

缓变的任意截面渠道中的孤立波*

周 显 初

(北京中国科学院力学所, 1981年1月31日收到)

摘 要

本文研究了在流动方向可以有缓慢变化的任意截面渠道中的孤立波, 导出了缓变系数 KdV 方程, 并求出了此方程的首项近似解. 导出了孤立波的速度表示式, 以及孤立波的波幅与渠道几何尺寸的关系, 并把它们应用于三角形渠道、矩形渠道. 对于变深度、变宽度矩形渠道的情况, 本文的结果与 Johnson、Shuto 及 Mile 等人所得的结果一致.

一、序 言

自 1834 年 Russell 发现孤立波以后, 它一直为人们所注意, 这方面的论述也很多. 由于平底的矩形渠道特别简单, 所以这种渠道中的孤立波讨论了不少. 但是在很多工程实际问题中, 渠道往往不是这样, 而是截面具有任意形状, 且在流动方向有所变化. 截面形状及其变化对孤立波的影响是令人感兴趣的问题.

Peter(1966)、Peregrine(1968)首先研究了任意截面渠道中的孤立波. 他们的研究都假定了截面形状沿长度方向不变. 后来, Grimshaw(1970)、Johnson(1973a,b)研究了渠道深度随流动方向而变的矩形渠道中的孤立波. Shuto(1974)研究了深度、宽度沿流动方向有变化的矩形渠道. Grimshaw(1978)还研究了缓变的任意截面渠道中的内波.

本文研究了在流动方向可以有缓慢变化的任意截面渠道中的孤立波, 导出了缓变系数 KdV 方程, 并求出了该方程的首项近似解. 导出了孤立波速度的表示式和孤立波的幅度与渠道几何尺寸的关系, 并把它们应用于三角形渠道、矩形渠道. 在变深度、变宽度矩形渠道情形中, 这些普遍的结果分别与 Johnson(1973 a,b)、Shuto(1974)及 Mile(1977)等人得出的结果一致.

二、方 程

我们研究不可压、无粘、无旋流动. 渠道的横断面及坐标轴如图一所示, x' 轴为流动方向, z' 轴铅垂向上, 坐标原点在自由面的平衡位置. 渠道的固壁形状为 $y' = l'_{\pm}(z', x')$. 我们假定: (1) 渠道的深度和宽度是同量级的; (2) 水深远小于波长, 即 $1 \gg \epsilon = (h/\lambda)^2$

* 李家春推荐.

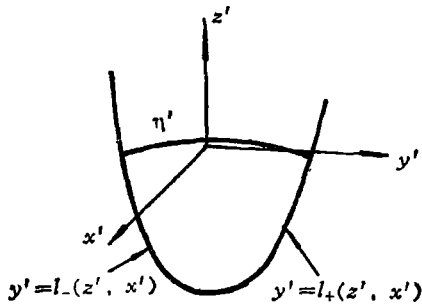


图 1

$= O\left(\frac{a}{h}\right)$, 其中: λ 为波长, h 为特征水深, a 为波幅; (3) 渠道形状的变化是缓慢的, 即 $y' = l_{\pm}(z', \epsilon \mu x' / \lambda)$, 其中 μ 为渠道缓变的特征参数.

我们引入如下的无量纲量.

$$\begin{aligned} x' &= \lambda x & y' &= h y \\ z' &= h z & t' &= \lambda t / \sqrt{gh} \\ \eta' &= \epsilon h \eta & l'_{\pm} &= h l_{\pm} \\ u' &= \epsilon \sqrt{gh} u & v' &= (\epsilon \sqrt{gh} \frac{h}{\lambda}) v \end{aligned}$$

$$w' = (\epsilon \sqrt{gh} \frac{h}{\lambda}) w \qquad p' - p_0 = \rho gh (-z + \epsilon p)$$

其中, 带 ' 号的量为有量纲量, (x, y, z) 为坐标, t 为时间, $z = \eta(x, y, t)$ 为自由面高度, u, v, w 为 x, y, z 方向的速度, p 为压力, p_0 为自由表面压力, ρ 为流体密度, g 为重力加速度.

在这种情况下, 流体力学基本方程变为:

$$\left. \begin{aligned} u_t + \epsilon uu_x + \epsilon vv_y + \epsilon ww_z + p_x &= 0 \\ \epsilon[v_t + \epsilon(uv_x + vv_y + vw_z)] + p_y &= 0 \\ \epsilon[w_t + \epsilon(w_x u + vw_y + ww_z)] + p_z &= 0 \\ u_x + v_y + w_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

边界条件为:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon p &= z \\ w &= \eta_t + \epsilon u \eta_x + \epsilon v \eta_y \\ v &= w l'_{\pm x} + u l'_{\pm y} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{在 } z = \epsilon \eta \text{ 上} \\ \text{在 } y = l_{\pm}(z, \epsilon \mu x) \text{ 上} \end{array} \quad (2.2)$$

其中, 下标 x, y, z, t 表示对该变量的偏微商.

我们引进变换

$$\xi = f(x) - t \qquad \epsilon x = X \quad (2.3)$$

其中 f 为待定函数.

方程 (2.1) 变为

$$\left. \begin{aligned} -u_{\xi} + \epsilon u(f' u_{\xi} + \epsilon u_X) + \epsilon vv_y + \epsilon ww_z + f' p_{\xi} + \epsilon p_X &= 0 \\ \epsilon[-v_{\xi} + \epsilon u(f' v_{\xi} + \epsilon v_X) + \epsilon vv_y + \epsilon vw_z] + p_y &= 0 \\ \epsilon[-w_{\xi} + \epsilon u(f' w_{\xi} + \epsilon w_X) + \epsilon vw_y + \epsilon ww_z] + p_z &= 0 \\ f' u_{\xi} + \epsilon u_X + v_y + w_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4)$$

其中 $f' = \frac{d}{dx} f(x)$.

边界条件变为:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon p &= z \\ w &= -\eta_{\xi} + \epsilon u(f' \eta_{\xi} + \epsilon \eta_X) + \epsilon v \eta_y \\ v &= w l'_{\pm x} + \epsilon u l'_{\pm X} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{在 } z = \epsilon \eta \text{ 上} \\ \text{在 } y = l_{\pm}(z, \mu X) \text{ 上} \end{array} \quad (2.5)$$

u, v, w, p, η 都按下式展开:

$$Q = Q_0 + \varepsilon Q_1 + \varepsilon^2 Q_2 + \dots \quad (2.6)$$

得零阶量的方程及边条件如下:

$$-u_{0,t} + f' p_{0,t} = 0 \quad (2.7a)$$

$$p_{0,y} = 0 \quad (2.7b)$$

$$p_{0,z} = 0 \quad (2.7c)$$

$$f' u_{0,t} + v_{0,y} + w_{0,z} = 0 \quad (2.7d)$$

$$\eta_0 = p_0, \quad w_0 = -\eta_{0,t} \quad \text{在 } z = 0 \text{ 上} \quad (2.8a)$$

$$v_0 = w_0 l_{\pm} \quad \text{在 } y = l_{\pm}(z, \mu X) \text{ 上} \quad (2.8b)$$

由 (2.7b)、(2.7c) 式知, p_0 与 y, z 无关, 所以由 (1.8a) 式可知 η_0 只是 ξ, X 的函数, 且

$$\eta_0(\xi, X) = p_0(\xi, X) \quad (2.9)$$

由 (2.7a) 式及 (2.9) 式可知:

$$u_{0,t} = f' p_{0,t} = f' \eta_{0,t}$$

所以

$$u_0 = f' \eta_0(\xi, X) \quad (2.10)$$

(由孤立波的无穷远处的条件, 可知积分常数为零).

下面我们来定出变换 (2.3) 中的待定函数 f .

在渠道横截面内对 (2.7d) 式积分, 可得:

$$\iint_{(\sigma)} (v_{0,y} + w_{0,z}) dy dz = \iint_{(\sigma)} -f' u_{0,t} dy dz = -f' u_{0,t} A$$

其中, $A = \iint_{(\sigma)} dy dz =$ 渠道过水断面面积, σ 为渠道过水断面区域. 利用 Green 公式及 (2.8a)、(2.8b) 式可得

$$\iint_{(\sigma)} (v_{0,y} + w_{0,z}) dy dz = \int_{(s)} v_0 dz - w_0 dy = -\eta_{0,t} l$$

其中, $l = l_+(0, \mu X) - l_-(0, \mu X) =$ 水面宽度, s 为 σ 的周线, 由此得出

$$f'^2 = l/A \quad (2.11)$$

对于矩形渠道, 由 (2.11) 式可见, $f'^2 = 1/h = 1/c^2$, (c 为波速), 变换 (2.3) 等于是求行波解. 这也适用于任意截面的渠道.

现在来解 v_0, w_0 . 由流动是无旋的条件得到 $v_{0,y} = w_{0,z}$, 由此引入势函数 $\varphi(\xi, X, y, z)$, 使

$$\varphi_y = v_0, \quad \varphi_z = w_0$$

再引入函数 Ψ , 使

$$\varphi = -f'^2 \eta_{0,t} \Psi + B(\xi, X) \quad (2.12a)$$

且

$$\iint_{(\sigma)} \Psi dy dz = 0 \quad (2.12b)$$

则由 (2.7d) 式及 (2.8a)、(2.8b) 式可知, Ψ 满足的方程及边界条件为:

$$\Psi_{yy} + \Psi_{zz} = 1 \quad (2.13)$$

$$\Psi_z = A/l \quad \text{在 } z = 0 \text{ 上}$$

$$\Psi_n = 0 \quad \text{在 } y = l_{\pm}(z, \mu X) \text{ 上}$$

这里 Ψ_n 是 Ψ 沿渠道侧壁法线方向的微商。由于渠道侧壁的方程不随时间 t 而变化，所以 Ψ 与 ξ 无关，是 X, y, z 的函数。求解 Ψ 是求解典型的泊松方程的牛曼边值问题，可以用解析法或数值方法求解。

为了得到 η_0 的方程，我们必须考虑一阶量 一阶量的方程和边界条件为：

$$-u_{1,\xi} + f' u_0 u_{0,\xi} + f' p_{1,\xi} + p_{0,X} = 0 \quad (2.14a)$$

$$-v_{0,\xi} + p_{1,y} = 0 \quad (2.14b)$$

$$-w_{0,\xi} + p_{1,z} = 0 \quad (2.14c)$$

$$f' u_{1,\xi} + u_{0,X} + v_{1,y} + w_{1,z} = 0 \quad (2.14d)$$

$$\left. \begin{aligned} p_1 &= \eta_1 \\ w_{0,z} \eta_0 + w_1 &= -\eta_{1,\xi} + f' u_0 \eta_{0,\xi} \end{aligned} \right\} \text{在 } z=0 \text{ 上} \quad (2.15)$$

$$v_1 = w_1 l_{\pm z} + u_0 l_{\pm X} \quad \text{在 } y = l_{\pm}(z, \mu X) \text{ 上}$$

当然，我们不需要解出所有的一阶量，我们只需先解出 p_1 即可得出 η_0 的方程。由 (2.14b)、(2.14c) 得出

$$p_1 = \int w_{0,\xi} dz = \int v_{0,\xi} dy = \varphi_{\xi} + C_1(\xi, X) \quad (2.16a)$$

由边界条件(2.15)式定出

$$C_1 = \eta_1 - \varphi_{\xi}(\xi, X, y, 0) \quad (2.16b)$$

所以

$$p_1 = -f'^2 \eta_{0,\xi\xi} \Psi(X, y, z) + \eta_1 + f'^2 \eta_{0,\xi\xi} \Psi(X, y, 0) \quad (2.16c)$$

现在可以写出 η_0 的方程了。在渠道过水断面区域对(2.14d)式积分

$$\iint_{\sigma_1} (-f' u_{1,\xi} - u_{0,X}) dy dz = \iint_{\sigma_1} (v_{1,y} + w_{1,z}) dy dz = \iint_{\sigma_1} v_1 dz - w_1 dy \quad (2.17)$$

用 (2.14a) 式消去 (2.17) 式中的 $u_{1,\xi}$ ，应用边界条件 (2.15)。把 (2.17) 式积分出来，经过整理之后（推导见附录 1），可得

$$\eta_0 (\sqrt{Al})_X + 2\sqrt{Al} \eta_{0,X} + \left(\frac{3l^2}{A} - l_z \right) \eta_0 \eta_{0,\xi} + \left(\frac{l}{A} \int_{l_-(0,\mu X)}^{l_+(0,\mu X)} \Psi(X, y, 0) dy \right) \eta_{0,\xi\xi} = 0 \quad (2.18)$$

其中 $l_z = \left[\frac{d}{dz} (l_+ - l_-) \right] \Big|_{z=0}$ 。这就是沿流动方向缓变的任意截面渠道中的波动方程。因为

$\int \Psi(X, y, 0) dy \geq 0$ (证明见附录 2)，所以它是缓变系数的 KdV 方程。它是 Peter (1966) 导出的常微分方程在无旋情形下的推广。与 Peregrine (1968) 导出的包含有 η, u 对 x, t 的混合导数的方程相比，方程 (2.18) 具有很大的优越性，(2.18) 式是只包含 η_0 的方程，且是研究得很多的 KdV 方程，求解较方便。

对于矩形截面的情况

$$\Psi(X, y, z) = \frac{1}{2} [z + h(X)]^2 - \frac{1}{6} h^2(X)$$

KdV 方程(2.18)变为

$$\frac{(l\sqrt{h})_x}{l\sqrt{h}}\eta_0 + 2\eta_{0,x} + \frac{3}{h\sqrt{h}}\eta_0\eta_{0,\xi} + \frac{\sqrt{h}}{3}\eta_{0,\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.19)$$

(2.19)式与 N. Shuto (1974) 导出的变宽度、变深度矩形截面渠道中的 KdV 方程一致.

对于变深度、常宽度矩形截面的情况, 方程(2.18)变为

$$\frac{1}{2}\frac{h_x}{\sqrt{h}}\eta_0 + 2\sqrt{h}\eta_{0,x} + \frac{3}{h}\eta_0\eta_{0,\xi} + \frac{h}{3}\eta_{0,\xi\xi\xi} = 0 \quad (2.20)$$

(2.20)式与 R. S. Johnson(1973a)导出的结果一致.

对于如图二所示的左右对称的三角形截面渠道来说

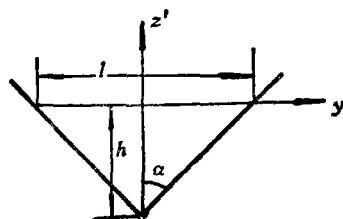


图 2

$$\Psi = \frac{1}{4} [y^2 + (z+h)^2] - \frac{h^2}{8} \left(1 + \frac{1}{3} \text{tg}^2 \alpha \right)$$

方程(2.18)变为

$$\frac{\sqrt{2h}}{4} \left(1 + \frac{1}{3} \text{tg}^2 \alpha \right) \eta_{0,\xi\xi\xi} + \frac{5\sqrt{2}}{h\sqrt{h}} \eta_0\eta_{0,\xi} + 2\eta_{0,x} + \frac{(h\sqrt{2h} \text{tg} \alpha)_x}{h\sqrt{2h} \text{tg} \alpha} \eta_0 = 0 \quad (2.21)$$

三、缓变 KdV 方程的解

作变换

$$\xi = (Al)^{1/4} \eta_0 \quad (3.1)$$

方程(2.18)变为

$$\xi_x + \left(\frac{3l^2}{A} - l_x \right) \frac{1}{2(Al)^{3/4}} \xi \xi_\xi + \left(\frac{l}{A} - \frac{1}{2\sqrt{Al}} \int_{l_0}^{l_x} \Psi(X, y, 0) dy \right) \xi_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.2)$$

记

$$T = \mu X$$

$$\alpha(T) = \left(\frac{3l^2}{A} - l_x \right) \frac{1}{2(Al)^{3/4}}$$

$$\beta(T) = \frac{l}{A} - \frac{1}{2\sqrt{Al}} \int_{l_0}^{l_x} \Psi(X, y, 0) dy$$

则方程(3.2)变为

$$\xi_x + \alpha(T) \xi \xi_\xi + \beta(T) \xi_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (3.3)$$

假设 α 、 β 是 X 的缓变函数, 即 $\mu \ll 1$, 我们求方程(3.3)如下形式的解.

$$\xi = \xi_0(\theta, T) + \mu \xi_1(\theta, T) + \mu^2 \xi_2(\theta, T) + \dots \quad (3.4)$$

其中

$$d\theta = k(T) d\xi - \omega(T) dX \quad (3.5)$$

由于

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi \partial X} = \frac{\partial k(T)}{\partial X} = -\frac{\partial \omega(T)}{\partial \xi} = 0$$

所以

$$k(T) = \text{常数}$$

把(3.4)式代入方程(3.3)可得 $\zeta_0(\theta, T)$ 的方程

$$-\omega \zeta_{0,\theta} + \alpha(T) k \zeta_0 \zeta_{0,\theta} + \beta(T) k^3 \zeta_{0,\theta\theta\theta} = 0 \quad (3.6)$$

方程(3.6)可以直接积分, 求出其解为

$$\zeta_0 = a' \operatorname{sech}^2 b\theta \quad (3.7)$$

其中

$$a' = 3\omega/\alpha k \quad b = (\omega/4\beta k^3)^{1/2} \quad (3.8)$$

由于 ζ_0 中的 a' 、 b 、 ω 三个未知量只有(3.8)式中的两个关系, 为了决定它们, 我们必须考虑一阶量, 从中找出它们之间的另一个关系。

$\zeta_1(\theta, T)$ 的方程如下:

$$-\omega \zeta_{1,\theta} + \alpha(T) k (\zeta_0 \zeta_1)_\theta + \beta(T) k^3 \zeta_{1,\theta\theta\theta} = -\zeta_{0,T} \quad (3.9)$$

方程(3.9)也可以直接积分一次, 然后假设 $\zeta_1 = \zeta_{0,\theta} f(\theta, T)$, 再积分二次, 可得

$$\zeta_1 = \frac{\zeta_{0,\theta}}{\beta k^3} \left\{ \frac{1}{\zeta_{0,\theta}^2} [C_3 + \int \zeta_{0,\theta} (C_2 - \int \zeta_{0,T} d\theta) d\theta] d\theta + C_4 \right\} \quad (3.10)$$

四、讨 论

(1) 孤立波的传播速度

我们把(3.7)式改写为

$$\zeta_0 = a' \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\alpha}{12\beta}} a' \left[\int \left(\sqrt{\frac{l}{A}} - \frac{\epsilon a' \alpha}{3} \right) dx - t \right] \right\}$$

注意到变换(3.1), 忽略 ϵ^2 项, 得

$$\eta_0 = a \operatorname{sech}^2 \left\{ \sqrt{\frac{\alpha(AI)^{1/4}}{12\beta}} a \left[\int \frac{dx}{\sqrt{A/l + \epsilon a [1 - (Al_z/3l^2)]}} - t \right] \right\} \quad (4.1)$$

由(4.1)式可得孤立波的速度为

$$c^2 = A/l + \epsilon a [1 - (Al_z/3l^2)] \quad (4.2)$$

由(4.2)式可见: 在波幅相同的情况下, 孤立波的速度完全由渠道的几何尺寸决定. 对于有相同截面积、相同水面宽度的通常渠道 ($l_z(z, x) \geq 0$, 即随着深度的增大, 宽度减少的渠道) 来说, 水面附近有垂直侧壁时, 渠道中孤立波的速度最大.

当渠道为矩形时

$$c^2 = h + \epsilon a \quad (4.3)$$

这与长波理论线性化结果一样.

对于如图二所示的三角形渠道来说

$$c^2 = \frac{h}{2} + \frac{5}{6} \epsilon a \quad (4.4)$$

(2) 孤立波波幅与渠道几何尺寸的关系

为了找出 ξ_0 中 a' 、 b 、 ω 之间的另一个关系, 我们把(3.10)式直接积分出来, 得出如下的 ξ_1 的表示式

$$\begin{aligned} \xi_1 = & \frac{\xi_{0,0}}{\beta k^3} \frac{1}{4a'^2 b^3} \left\{ C_2 a' \left(\frac{3}{2} \varphi - \operatorname{cth} \varphi + \frac{1}{2} \sinh \varphi \cosh \varphi \right) \right. \\ & + \frac{a'}{6} \left(\frac{a'}{b} \right)_T \cosh^4 \varphi + \frac{a'^2 b_T}{2 b^2} \left(\frac{1}{4} \cosh^4 \varphi + \frac{1}{2} \cosh^2 \varphi + \ln \sinh \varphi \right) \\ & - \frac{a'^2 b_T}{24 b^2} \cosh^4 \varphi - \frac{a'^2 b_I}{2 b^2} \left(\frac{\varphi^2}{2} - \varphi \operatorname{cth} \varphi + \ln \sinh \varphi \right) \\ & \left. + C_3 \left(\frac{7}{8} \varphi - \frac{1}{8} \sinh \varphi \cosh \varphi + \frac{1}{4} \operatorname{th} \varphi \cosh^4 \varphi - \operatorname{cth} \varphi \right) + C_4 \right\} \end{aligned}$$

其中 $\varphi = b\theta$. 由上式可见, 展开式(3.4)不是一致有效的. 当 $\theta \rightarrow \pm\infty$ 时, ξ_1 无界. 我们消去上式中最高的指数奇性, 使 ξ_1 有界, 可得

$$\begin{aligned} C_3 &= 0 \\ (a'/b)_T &= -a' b_T / 2b^2 \end{aligned}$$

即

$$(a'^2/b)_T = 0$$

上式即为我们所求的关系式, 它可表示为

$$\eta_0 \propto (\alpha/\beta)^{1/3} (Al)^{-1/4} \quad (4.5)$$

(4.5) 式即是波幅与渠道几何尺寸的关系.

对于如图二所示的三角形渠道来说

$$\eta_0 \propto h^{-6/3} \operatorname{tg}^{-2/3} \alpha (1 + \frac{1}{3} \operatorname{tg}^2 \alpha)^{-1/3} \quad (4.6)$$

对于矩形渠道来说

$$\eta_0 \propto l^{-2/3} h^{-1} \quad (4.7)$$

(4.7) 式与长波小振幅时的 Green 定律 $\eta_0 \propto l^{-1/2} h^{-1/4}$ (H. Lamb, 1932, § 185) 不同. 而与 Grimshaw(1970)、Johnson(1973b)、Mile(1977) 等人的结果一样.

Mile(1977)、Shuto(1974) 把(4.7) 式和实验结果进行了比较, Mile(1980) 对比较结果进行了综述. 对于宽度不变、底部斜率为常数的矩形渠道来说, 当底部斜率较小时, (4.7) 式更为精确些, 但斜率变大时, Green 定律更合适; 对于深度不变、宽度线性增大的矩形渠道来说, (4.7) 式比 Green 定律更好些. 然而, 对于收缩的矩形渠道来说, 由于非线性效应, (4.7) 式的结果与实验相比有些误差.

(3) 向下凹的孤立波

在方程(3.3)中, $\beta(T) \geq 0$. 对于一般的渠道(如矩形、梯形、三角形渠道等)而言, $\alpha(T) > 0$. 但 $\alpha(T)$ 可以改变其符号. 对于某些特殊的渠道而言, $\alpha(T) < 0$ 是可能的. 这时作一变换 $\zeta = -\zeta'$, 所得之 ζ' 的方程与 $\alpha > 0$ 的方程(3.3)一样, 所以有可能产生 $\zeta < 0$ 的孤立波解. Peregrine(1968) 已经指出了这种可能性, 并指出了两种 $\alpha(T) < 0$ 的渠道. 由于这种向下凹的孤立波的速度小于小振幅长波的速度, 所以这种波容易与短波混淆. 但是究竟能否实现这种向下凹的孤立波, 要由初始条件以及解的稳定性来决定.

附 录

附录1: 从 (2.17) 式到 (2.18) 式的推导

应用(2.14a)式

$$\begin{aligned} (2.17) \text{式左端} &= \iint_{\sigma_0} (-f' u_{1,\xi} - u_{0,x}) dy dz \\ &= \iint_{\sigma_0} (-f'^2 u_0 u_{0,\xi} - f'^2 p_{1,\xi} - f' p_{0,x} - u_{0,x}) dy dz \end{aligned}$$

应用 (2.15) 式

$$\begin{aligned} (2.17) \text{式右端} &= \int_0^{-h} l_{-X}(z, \mu X) u_0 dz + \int_{-h}^0 l_{+X}(z, \mu X) u_0 dz \\ &+ \int_{l_{-0, \mu X}^{+0, \mu X}} (-\eta_{1,\xi} + f' u_0 \eta_{0,\xi} - w_{0,z} \eta_0) |_{z=0} dy \end{aligned}$$

上面两式中的积分, 可分别积分出来

$$\begin{aligned} \int_0^{-h} l_{-X}(z, \mu X) u_0 dz + \int_{-h}^0 l_{+X}(z, \mu X) u_0 dz &= u_0 \frac{\partial}{\partial X} \left[\int_0^{-h} l_{-}(z, \mu X) dz \right. \\ &+ \left. \int_{-h}^0 l_{+}(z, \mu X) dz \right] - u_0 \left[l_{-}(-h, \mu X) \frac{d(-h)}{dX} - l_{+}(-h, \mu X) \frac{d(-h)}{dX} \right] \\ &= u_0 \frac{\partial A}{\partial X} = \sqrt{l/A} \eta_0 A_X \end{aligned}$$

(因为 $l_{-}(-h, \mu X) = l_{+}(-h, \mu X) = 0$ 对于矩形渠道来说, 可以推出同样的结果.)

利用(2.7d)、(2.8a)、(2.8b)式可得

$$\begin{aligned} \int_{l_{-0, \mu X}^{+0, \mu X}} w_{0,z} \eta_0 |_{z=0} dy &= \int_{l_{-0, \mu X}^{+0, \mu X}} -\eta_0 (v_{0,y} + f' u_{0,\xi}) dy \\ &= \eta_0 \eta_{0,\xi} l_x - f'^2 \eta_0 \eta_{0,\xi} l \end{aligned}$$

依次利用(2.16b)、(2.12a)、(2.12b)式可得

$$\begin{aligned} \int_{l_{-0, \mu X}^{+0, \mu X}} \eta_{1,\xi} |_{z=0} dy &= \int_{l_{-0, \mu X}^{+0, \mu X}} [\varphi_{\xi\xi}(\xi, X, y, 0) + C_{1,\xi}(\xi, X)] dy \\ &= [B_{\xi\xi}(\xi, X) + C_{1,\xi}(\xi, X)] l - f'^2 \eta_{0,\xi\xi\xi} \int_{l_{-0, \mu X}^{+0, \mu X}} \Psi(X, y, 0) dy \end{aligned}$$

把 (2.16) 式对 ξ 微商代入下式可得

$$\iint_{\sigma_0} p_{1,\xi} dy dz = \iint_{\sigma_0} \left\{ \eta_{1,\xi} + f'^2 \eta_{0,\xi\xi\xi} [\Psi(X, y, 0) - \Psi(X, y, z)] \right\} dy dz$$

再依次利用(2.16b)、(2.12b)、(2.12a)式, 上式变为

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_0} p_{1,\xi} dy dz &= \iint_{\sigma_0} [\varphi_{\xi\xi}(\xi, X, y, 0) + C_{1,\xi}(\xi, X)] dy dz + f'^2 \eta_{0,\xi\xi\xi} \iint_{\sigma_0} \Psi(X, y, 0) dy dz \\ &= [B_{\xi\xi}(\xi, X) + C_{1,\xi}(\xi, X)] A \end{aligned}$$

按照(2.9)、(2.10)式, u_0 、 p_0 、 η_0 与 y 、 z 无关, 所以

$$\begin{aligned} \iint_{\sigma_0} (f'^2 u_0 u_{0,\xi} + f' p_{0,x} + u_{0,x}) dy dz &= \iint_{\sigma_0} [f'^4 \eta_0 \eta_{0,\xi} + 2f' \eta_{0,x} + \eta_0 (\sqrt{l/A})_x] dy dz \\ &= \frac{l^2}{A} \eta_0 \eta_{0,\xi} + 2\sqrt{lA} \eta_{0,x} + \eta_0 A (\sqrt{l/A})_x \end{aligned}$$

把上述积分式分别代入(2.17)式左、右端, 经过整理, 即可得(2.18)式.

附录 2:

$$\int_{l_{-(0, \mu X)}}^{l_{+(0, \mu X)}} \Psi(X, y, 0) dy \geq 0 \text{ 的证明}$$

由于

$$\iint_{\sigma'} (\varphi \varphi_{yy} + \varphi \varphi_{zz} + \varphi_y^2 + \varphi_z^2) dy dz = \int_{\sigma'} \varphi (\varphi_y dz - \varphi_z dy)$$

利用(2.7d)、(2.8b)式, 上式变为

$$\iint_{\sigma'} -\varphi f' u_{0, \xi} dy dz + \iint_{\sigma'} (\varphi_y^2 + \varphi_z^2) dy dz = \int_{l_{-(0, \mu X)}}^{l_{+(0, \mu X)}} \varphi(X, y, 0) \varphi_z(X, y, 0) dy \quad (A)$$

按照(2.12a)式

$$\begin{aligned} f'^2 \eta_{0, \xi}^2 \int_{l_{-(0, \mu X)}}^{l_{+(0, \mu X)}} \Psi(X, y, 0) dy &= \int_{l_{-(0, \mu X)}}^{l_{+(0, \mu X)}} [\varphi(X, y, 0) - B(\xi, X)] \eta_{0, \xi} dy \\ &= \frac{l \eta_{0, \xi}}{A} \iint_{\sigma'} B(\xi, X) dy dz - \int_{l_{-(0, \mu X)}}^{l_{+(0, \mu X)}} \varphi(X, y, 0) \eta_{0, \xi} dy \\ &= \frac{l}{A} \iint_{\sigma'} \varphi(\xi, X, y, z) \eta_{0, \xi} dy dz - \iint_{l_{-(0, \mu X)}}^{l_{+(0, \mu X)}} \varphi(X, y, 0) \eta_{0, \xi} dy \end{aligned}$$

利用(A)式即得:

$$f'^2 \eta_{0, \xi}^2 \int_{l_{-(0, \mu X)}}^{l_{+(0, \mu X)}} \Psi(X, y, 0) dy = \iint_{\sigma'} (\varphi_y^2 + \varphi_z^2) dy dz \geq 0$$

参 考 文 献

1. Grimshaw, R., The solitary waves in water of variable depth *J. Fluid Mech.* 42, (1970), 639—656.
2. Grimshaw, R., Long nonlinear internal waves in channels of arbitrary cross-section, *J. Fluid Mech.* 86, (1978), 415—431.
3. Johnson, R. S., On the development of a solitary wave moving over an uneven bottom, *Proc. Camb. Phil. Soc.* 73, (1973a), 183—203.
4. Johnson, R. S., On an asymptotic solution of the Korteweg-de Vries equation with slowly varying coefficients, *J. Fluid Mech.* 60, (1973b), 813—824.
5. Lamb, H., *Hydrodynamics*, Cambridge University Press, (1932).
6. Mile, John W., Note on a solitary wave in a slowly varying channel, *J. Fluid Mech.* 80, (1977), 149—152.
7. Mile, John W., Solitary waves, *Annual Rev. Fluid Mech.* 12, (1980), 10—43.
8. Peregrine, D. H., Long waves in a uniform channel of arbitrary cross-section, *J. Fluid Mech.* 32, (1968), 353—365.
9. Peter, A. S., Rotational and irrotational solitary waves in a channel with arbitrary cross-section, *Comm. Pure and Appl. Math.* 19, №4 (1966), 445.
10. Shuto, N., Non-linear long waves in a channel of variable section, *Coastal Engin.* in Japan, 17, (1974), 1—12.

The Solitary Waves in a Gradually Varying Channel of Arbitrary Cross-section

Chou Xian-chu

(Institute of Mechanics, Academia Sinica, Beijing)

Abstract

In this paper, the solitary waves in an arbitrary cross-section channel which gradually change in the streamwise have been studied. The KdV equation with slowly varying coefficients is derived. Then, we produced the first term of its asymptotic solution, travel speed of solitary waves and the relation between the amplitude of wave and the geometric size of channel. The results have been applied to the cases of triangular and rectangular channels. For the channel with varying depths and breadths they are fairly consistent with those of Johnson, Shuto and Mile.