应用数学和力学，第2卷第4期（1981年8月）
Applied Mathematics and Mechanics

应用数学和力学编委会编
四川人民出版社出版

“对弹性地基上的自由边矩形板”[1]的探讨*

范家参　黎家佑

（云南省地震局，1980年3月31日收到）

摘　要

本文指出：文献[1]不满足板的四个角点集中反力为零的边界条件，所以[1]采用黎兹法给出的算例，其近似解的收敛性不是最妙的．[1]又给出了用迦辽金法计算的公式，如果沿用其公式将导致错误的结果．本文证明了四角点集中反力为零的边界条件是必要的一个定解条件．

一、问　题　的　提　出

本文所用的符号及公式都按[1]的写法而不再说明．[1]虽然在20年前就发表了，但其存在的问题至今没有被指出．鉴于其在土建工程及地学上均有广泛应用，如果让问题长期存在下去是不好的，故写成此文讨论之．

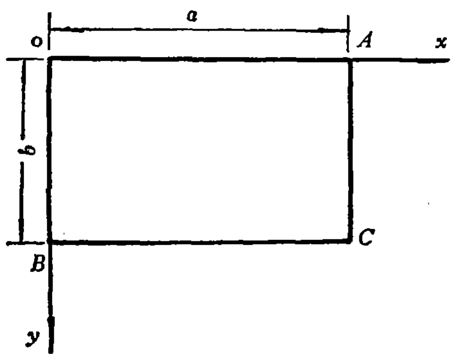


图　1

图1所示位于温克勒型弹性地基上的自由边矩形板，其平衡方程式是：

$$D\Delta^2 W + kW = q \tag{1.1}$$

$$\left[\ \Delta^2 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2\ \right]$$

其边界条件是：

（1）　板的四个角点O、A、B、C的集中反力为零：

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = 0 \tag{1.2}$$

（2）　板边弯矩为零：

在$x=0$及$x=a$两边：

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = 0 \tag{1.3}$$

在$y=0$及$y=b$两边：

* 钱伟长推荐．

$$\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}=0 \tag{1.4}$$

（3） 板边剪力为零：

在 $x=0$ 及 $x=a$ 两边：

$$\frac{\partial^3 W}{\partial x^3}+(2+\nu)\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y^2}=0 \tag{1.5}$$

在 $y=0$ 及 $y=b$ 两边：

$$\frac{\partial^3 W}{\partial y^3}+(2+\nu)\frac{\partial^3 W}{\partial x^2\partial y}=0 \tag{1.6}$$

文献[1]指出：当 $\nu=0$ 时采用黎兹法，当 $\nu\neq 0$ 时采用迦辽金法，而采用下面的挠度函数：

$$\begin{aligned}W=&A_{-1,-1}U_{-1}V_{-1}+A_{-1,0}U_{-1}V_0+A_{-1,1}U_{-1}V_1+\cdots+A_{0,-1}U_0V_{-1}\\&+A_{00}U_0V_0+A_{01}U_0V_1+\cdots+A_{1,-1}U_1V_{-1}+A_{10}U_1V_0+A_{11}U_1V_1+\cdots\end{aligned} \tag{1.7}$$

可得到问题的近似解．在(1.7)式中各 $A_{mr}(m,\ r=-1,\ 0,\ 1\cdots)$ 为待定系数．各函数 U_m 如下表示：

$$\left.\begin{aligned}&U_{-1}=1\\&U_0=\frac{2\sqrt{3}}{a}\left(x-\frac{a}{2}\right)\\&U_m=\cos\frac{k_m x}{a}+\mathrm{ch}\,\frac{k_m x}{a}-\frac{\cos k_m-\mathrm{ch}\,k_m}{\sin k_m-\mathrm{sh}\,k_m}\left(\sin\frac{k_m x}{a}+\mathrm{sh}\,\frac{k_m x}{a}\right)\\&\qquad(m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)\end{aligned}\right\} \tag{1.8}$$

其中参数 k_m 应能满足下列条件：

$$\cos k_m\,\mathrm{ch}\,k_m=1 \tag{1.9}$$

可以近似地以下式表示：

$$k_{-1}=k_0=0\,,\qquad k_m=\left(m+\frac{1}{2}\right)\pi \tag{1.10}$$

如取四位数字，则 k_1 及 k_2 应分别取 4.730 及 7.853，k_3 以后的参数可按(1.10)式计算．函数 V_r 可类似表示，只需代 U_m 中的 x 为 y，a 为 b 即可．

易知函数 U_m 满足以下关系：

$$\frac{d^4U_m}{dx^4}=\left(\frac{k_m}{a}\right)^4U_m \tag{1.11}$$

当 $x=0$，$x=a$ 时

$$\frac{d^3U_m}{dx^3}=\frac{d^2U_m}{dx^2}=0 \tag{1.12}$$

故[1]的方法，满足了板边弯矩和剪力为零的边界条件(1.3)、(1.4)、(1.5)、(1.6)各式．但是：

$$\left.\begin{aligned}&\left.\frac{dU_m}{dx}\right|_{x=0}=\frac{2k_m}{a}\,\frac{\mathrm{ch}\,k_m-\cos k_m}{\sin k_m-\mathrm{sh}\,k_m}\\&\left.\frac{dU_m}{dx}\right|_{x=a}=\frac{2k_m}{a}\,\frac{\sin k_m\,\mathrm{sh}\,k_m}{\sin k_m-\mathrm{sh}\,k_m}\end{aligned}\right. \tag{1.13}$$

由(1.10)式可以看出：

$$\left.\frac{dU_m}{dx}\right|_{x=0}=\left.\frac{dU_m}{dx}\right|_{x=a}\neq 0 \tag{1.14}$$

所以[1]的方法不满足边界条件 (1.2)，使板的四角点上有大小相等的集中力存在. 所以我们就集中讨论由此而引起文献[1]的结果有什么影响?

二、问 题 的 探 讨

这一段除了继续采用前一段的公式及符号之外，有关泛函的公式及记法，又采用文献[2]的记法，亦不在此再说明.

文献[2]56—57 页指出：采用能量法的变分原理使泛函取极小值（黎兹法）的解就自动满足平衡方程 (1.1) 及边界条件(1.2)—(1.6). 所以采用黎兹法求近似解，对假设的挠度函数W，可不必要求它满足自然边界条件. 但是[2]在 58 页上写到：“如果坐标函数（即本文及[1]的 W)满足边界条件，那么直接方法的收敛性就会有显著的改进，因此最好这样选取坐标函数，使得边界条件满足，那怕只满足一部份也是好的.” 看得出文献[1]是努力使所取的 W 函数满足全部边界条件，但是忽略了本文指出的 (1.2) 式，所以[1]应用黎兹法进行了具体的计算，其收敛性就不如连 (1.2) 式也都满足的 W 函数好.

更应该指出：[1]写到：“当材料的泊松比不等于零，自以应用迦辽金法为方便.” [1]的(21)、(22)、(23) 及 (24) 四式就是该文提出的迦辽金法计算公式. 虽然[1]没有应用这些公式进行具体计算，可是[1]文认为所提供的办法可用之于迦辽金法的具体计算是确切无疑的了. 但这就有错误了. 文献[2]写到：“在一般情形下，迦辽金提出这样的方法：选取满足边界条件的坐标函数的完全序列$\{\phi_n\}$，把近似解取成形式：

$$u_n=\sum_{k=1}^{n}a_k\phi_k$$

此处 a_k 都是常数；” 接着[2]在这段话的次页，即[2]的 248 页，批评了别列里曼(Я. И. Перельман) 在一篇综合性论文 (Метод Б. Г. Галеркина в Вариачионном исчислении и в теории упругости, *ПММ*. Т. V. вып.2, 1941) 中认为迦辽金法可以不必预先满足自然边界条件 (1.2)，所以采用[1]的 W 函数来应用迦辽金法，必然导致错误的结果.

下面我们要论证(1.1)式定义的算子 AW 是正定的，因而使用黎兹法才是正确的.

$$(AW,\ W)=\int_\Omega(\Delta^2W+kW)W\,d\Omega=\int_\Omega qW\,d\Omega>0 \tag{2.1}$$

因为$\int_\Omega qW\,d\Omega$ 表示板面法向分布荷载在板弯曲时作的功的两倍，故大于零.

但是：

$$(AW,\ W)=\int_\Omega(\Delta^2W+kW)W\,d\Omega=\int_S\left(W\frac{\partial\Delta W}{\partial n}-\Delta W\frac{\partial W}{\partial n}\right)dS$$

$$+\int_\Omega(\Delta W)^2d\Omega+\frac{k}{D}\int W^2d\Omega>0$$

$$\therefore \quad \int\left(W\frac{\partial \Delta W}{\partial n}-\Delta W\frac{\partial W}{\partial n}\right)dS+\int_{\Omega}(\Delta W)^2 d\Omega>-\frac{k}{D}\int_{\Omega}W^2 d\Omega$$

设 α 为某一小于 $\frac{k}{D}$ 的正的常数值，即：

$$\int_{S}\left(W\frac{\partial \Delta W}{\partial n}-\Delta W\frac{\partial W}{\partial n}\right)dS+\int_{S}(\Delta W)^2 d\Omega\geqslant\alpha\int W^2 d\Omega$$

$$\therefore \quad (AW,\ W)\geqslant n^2\|W\| \tag{2.2}$$

$$n^2=\frac{k}{D}-\alpha \text{（正的常数）} \tag{2.3}$$

即 AW 是正定运算子，故应用黎兹法有唯一的收敛解．但如在前指出：[1]的办法在使用黎兹法是可以的，但收敛性不如 W 也满足边界条件(1.2)的 W 好．上面这一段是因为对于弹性地基上自由边矩形板解的唯一性定理没有见过证明，故提出以供参考．

现在我们提出改进[1]的缺点的办法如下：

$$\because \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y}=A_{00}\frac{12}{ab}+\frac{2\sqrt{3}}{a}\sum_{r=1}^{n}A_{or}\frac{dV_r}{dy}+\frac{2\sqrt{3}}{b}\sum_{m=1}^{n}A_{mo}\frac{dU_m}{dx}$$

$$+\sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}A_{mr}\frac{dU_m}{dx}\frac{dV_r}{dy}$$

故由条件(1.2)，在四个角点应有：

$$3A_{00}+\sqrt{3}\sum_{r=1}^{n}A_{or}\frac{k_r\sin k_r\,\mathrm{sh}\,k_r}{\sin k_r-\mathrm{sh}\,k_r}+\sqrt{3}\sum_{m=1}^{n}A_{mo}\frac{k_m\sin k_m\,\mathrm{sh}\,k_m}{\sin k_m-\mathrm{sh}\,k_m}$$

$$+3\sum_{m=1}^{n}\sum_{r=1}^{n}A_{mr}\frac{k_r k_m\sin k_r\sin k_m\,\mathrm{sh}\,k_r\,\mathrm{sh}\,k_m}{(\sin k_r-\mathrm{sh}\,k_r)(\sin k_m-\mathrm{sh}\,k_m)}=0 \tag{2.4}$$

如果在 W 的表达式中各系数之间(2.4)式成立，则边界条件(1.2)就满足了．此时无论应用黎兹法或迦辽金法，在我们取挠度函数(1.7)式至 $A_{nn}U_nV_n$ 项为止时，系数 A_{oo} 不能再独立的由变分公式或迦辽金法的公式去求，而应求由其它系数以后再由(2.4)式求出 A_{oo} 来．

三、角点集中力为零的必要性

就力学意义来讲，克希霍夫把板边的扭矩化为等效剪力而与板边剪力迭加为一个边界条件：即板边剪力为零，从而克服了自由边界多出一个边界条件的困难．但是在矩形板的四个角点上就出现了(1.2)这个多余的边界条件．因为这是在固定边或铰支边所没有的．下面我们给出一个初等的证明，说明边界条件(1.2)是(1.1)式必不可少的定解条件．

如图2所示，把板沿 x 方向分为 i 格，沿 y 方向分为 j 格，并向外扩充两排网格如虚线所示．

把微分方程(1.1)和边界条件(1.2)—(1.6)各式化为差分公式．

(1.1) 式化为 $(i+1)(j+1)$ 个差分方程．(1.2) 式提供 4 个差分方程，(1.3) 至(1.6)式共提供 $4(i+1)+4(j+1)$ 个差分方程．故差分方程总数为：

$$N=(i+1)(j+1)+4+4(i+1)+4(j+1)$$
$$=ij+5(i+j)+13 \qquad (3.1)$$

板边上最高阶差分的跨步表示如下（以○表格点，●表跨步）

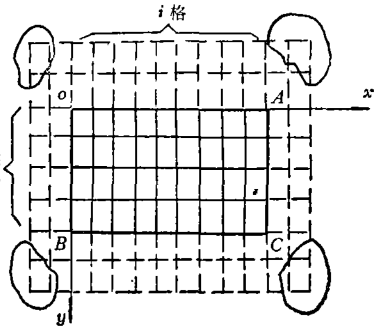
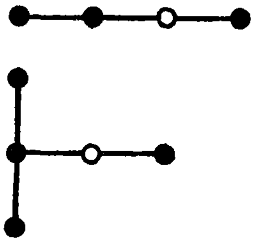


图 2

$\dfrac{\delta^4 W}{\delta x^4}$：

$\dfrac{\delta^4 W}{\delta x^2 \delta y^2}$：



而在上面我们以 δx 表示 dx 的差分而不用 Δx．以免和前面的 $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{2y^2}$ 相混淆．

易知图 2 围线内那最外面的12个角点之值并不出现在差分方程中．故差分方程组中出现的未知格点数目为：

$$N'=(i+5)(j+5)-4\times 3=ij+5(i+j)+13 \qquad (3.2)$$

由于 $N=N'$，并且差分方程组构成的线代数方程组的系数行列式不等于零，故有唯一的一组解存在．我们证明了 (1.2) 式是方程(1.1)必不可少的定解条件．

在“椭圆形”的偏微分方程中、四阶的如板壳方程，每边是两个边界条件．二阶的拉普拉斯方程和亥姆霍茨方程．每边是一个边界条件．而本文的问题，多了 (1.2) 式这个边界条件是否“多余”或“过严”呢？上面给出了明确回答．

参 考 文 献

1. 陈叔陶，弹性地基上的自由边矩形板，力学学报，第 4 卷第 1 期，(1960).
2. С. Г. 米赫林，《数学物理中的直接方法》，周先意译，高等教育出版社，(1957)．

Discussion on "Rectangular Plates with Free Edges on Elastic Foundations"

Fan Ja-shen Li Ja-you

(Seismologic Bureau of Yunnan Province, Kunming)

Abstract

This paper points out the subject mentioned in this work has the demerit that the boundary condition defining no concentrated force which exists at the four corner points was not fulfilled. We put forward the improved method.