

有理分式的增广图示及其 在工程控制论中的应用

汪家诩

(杭州浙江大学力学系, 1980年3月1日收到)

摘 要

本文研究有理分式的增广图示. 分子分母分别为 n 及 m 次多项式的有理分式, 它的根轨迹方程的次数, 当 $n+m$ 是偶数时, 是 y^2 的 $\frac{n+m}{2}-1$ 次; 当 $n+m$ 是奇数时, 是 $(n+m-1)/2$ 次.

因此, $n+m \leq 10$ 的图示数据能用公式计算.

有理分式的增广图示能应用于研究反馈系统及特征方程的任一实系数作参数的图线特性.

用本文理论易证倒分式定理:

$$K_1 = f^{(n)}(s)/F^{(m)}(s), \text{ 与 } K_2 = F^{(m)}(s)/f^{(n)}(s)$$

二者在复数平面上的根轨迹完全相同.

又由图示知识发现, 不论 n 和 m 多大, 只要有理分式的零点和极点在实轴上相间排列, 它就没有复数根轨迹. 这样的系统不会发生振荡. 本文对这种分式可能存在的稳定区作较全面地分析.

一、有理分式增广图示的基本理论

现在研究下列复变数 s 的有理分式

$$K = \frac{f^{(n)}(s)}{F^{(d)}(s)} \equiv \frac{\sum_{i=0}^n a_i s^{n-i}}{\sum_{j=0}^m b_j s^{m-j}} \quad (1.1)$$

的增广图示, 其中 K 限定是实数. 将 $s = x + iy$ 代入 (1.1), 再应用 [1] 一文中 (1.3) 的写法, 并将 $\psi^{(n)}(x, y^2)$, $\phi^{(n)}(x, y^2)$ ……简写为 $\psi^{(n)}$, $\phi^{(n)}$ ……等, 则得

$$K = [\psi^{(n)} + iy\phi^{(n)}] / [\psi^{(d)} + iy\phi^{(d)}]$$

将上式分子和分母同乘以 $\psi^{(d)} - iy\phi^{(d)}$, 再依虚和实分解得

$$y = 0, \psi^{(d)}\phi^{(n)} - \psi^{(n)}\phi^{(d)} = 0 \quad (1.2)$$

$$K = [\psi^{(n)}\psi^{(d)} + y^2\phi^{(d)}\phi^{(n)}] / [(\psi^{(d)})^2 + y^2(\phi^{(d)})^2] \quad (1.3)$$

利用 (1.2), 可将 (1.3) 进一步简化为

$$K = \psi^{(n)}/\psi^{(d)} \text{ 或 } K = \phi^{(n)}/\phi^{(d)} \quad (1.4)$$

(1.2) 和 (1.4) 是有理分式增广图示法的基本算式. (1.2) 仅含 x, y 二个变数, 所以 (1.2) 就

是(1.1)的根轨迹方程。(1.2)包含 $y=0$ 。所以 x 轴是根轨迹的一部分。又 ϕ 和 ψ 中只含 y^2 ，所以根轨迹对 x 轴成对称。按照[1]一文中(1.8)及(1.9)， y^2 的最高幂次项对(1.2)成对配合，可知当 $m+n$ 为偶数时，(1.2)是 y^2 的 $(n+m-2)/2$ 次方程；当 $m+n$ 是奇数时，(1.2)是 y^2 的 $(n+m-1)/2$ 次方程^[2]。所以只要 $m+n \leq 10$ ，(1.2)都可以用代数法求解。当然若 $m+n \geq 11$ ，就要用数字法求解。因 y 是实数，所以对设定 x 解出的 y^2 ，只有正根是可用的。对于(1.2)中 $y=0$ ，它使(1.1)和(1.3)都变成实曲线。这是以往图示的内容，当然包括在增广图示中。这种曲线在 (K, x) 图中用实线表示。

(1.4)中有两式。后面一式 ϕ 比前面一式 ψ 次数较低。故使用较简便。但当 $f^{(n)}(s)$ 或 $F^{(d)}(s)$ 有一个是常数时，只能用(1.4)的前一式。

二、有理分式根轨迹的倒分式定理

因(1.2)施以轮换 (n, d) 方程式不变，所以下列二个有理分式

$$K_1 = f^{(n)}(s)/F^{(d)}(s), \quad K_2 = F^{(d)}(s)/f^{(n)}(s)$$

在复数平面上的根轨迹完全相同。

当然对(1.4)二者是不同的， K_1 的零点是 K_2 的极点， K_1 的极点是 K_2 的零点。

三、有理分式的渐近线

设 $n > m$ ，则(1.1)可写为

$$K = \frac{a_0}{b_0} s^{n-m} \frac{1 + \frac{a_1}{a_0} \frac{1}{s} + \frac{a_2}{a_0} \frac{1}{s^2} + \dots + \frac{a_n}{a_0} \frac{1}{s^n}}{1 + \frac{b_1}{b_0} \frac{1}{s} + \frac{b_2}{b_0} \frac{1}{s^2} + \dots + \frac{b_m}{b_0} \frac{1}{s^m}}$$

$$= \frac{a_0}{b_0} s^{n-m} \left[1 + \left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0} \right) \frac{1}{s} + \dots \right]$$

$$\text{当 } |s| \rightarrow \infty, K \rightarrow \frac{a_0}{b_0} \left[s + \frac{1}{n-m} \left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0} \right) \right]^{n-m}$$

$$\text{或 } K \frac{b_0}{a_0} = \left\{ \left[x + \frac{1}{n-m} \left(\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0} \right) \right] + iy \right\}^{n-m}$$

若 $K \frac{b_0}{a_0} > 0$ ，则上式两边开 $n-m$ 次方得

$$\left(K \frac{b_0}{a_0} \right)^{\frac{1}{n-m}} \left(\cos \frac{2h\pi}{n-m} + i \sin \frac{2h\pi}{n-m} \right) = x + \frac{\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0}}{n-m} + iy$$

故得(1.2)的一组渐近半线为

$$y = \left(x + \frac{\frac{a_1}{a_0} - \frac{b_1}{b_0}}{n-m} \right) \operatorname{tg} \frac{2h\pi}{n-m} \quad h=0, 1, 2, \dots, n-m-1 \quad (3.1)$$

当 $K \frac{b_0}{a_0} < 0$. 可推得另一组渐近半线

$$y = \left(x + \frac{a_1 - \frac{b_1}{b_0}}{n-m} \right) \operatorname{tg} \frac{2h\pi + \pi}{n-m} \quad h=0, 1, 2, \dots, n-m-1 \quad (3.2)$$

(3.1)、(3.2) 两式结合共得 $n-m$ 根直线^[3].

依例分式定理可知上列渐近线也适用于 $n < m$ 的情况. 所以连 x 轴在内, 共 $|n-m|$ 根渐

近线 $|n-m|$ 等分在中心点 $\left(-\frac{a_1 - \frac{b_1}{b_0}}{|n-m|}, 0 \right)$ 的平角.

四、根轨迹与 X 轴的交点定理

定理: 有理分式 (1.1) 的实曲线的极值点的 x 坐标正好是 (1.1) 的根轨迹与 x 轴交点的 x 坐标.

证: K_r 的极值点必须适合

$$\frac{d}{dx} K_r = \frac{d}{dx} [f^{(n)}(x)/F^{(d)}(x)] = 0$$

$$\text{故得} \quad \left(\frac{df^{(n)}(x)}{dx} \right) F^{(d)}(x) - f^{(n)}(x) \frac{d}{dx} (F^{(d)}(x)) = 0 \quad (4.1)$$

将 [1] 中 (1.8) 和 (1.9) 两式中的 $y=0$, 得

$$\phi^{(n)} = \frac{d}{dx} f^{(n)}(x), \quad \psi^{(n)} = f^{(n)}(x), \quad \phi^{(d)} = \frac{d}{dx} F^{(d)}(x), \quad \psi^{(d)} = F^{(d)}(x)$$

将上四式代入 (1.2) 即得 (4.1), 故得证

五、有理分式增广图示之例

$$K = \frac{s^4 + a_1 s^3 + a_2 s^2 + a_3 s + a_4}{s^3 + b_1 s^2 + b_2 s + b_3}$$

因 $n-m=1$, 所以本题除 x 轴以外, 没有其他渐近线. 于是可猜知根轨迹是封闭曲线. 因 $m+n=7$. 所以根轨迹方程是 y^2 的三次方程. 又因 m, n 中之最大数为 4. 故 (K, x) 曲线与任一直线 $K=C$ 的交点数为 4. 按 ψ, ϕ 的定义:

$$\psi^{(n)} = x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4 - (6x^2 + 3a_1 x + a_2) y^2 + y^4$$

$$\phi^{(n)} = 4x^3 + 3a_1 x^2 + 2a_2 x + a_3 - (4x + a_1) y^2$$

$$\psi^{(d)} = x^3 + b_1 x^2 + b_2 x + b_3 - (3x + b_1) y^2$$

$$\phi^{(d)} = 3x^2 + 2b_1 x + b_2 - y^2$$

将以上各式代入 (1.2) 和 (1.4) 得

$$y^6 + (3x^2 + 2b_1 x + a_1 b_1 - a_2 - b_2) y^4 + [3x^4 + 4b_1 x^3 + 2(a_1 b_1 + b_2 - a_2) x^2 + 2(a_1 b_2 - a_3 - 2b_3) x + (a_4 + a_2 b_2 - a_1 b_3 - a_3 b_1)] y^2 + [x^6 + 2b_1 x^5$$

$$+ (3b_2 - a_2 + a_1b_1)x^4 + 2(2b_3 + a_1b_2 - a_3)x^3 + (3b_2a_1 + a_2b_2 + b_1a_3 - 3a_4)x^2 + 2(a_2b_3 - b_1a_4)x + (a_3b_3 - a_4b_2) = 0 \tag{5.1}$$

$$K_C = \frac{4x^3 + 3a_1x^2 + 2a_2x + a_3 - (4x + a_1)y^4}{3x^2 + 2b_1x + b_2 - y^2} \tag{5.2}$$

将 (5.1) 写成 $(y^2)^3 + \beta_1(y^2)^2 + \beta_2y^2 + \beta_3 = 0$ (5.3)

然后用 $y^2 = W - \frac{\beta_1}{3}$ (5.4)

化成 $W^3 + 3pW + 2q = 0$ (5.5)

其中 $p = \frac{1}{3} \left(\beta_2 - \frac{\beta_1^2}{3} \right)$ (5.6)

$$q = \frac{1}{2} \left(\beta_3 - \frac{\beta_1\beta_2}{3} + \frac{2\beta_1^3}{27} \right) \tag{5.7}$$

当 x 值使 $p > 0$ 时, (5.5) 有一个实根

$$W = \sqrt[3]{-q + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{-q - \sqrt{\Delta}} \tag{5.8}$$

其中 $\Delta = q^2 + p^3$

又当 x 值使 $p < 0, \Delta < 0$ 时, (5.5) 有三个实根:

$$W_i = 2\sqrt{-p} \cos [(2h\pi + \theta)/3] \quad i = 0, 1, 2. \tag{5.10}$$

其中 θ 可用下式计算

$$\cos\theta = -q/\sqrt{-p^3} \tag{5.11}$$

将上述算法应用于求下式之图示⁽⁴⁾

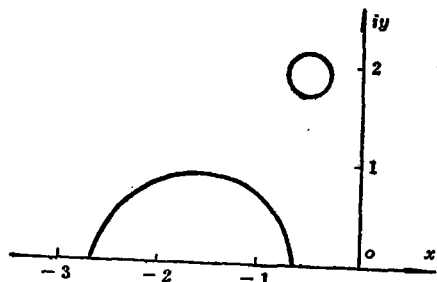


图 1 (a)

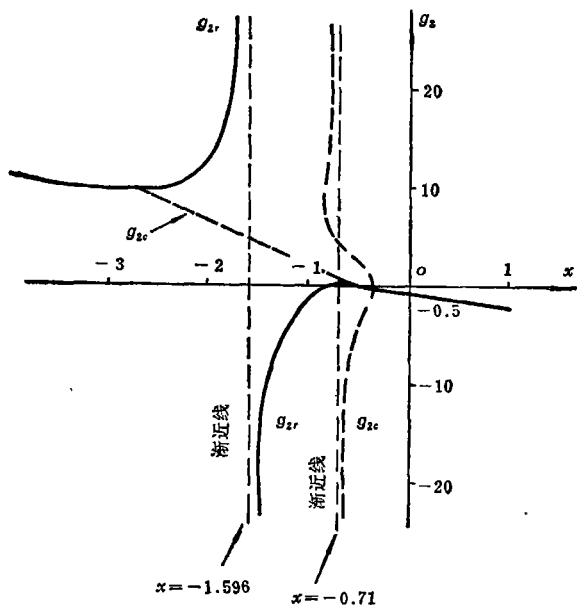


图 1 (b)

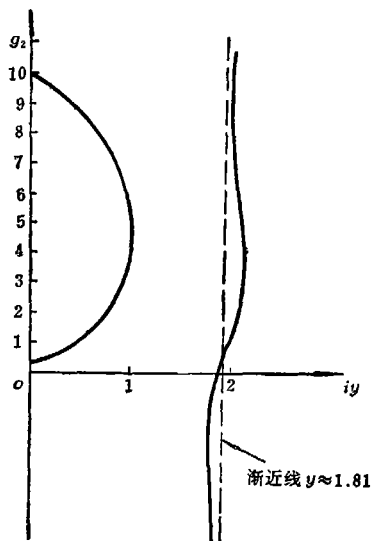


图 1 (c)

例 1:
$$g_2 = -\frac{1}{2} \frac{(2s+1)(2s^3+3s^2+9s+6)}{s^3+3s^2+6s+6}$$

可得三幅图线如图 1. 从 (x, iy) 图看出, 根轨迹由三个封闭曲线组成, 它们都在 $x < 0$ 半平面. 从 (g_2, x) 图看出 $g_2 > -0.5$ 系统稳定¹⁾.

六、有理分式增广图示的应用

(A) 对于反馈伺服系统中的应用

为了反馈伺服系统的设计, W. R. Evans 于 1948 年创造了根轨迹法^[6]. 但是他并没有得到根轨迹方程, 他只提出在根轨迹上点的幅角条件和几条根轨迹特性的一些法则, 求作根轨迹要用逐点检验角度来确定. 现在有了 [1] 中 (1.8) 和本文 (1.2) 的根轨迹方程, 对于十点 (零点和极点) 以内的有理分式都能求解, 这样就很容易作出完整的根轨迹. 不但如此, 而且可以进行解析地研究. 又因本法尚有 (K, x) 和 (K, iy) 曲线, 因此可以明显看出绝对和相对稳定区, 以及掌握放大和自振频率的关系.

反馈伺服系统的特征方程为

$$1 + KH(s)G(s) = 0$$

依本文方法改写为

$$K = -1/H(s)G(s) \tag{6.1}$$

上式右端一般是 s 的有理分式, 可应用增广图示来显示系统特性.

例 2:
$$H(s)G(s) = \frac{K(s+1)}{s(s-1)(s^2+4s+16)} \tag{6.1}$$

将上式写成 (6.1)

$$K = -s(s-1)(s^2+4s+16)/(s+1)$$

上式的根轨迹方程经简化后为

$$y^4 - 2y^2(x^2 + x + 4.5) - (3x^4 + 10x^3 + 21x^2 + 24x - 16) = 0$$

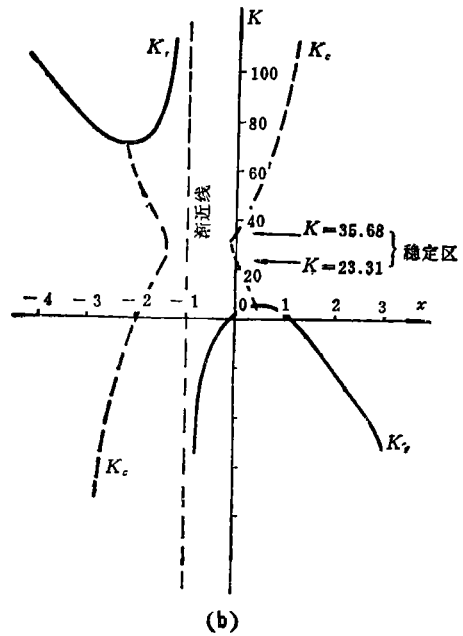
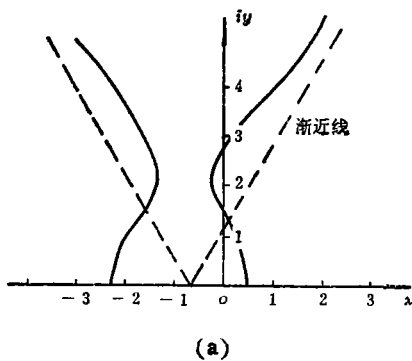


图 2

¹⁾ g_2 不限定为实数, 则 $g_2 > -0.5$ 仅是稳定的必要条件.

K_r 和 K_c 可分别表为

$$K_r = -(x^4 + 3x^3 + 12x^2 - 16x)/x + 1$$

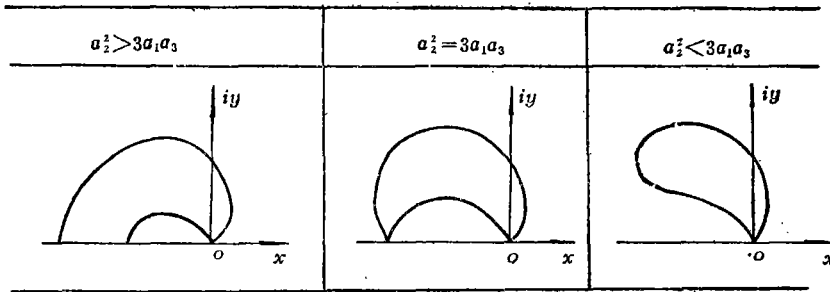
$$K_c = -(4x^3 + 9x^2 + 24x - 16) + y^2(4x + 3)$$

应用以上三式可作出 (x, iy) 及 (x, K) 曲线如图 2. 从后者可看出稳定区间是 (23.31, 35.68) 如果我们只需要考虑稳定问题, 不必要的图线就可省去不画, 如 (K, iy) 及图 2(b) 渐近线左边部分. 甚至对小数 ϵ (例如 0.1) 就 $x = -\epsilon, 0, \epsilon$ 计算也行.

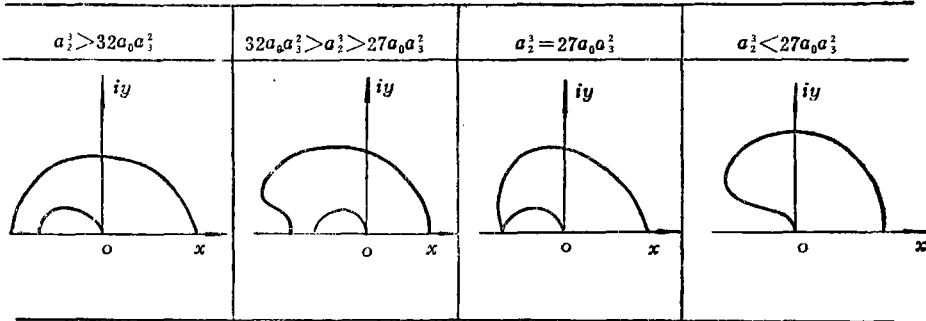
(B) 特征方程任一系数作参数的图线

有了有理分式的根轨迹方程 (1.2), 就能研究一个特征方程的任一系数 a_i 作参数的图线. 例如三次特征方程

(i) 以 a_0 为参数



(ii) 以 a_1 为参数



(iii) 以 a_2 为参数

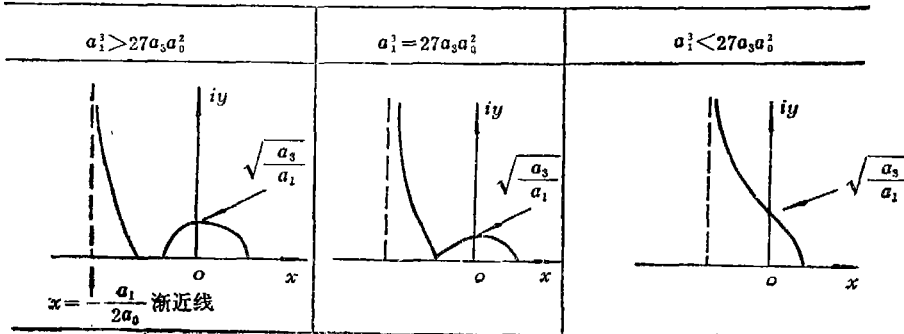


图 3

$$a_0 s^3 + a_1 s^2 + a_2 s + a_3 = 0$$

顺次以 a_0, a_1, a_2 为参数的根轨迹方程经求解 y^2 后分别可写为

$$y^2 = - \left(x^2 + \frac{a_2}{a_1} x - \frac{a_3}{2a_1} \right) \pm \frac{1}{a_1} \sqrt{(a_2^2 - 4a_1 a_3) x^2 - a_2 a_3 x + \frac{a_3^2}{4}}$$

$$y^2 = -x^2 + \frac{a_2}{2a_0} \pm \sqrt{a_2^2 + 8a_0 a_3 x}$$

$$y = \pm \sqrt{\frac{a_3}{2a_0 x + a_1} - x^2}$$

于是经分析后, 可得根轨迹类型图线如图 3.

(C) 特征方程的某些系数是 K 的一次式的图示

因为自特征方程解出 K 后, K 就是 s 的有理分式. 例如^[7]

$$s^3 + s^2 + (K + 1.25)s + K = 0$$

解得 $K = -(s^3 + s^2 + 1.25s)/(s + 1)$

因此可用有理分式的增广图示来研究这系统.

七、没有复数根轨迹的有理分式及其稳定区的确定

现在先举出一有理分式没有复数根轨迹的必须条件.

(i) 分子, 分母都能在实数域内分解成一次式.

因若分子包含不能分解的二次式, 则 $K=0$ 就有复数根. 若分母包含不能分解的二次式, 则 $K=\infty$ 就有复数根.

(ii) 不存在除 x 轴以外的渐近线.

因为有了除 x 轴以外的渐近线, 一定有复根曲线来趋近它. 应用 (3.1) 和 (3.2) 两式可知必须有

$$|n-m| = 0 \text{ 或 } 1 \quad (7.1)$$

(iii) 将零点和极点在实轴上按大小排列, 则不能有接连二个零点.

因按 Roule 定理, 在 K 的二个零点之间, 一定有一个 x 使 $dK/dx=0$. 于是在这二个零点之间 K 曲线至少有一个极值点. 自极值点出发, 一定存在着支复根曲线 K_c .

(iv) 不能有接连二个极点.

如果一个有理分式有接连二个极点, 那么它的倒分式就有接连二个零点. 根据 (iii), 后一分式当不存在复根根迹时就不允许有两个零点; 故前者亦不允许有两个极点.

总合以上四条必须条件可知“一个有理分式要是没有复数根轨迹必须它的零点和极点在实轴 x 上相间排列”.

现在说明上述条件也是充分的. 将 (1.1) 写为

$$K(s) = a_0 \prod_{i=1}^n (s - z_i) / b_0 \prod_{i=1}^m (s - p_i) \quad (7.2)$$

$$\text{则 } K(0) = (-1)^{n+m} a_0 z_1 z_2 \cdots z_n / b_0 p_1 p_2 \cdots p_m \quad (7.3)$$

现在将零点和极点按大小次序排列

$$z_1 > z_2 > z_3 \cdots > z_n, p_1 > p_2 > \cdots > p_m$$

则零点和极点相间排列时, n 和 m 只有下列三种可能性: (i) $n=m+1$, (ii) $n=m$, (iii) $n=m-1$

这和条件 (7.1) 一致. 现在分别讨论其图线如下.

(i) $n=m+1$

因零点和极点相间排列, 又零点比极点多一个, 所以一定有 $z_1 > p_1$. 为了“一图多用”, 现在采用将 K 轴平移来代替零点和极点大小变更而引起的曲线移动. 先将 (1.1) 化成 $a_0 = b_0$

$= 1$ 的形式, 可令 $K' = \frac{b_0}{a_0} K$, 然后将 K' 看成 K . 以 $m=3$ 为例, 如图 4 (a). 图中以

“o”表示零点, 以“x”表示极点. 曲线的渐近线以虚线表示. 任作一直线 $K=C$, 则 C 自 $-\infty$ 至 $+\infty$, 这直线与实曲线都交于四点. 一般若 L 是 m 和 n 中的最大的一个数, 那么因 (7.2) 可写成

$$K \prod_{j=1}^m (s - p_j) - \prod_{i=1}^n (s - z_i) = 0 \tag{7.4}$$

所以 $K=C$ 与 (K, x) 曲线的交点数为 L . 令 $K=C$ 与 K_r 交于 L_r 点, 与 K_c 交于 L_c 点, 则有

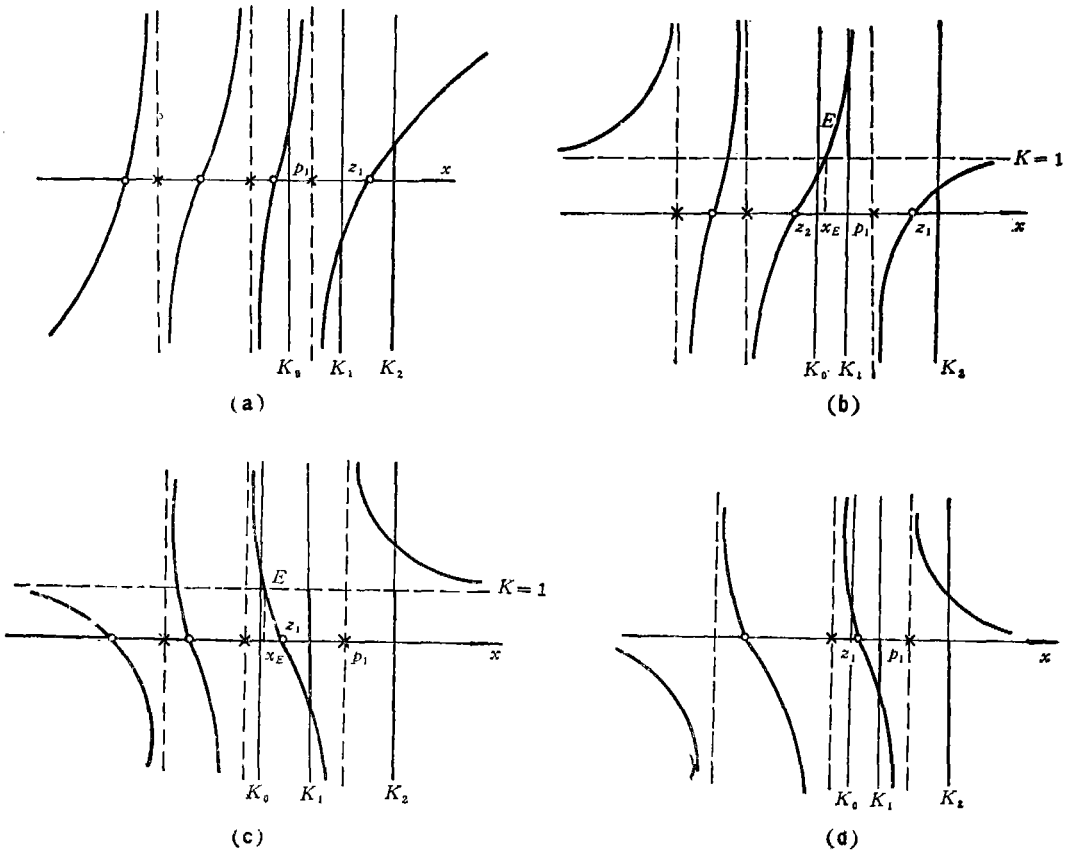


图 4

$$2L_c + L_r = L \quad (7.5)$$

现在(a)图 $L_r = L$, 所以 $L_c = 0$. 因此不存在复根曲线. 图4中其他图线也有这样的结论. 所以充分性已经证明.

现在来求零点和极点相间排列情况下的稳定区间. (在图4中稳定区间用粗线划出).

在图4(a), K 轴在 K_0 位置则 $p_1 > 0$. 可看出无稳区. K 轴在 K_1 位置. $z_1 > 0 > p_1$, 稳区在 $K < 0$, 而为 $(-\infty, K(0))$. K 在 K_2 , $z_1 < 0$ 稳区在 $K > 0$ 亦存在, 亦可写着 $(-\infty, K(0))$.

(ii)(I) $n=m$, $z > p_1$. 如图4(b).

因 $x \rightarrow \infty$, 则 $K \rightarrow 1$. 故有水平渐近线 $K=1$. 设通过 z_2 的实曲线与 $K=1$ 直线相交于 E , x_E 为 E 的横坐标. 则由图 K 在 K_0 , $x_E > 0$, 无稳区; K 在 K_1 , 则 $z_1 > p_1 > 0 > x_E$, 稳区为 $(1, K(0))$; K 在 K_2 , 则 $p_1 < 0$. 稳区为二段, 一段 $(-\infty, K(0))$, 另一段 $(1, +\infty)$.

(ii)(II) $n=m$, $p_1 > z_1$, 如图4(c).

K 在 K_0 , $x_E > 0$, 无稳区; K 在 K_1 , $p_1 > 0 > x_E$, 稳区 $(K(0), 1)$; K 在 K_2 , $0 > p_1$, 稳区分为二段, $(-\infty, 1)$ 及 $(K(0), +\infty)$.

(iii) $n=m-1$. 如图4(d).

K 在 K_0 , $p_1 > z_1 > 0$, 无稳区; K 在 K_1 , $p_1 > 0 > z_1$, 稳区为 $(K(0), 0)$; K 在 K_2 , $p_1 < 0$, 稳区分为二段: $(-\infty, 0)$ 及 $(K(0), +\infty)$.

参 考 文 献

1. 汪家诤, 多项式的增广图示及其在工程控制论中的应用, 应用数学与力学, 第2卷, 第3期, (1981).
2. 袁兆鼎, 毕德华, 根轨迹计算法, 应用数学与计算数学, I, 1(1964), 13—17.
3. Goldberg, J. H., Automatic Controls: Principles of Systems Dynamics, Allyn and Bacon, Inc. Boston (1964), 235.
4. 钱学森, 工程控制论, 科学出版社 (1956), 88.
5. Evans, W. R., Trans. AIEE, 67 (1948), 547—551.
6. Katsuhiko Ogata, Modern Control Engineering Prentice-Hall (1970).
绪方胜彦著, 现代控制工程, 科学出版社, 274—275.
7. Ku, Y. H., Analysis and Control of Linear Systems, (1962), 193—194.

Extended Graphical Representation of Rational Fractions with Applications to Cybernetics

Wong Chia-ho

(Zhejiang University, Hangzhou)

Abstract

In this paper, we discuss the extended graphical representation of the fraction of a complex variable s ,

$$K = \sum_{i=0}^n a_i s^{n-i} / \sum_{j=0}^m b_j s^{m-j}$$

where K is confined to be real. Three figures of the above fraction can be used in feedback systems as well as in the study of the properties of figures for any one coefficient of a characteristic equation which is used as a real parameter.

It is easy to prove the following theorem:

$$K_1 = f^{(n)}(s)/F^{(d)}(s) \text{ and } K_2 = F^{(d)}(s)/f^{(n)}(s)$$

have the same root locus.

By this graphical theory, we find out that if the zeros and poles of a fraction are alternately placed on the axis x , then there is no complex root locus of this fraction, therefore the state of such a system is always nonoscillatory. Using these figures of this fraction, we can discuss its stable interval systemically.