma + \Delta)$, 因此当 $k \rightarrow \infty$ 时, 极限 $\eta_c(\sigma) = \lim_k \eta_k(\sigma)$ 存在, 既然

$$\begin{aligned} \eta_c(\sigma) &= \lim_k \eta_k(\sigma) = \lim_k \eta_{k-1}(\sigma) = \\ & \lim_k \eta_k(\sigma + \Delta) = \eta_c(\sigma + \Delta), \end{aligned} \tag{21}$$

则 $\eta_c(\sigma)$ 是有界的且是以 Δ 为周期的周期函数.

由于

$$\eta_k(\sigma) - \eta_k(\sigma_1 - \Delta) = \int_{\sigma_1 - \Delta}^{\sigma} \left[\frac{-\varphi(\sigma)}{\eta_k(\sigma)} - a \right] d\sigma, \tag{22}$$

因此, 方程两边对 k 取极限时, 就得到 $\eta_c(\sigma)$ 也满足上面的方程, 因而 $\eta_c(\sigma)$ 是方程(2) 的第二类极限环且满足

$$0 < \eta_c(\sigma) < M. \tag{23}$$

证毕. □

下面考虑 $a > a_0$ 的情况.

命题 2 当 a 大于临界阻尼即时, 方程(2) 不存在第二类极限环且当 $\sigma \rightarrow -\infty$ 时, $\eta_0(\sigma)$ 无上界.

证 首先证明当 $a > a_0$ 时, 方程(2) 不存在第二类极限环. 设如不然, 若 $\eta^*(\sigma)$ 为方程(2) 的对应 a 的第二类极限环, Γ^* 为对应的轨线. 由定义 3 知, 此类环解满足 $\eta^*(\sigma + \Delta) = \eta^*(\sigma)$, 因此把方程(17) 关于此环解从 0 到 Δ 积分, 得到

$$a \int_0^{\Delta} \eta^*(\sigma) d\sigma = - \int_0^{\Delta} \varphi(\sigma) d\sigma \tag{24}$$

由[8] 中的推论 2. 12. 3 可知, 当 $\sigma \rightarrow +\infty$ 时, $\lim \tilde{\eta}_0(\sigma) = -\infty$. 因此, 若 $\eta^*(\sigma_1) < 0$, 则由点 $(\sigma_1, \eta^*(\sigma_1))$ 出发的轨线不能穿过 $\tilde{\eta}_0$, 所以 $\eta^*(\sigma)$ 就不会是第二类极限环. 若 $\eta^*(\sigma_1) = 0$, 则轨线就应当连接点 $(\sigma_1 - \Delta, 0)$ 与 $(\sigma_1, 0)$, 由于已假定 $a > a_0$, 此为不可能, 因此只能有

$\eta^*(\sigma_1 >) > 0$ 另外, 由于 $a > a_0$, 因此当 σ 由 σ_1 递减到 $\sigma_1 - \Delta$ 时, 根据引理 1, 轨线 Γ^* 应全部在连接点 $(\sigma_1 - \Delta, 0)$ 与 $(\sigma_1, 0)$ 的轨线 Γ_0 的上方, 且由式(24), 可以推出

$$-\frac{1}{a_0} \int_0^\Delta \varphi(\sigma) d\sigma = \int_0^\Delta \eta_0(\sigma) d\sigma < \int_0^\Delta \eta^*(\sigma) d\sigma = -\frac{1}{a} \int_0^\Delta \varphi(\sigma) d\sigma \quad (25)$$

由上式可推出 $a < a_0$, 与假设矛盾. 因此, 当 $a > a_0$ 时, 方程(2)无第二类极限环.

其次, 我们证明当 $\sigma \rightarrow -\infty$ 时, $\eta_0(\sigma)$ 无上界. 设如不然, 由于当 $\sigma \in [-\infty, \sigma_1)$ 时, 显然有 $\eta_0(\sigma) > 0$, 因此若 $\eta_0(\sigma)$ 有上界, 则根据前面的证明可知方程(2)存在一第二类极限环, 而这是不可能的, 因此 $\eta_0(\sigma)$ 无上界. 证毕.

综上所述, 如果在区间 $[\sigma_1 - \Delta, \sigma_1]$ 内 $\eta_0(\sigma)$ 不等于零, 方程(2)就没有第二类极限环, 此时类摆系统是 Lagrange 稳定的, 也是类梯度的.

3 临界阻尼值 a_0 的估算

令

$$\phi(\sigma) = \nu |\varphi(\sigma)| - \varphi(\sigma), \quad (26)$$

其中

$$\nu = \frac{\int_0^\Delta \varphi(\sigma) d\sigma}{\int_0^\Delta |\varphi(\sigma)| d\sigma}. \quad (27)$$

由(9)式及上式可知, $-1 < \nu \leq 0$. 且 $\phi(\sigma)$ 的零点与 $\varphi(\sigma)$ 的零点相同, 并有

$$\phi\varphi = \nu |\varphi| \varphi - \varphi^2 < 0, \quad (28)$$

以及

$$\int_0^\Delta \phi(\sigma) d\sigma = 0. \quad (29)$$

因此, 由(12)、(28)及上式可知, 当 σ 由 σ_1 到 $\sigma_1 - \Delta$ 变化时, 有

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_1 - \Delta} \phi(\sigma) d\sigma \geq 0. \quad (30)$$

曲线 $\int_{\sigma_1}^{\sigma} \phi(\sigma) d\sigma$ 与 σ 轴的交点为 $(\sigma_1 - \Delta, 0)$, $(\sigma_1, 0)$, 如图 6 所示.

如果令 $z = \left[2 \int_{\sigma_1}^{\sigma} \phi(\sigma) d\sigma \right]^{1/2}$, 则

$$z \frac{dz}{d\sigma} + az + \varphi(\sigma) = \phi(\sigma) + \varphi(\sigma) + a \left[2 \int_{\sigma_1}^{\sigma} \phi(\sigma) d\sigma \right]^{1/2}, \quad (31)$$

1) 当 $\sigma \in [0, \sigma_1]$ 时, 由于 $\varphi(\sigma) \geq 0$, $\int_{\sigma_1}^{\sigma} \phi(\sigma) d\sigma$ 以及 $-1 < \nu \leq 0$, 因此有

$$z \frac{dz}{d\sigma} + az + \varphi(\sigma) = \nu \varphi(\sigma) + a \left[2(\nu - 1) \int_{\sigma_1}^{\sigma} \varphi(\sigma) d\sigma \right]^{1/2}. \quad (32)$$

由于上式等号右边中括号内为正的且在 $0 \leq \sigma \leq \sigma_1$ 时为单调递增函数, 令

$$a_1 = -\nu \max_{\sigma \in [0, \sigma_1]} \varphi(\sigma) \left[2(\nu - 1) \int_{\sigma_1}^{\sigma} \varphi(\sigma) d\sigma \right]^{-1/2}. \quad (33)$$

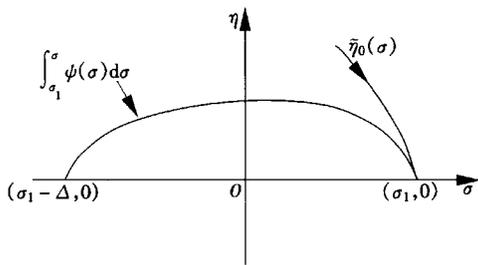


图 6 曲线 $\int_{\sigma_1}^{\sigma} \phi(\sigma) d\sigma$ 的示意图

因此, 若 $a \geq a_1$ 成立, 则(32) 式大于等于零.

2) 当 $\sigma \in [\sigma_1 - \Delta, 0]$ 时, 由于 $\varphi(\sigma) \leq 0$ 及 $\psi(\sigma) \geq 0$, 于是有

$$z \frac{dz}{d\sigma} + az + \varphi(\sigma) = -\nu\varphi(\sigma) + a \left[2(\nu - 1) \int_{\sigma_1}^0 \varphi(\sigma) d\sigma + 2(-\nu - 1) \int_0^{\sigma} \varphi(\sigma) d\sigma \right]^{1/2}. \tag{34}$$

由于上式等号右边中括号内第一项为一固定的正常数, 而第二项为负的且在 $\sigma \leq 0$ 时为单调递减函数, 令

$$a_2 = \nu \min_{\sigma \in [\sigma_1 - \Delta, 0]} \varphi(\sigma) \left[2(\nu - 1) \int_0^1 \varphi(\sigma) d\sigma + 2(-\nu - 1) \int_0^{\sigma} \varphi(\sigma) d\sigma \right]^{-1/2}. \tag{35}$$

因此, 若 $a \geq a_2$ 成立, 则(34) 式大于等于零.

综上所述, 若

$$a \geq \max[a_1, a_2], \tag{36}$$

则对 $\forall \sigma$, 有

$$z \frac{dz}{d\sigma} + az + \varphi(\sigma) \geq 0. \tag{37}$$

利用引理 1, 由(37) 式可以推出, 当 $\sigma \in [\sigma_1 - \Delta, \sigma_1)$ 时, $\eta_0(\sigma) > z(\sigma)$, 由此可知, $\eta_0(\sigma)$ 在 $[\sigma_1 - \Delta, \sigma_1]$ 内不等于零, 从而, 方程(2) 没有第二类极限环, 即方程是 Lagrange 稳定的从而是类梯度的. 因此, 其临界阻尼的上界为

$$a_0 < \max[a_1, a_2]. \tag{38}$$

由 a_1 及 a_2 的表达式可见, 临界阻尼的大小与 ν 的值有关, 特别是当 $\nu = 0$ 时, 临界阻尼为零, 即对任意 $a > 0$, 方程(2) 的所有解都收敛. 文献[8] 曾利用 Liapunov 方法证明了上述结果, 当 $\nu = 0$, 也就是函数 φ 在一个周期内具有零均值时, 即

$$\int_0^{\Delta} \varphi(\sigma) d\sigma = 0$$

则对任意 $a > 0$, 方程(2) 的所有解都收敛, 但其给出的估算临界阻尼的方法却没有包含上述结果. 因此利用上述方法得到的结果要好于文献[8] 的结果, 下面的例子也证明了这一点.

4 实 例

考虑如下的以 2π 为周期的非线性函数

$$\varphi(\sigma) = \sin(\sigma + \pi/3) - 0.4\sin(2\sigma + 2\pi/3) - \sin\pi/3 + 0.4\sin 2\pi/3,$$

在工程实际中, 同步电机的方程中包含的非线性函数可以归结为上述的形式^[9]. 对上述非线性函数, 其平衡点为 $(0, 0)$ 及 $(1.795, 0)$, 利用本文所给出的估算临界值的方法得到 a_0 的临界值为

$$a_0 < 1.18.$$

利用文献[8] 给出的方法得到的临界值是

$$a_0 < 1.96.$$

而根据我们的实测其临界值大约为 $a_0 < 1.04$, 可见利用本文所给出方法得到的结果要大大优于文献[8] 所得到的结果.

[参 考 文 献]

- [1] Leonov G A, Smirnova V B. Analysis of frequency_of_oscillations_controlled systems[A]. In: St Petersburg Ed. Proceedings of International Conference on Control of Oscillations and Chaos [C] (Russia). 1997, 2: 439—441.
- [2] Leonov G A, Tomayev A, Chshiyeva T. Stability of frequency_phase locked automatic frequency control systems[J]. Soviet Journal of Communications Technology and Electronics, 1992, 37(11): 1—9.
- [3] Tricomi F. Integrazione di unequazione differenziale presentatasi in elettrotecnica[J]. Annali Della Roma Scuola Normale Superiore de Pisa: Scienza Phys e Mat, 1933, 2: 1—20.
- [4] Andronow A A, Chaikin C E. Theory of Oscillations [M]. Princeton University Press, 1966.
- [5] Amerio L. Determinazione delle condizioni di stabilita per gli integrali di un' equazione ininteressante l' elettrotecnica[J]. Annali di Matematica Pura ed Applicata, 1949, 4(30): 75—90.
- [6] Hayes W D. On the equation for a damped pendulum under constant torque[J]. Z A M Ph, 1953, 4(5): 398—401.
- [7] Sansone G, Conti R. 非线性微分方程[M]. 黄启昌, 金成桴, 史希福 译. 北京: 科学出版社, 1983.
- [8] Leonov G A, Ponomarenko D V, Smirnova V B. Frequency_Domain Methods for Nonlinear Analysis [M]. Singapore: World Scientific, 1996.
- [9] Arie E, Botgros M, Halanay A, et al. Transient stability of the synchronous machine[J]. Rev Roum Sci Techn Serie Electrotechn et Energy, 1974, 19(4): 611—625.

Critical Damping of the Second_Order Pendulum_Like Systems

LI Xin_bin^{1, 2}, HUANG Yong_nian¹, YANG Ying¹, HUANG Lin¹

(1. Department of Mechanics and Engineering Science,

Peking Univeristy, Beijing 100871, P. R. China;

2. Institute of Electrical Engineering, Yanshan University,

Qin huan gdao 066004, P. R. China)

Abstract: First, the properties of solutions of a typical second_order pendulum_like system with a specified nonlinear function were dicussed. Then the case with a general form of nonlinearity is considered and its global properties were studied by using the qualitative theory of differential equations. As a result, sufficient conditions for estimating the critical damp are established, which improves the work by Leonov et al.

Key words: pendulum_like system; Lagrange stability; gradient_like behavior; limit cydes of the second kind