

# 泥浆的力学性质和砂粒在泥浆 中运动时所受的阻力

蔡树棠

(合肥中国科技大学近代力学系, 1980年7月29日收到)

## 摘 要

一般认为泥浆在运动时候,它的力学性质已经有别于通常的牛顿流体而是宾汉体<sup>[1]</sup>了.因此剪应力应该用宾汉体的剪应力关系式.本文作者则持另外一种见解.认为泥浆是一种接近于沥青一类的粘性极大,弛豫时间极长的流体.本文讨论了泥浆的力学性质,并且进一步讨论了圆球在泥浆中作匀速直线运动时所受到的阻力.在讨论过程中,我们利用了人们熟知的粘性流体绕圆球运动的 Stokes 解,得到了一个简单的阻力公式.当圆球在重力和浮力作用下在泥浆中作沉淀运动时候,我们求出了沉降速度.在沉降速度为零时候,我们就可以求出“不沉粒径”和“宾汉体极限剪应力”的关系.我们把计算结果得到的理论公式和陕西水科所及黄委会水科所等单位的实验数据<sup>[2][3]</sup>进行了比较,结果是令人满意的.

## 一、泥浆的力学性质

人们通常把泥浆看作是宾汉流体或伪塑性体,而且为了确定它究竟是那一种流体,往往争论不休.诚然泥浆在某些情况下,它的力学性质接近于宾汉流体,但有些性质却和宾汉流体并不相同.例如泥浆在不流动的时候要凝固,这一点就和宾汉流体并不相同.所以简单化地把泥浆看成宾汉流体是并不恰当的.

泥浆在管道中或二维水槽中流动时候,人们通常用宾汉体的剪应力表达式<sup>[4]</sup>来表示它压力以外的剪应力.即

$$\tau = \tau_B + \eta \frac{dU}{dy} \text{ 或 } \tau = \tau_B + \eta \left| \frac{dU}{dr} \right| \quad (1.1)$$

式中  $\tau_B$  称为宾汉体的极限剪应力,  $\eta$  称为刚度系数.这个表达式是仅对这类流线为直线的特殊流动形式适用的,至于把它应用到其他流动形式,则必须把应力表达式(1.1)加以适当的推广.随着推广的办法不同,得到的应力表达式也就不同.对各向同性不可压缩流体,一种最简单最合理的推广形式是把应力和形变关系式写成张量形式

$$\sigma_{ij} = \mu \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - p \delta_{ij} \quad (1.2)$$

式中  $\sigma_{ij}$  为应力张量,  $u_i$  就是流体速度, 式中

$$\mu = \eta + \frac{\sqrt{2} \tau_B}{\epsilon}, \quad \epsilon = \sqrt{\left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}$$

这里因为用了各向同性条件, 所以式中没有出现特殊方向. 因为用了不可压缩条件, 所以没有  $\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha}$  项. 如果再加上均匀性条件,  $\eta$  和  $\tau_B$  就和所在的位置的坐标  $x_i$  无关. 这个应力和形变的关系式, 在管流和二维槽流时又回复到原来的 (1.1) 式. 这样的推广, 看起来虽然似乎是非常合理的, 在数学上也是无可非议的, 但如果把这样的应力形变关系式代入运动方程和连续方程

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1.3)$$

$$\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_\alpha} = 0 \quad (1.4)$$

求解. 对绕圆球的定常流动, 求出圆球在其中作匀速直线运动时所受到的阻力. 再用这个阻力求出砂粒在其中作静水沉淀运动时的不沉粒径, 就会发现所得到的不沉粒径要比实际测量到的数值大得太多了. 它和一般的实验数据离得很远. 换句话说, 也就是圆球在这种流体中运动时所受到的阻力要比圆球在实际泥浆中运动时所受到的阻力要大得多. 这一点对那种死抱住泥浆就是宾汉流体的人将是一次无情的嘲笑.

那么泥浆究竟应该用什么样的力学性质来表达它呢? 本文作者认为所谓宾汉流体只不过是一个抽象化的理想化模型. 泥浆在某些性质上虽然接近于宾汉流体, 而实际上则并非真正的宾汉流体. 从某些力学性质来看, 泥浆更接近于某些粘性极大, 弛豫时间极长的粘性流体. 它的力学性质接近于沥青, 玻璃一类物质. 由于在测量极限应力  $\tau_B$  时候, 整个实验过程只有十几分钟, 远小于泥浆的弛豫时间, 所以显出  $\tau_B$  是一个常数. 实际上  $\tau_B$  并非真正常数, 而是随时间不断在改变的变数. 我们基于这样的认识, 对圆球在泥浆中运动所受的阻力问题提出如下的计算模型. 即把泥浆看成是粘性极大的流体, 然后用等效粘度的办法来计算圆球在泥浆中运动时所受的阻力.

## 二、圆球在泥浆中作匀速直线运动时所受到的阻力

由于我们认为泥浆在流动性质上接近于粘性极大, 弛豫时间极长的粘性流体, 我们再进行一步认为在小雷诺数条件下, 流速分布也非常接近于斯笃克斯解的流速分布. 这样我们就可以用等效粘性系数的办法来计算圆球在泥浆中作匀速直线运动时所受到的阻力.

和通常一样, 我们采用和球心一起运动的运动坐标系, 用  $a$  表示圆球半径. 这样选取坐标系以后, 流动状态就变成定常运动了. 我们取球坐标, 极轴沿远处流速方向. 现在我们来求等效粘性系数. 在流线为直线的管流或槽中流动时候, 顺着流动方向压力以外的剪应力用 (1.1) 式表示. 对于绕圆球的流动来说, 在球表面上只有赤道上 ( $\theta = \frac{\pi}{2}$  处) 流线沿着远处流速方向. 那里压力以外的剪应力和 (1.1) 式情形相当, 也是沿着远处流动方向. 因此我们考虑在球面上  $\theta = \frac{\pi}{2}$  处压力以外的剪应力的值. 在球面上  $\theta = \frac{\pi}{2}$  处, 按斯笃克斯解的速度表达式, 得到剪应力  $\sigma_{r\theta}$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{3}{2} \mu_s \frac{U}{a} \sin\theta = -\frac{3}{2} \mu_s \frac{U}{a} \quad (2.1)$$

式中  $U$  为远处流速,  $\mu_e$  为待求的等效粘性系数, 式中负号表示剪应力和  $\theta$  的正方向相反. 另一方面, 从宾汉体的角度来看, 沿着流动方向的剪应力应该由两个部份组成, 一部份为极限剪应力  $\tau_B$ , 另一部份和刚度系数 (相应于通常的粘性系数) 有关, 因此有剪应力  $\sigma_{r\theta}$

$$\sigma_{r\theta} = -\tau_B - \frac{3}{2} \eta \frac{U}{a} \quad (2.1)'$$

因为这两个式子代表的是同一件物理事实, 所以两者应该互相同一起来, 我们就得到

$$\tau_B + \frac{3}{2} \eta \frac{U}{a} = \frac{3}{2} \mu_e \frac{U}{a}$$

于是就有

$$\mu_e = \eta + \frac{\tau_B}{\frac{3}{2} \frac{U}{a}} \quad (2.2)$$

把这个等效粘性系数代入斯笃克斯阻力公式, 就得到圆球在泥浆中作匀速直线运动时的阻力公式. 阻力  $R$

$$R = 6\pi \mu_e U a = 6\pi \left( \eta + \frac{\tau_B}{\frac{3}{2} \frac{U}{a}} \right) U a = 6\pi \eta U a + 4\pi a^2 \tau_B \quad (2.3)$$

很明显在  $\tau_B$  比  $\eta \frac{U}{a}$  不很多的时候, 这个公式就化为通常的斯笃克斯公式. 而斯笃克斯阻力公式则是大量的实验事实证明它是正确的. 所以我们现在的重点是检验  $\tau_B$  远大于  $\eta \frac{U}{a}$  时候, 公式 (2.3) 的正确性.

如果把砂粒看成圆球. 令圆球在重力和浮力及粘性力共同作用下, 达到平衡时的极限速度为  $U_s$ .  $U_s$  就可以通过阻力与重力和浮力的合力相等求得. 即

$$6\pi \eta U_s a + 4\pi a^2 \tau_B = \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho_s - \rho) g$$

式中  $\rho_s$  为砂子的密度,  $\rho$  为流体的密度. 解出  $U_s$ .

$$U_s = \frac{2}{9} \frac{a}{\eta} [(\rho_s - \rho) g a - 3\tau_B]$$

和通常一样, 我们用重度  $\gamma_s$  代替  $\rho_s g$ , 用重度  $\gamma_e$  代替  $\rho g$ , 用直径  $d$  代替  $2a$ , 上式就变成

$$U_s = \frac{1}{18} \frac{d}{\eta} [(\gamma_s - \gamma_e) d - 6\tau_B] \quad (2.4)$$

当沉降速度  $U_s$  变为零时, 我们就求得不沉粒径  $d_0$ .

$$d_0 = \frac{6\tau_B}{\gamma_s - \gamma_e} \quad (2.5)$$

把 (2.5) 式和陕西水科所及黄委会水科所等单位的实验结果<sup>[1][3]</sup> 进行比较 结果画在图中.

图中  $d_0$  和  $\frac{\tau_B}{\gamma_s - \gamma_e}$  的单位为厘米. 我们看到实验点子和理论公式的偏离是在实验误差范围之内. 这就证明了在  $\tau_B$  远大于  $\eta \frac{U}{a}$  的极端情形时候, 公式 (2.3) 也是正确的.

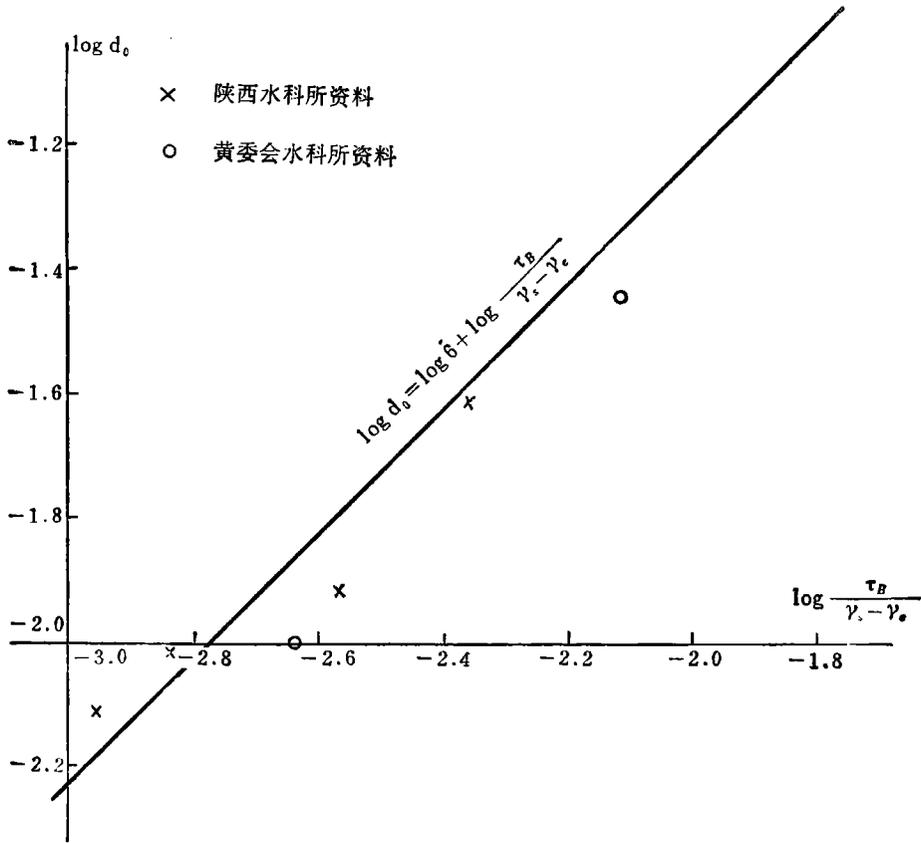


图 1

## 参 考 文 献

1. 陕西人民引洛管理局, 水电部十一工程局, 黄委会水利科学研究所, 高含沙水流的室内试验研究 (1978年9月).
2. 希辛柯 《泥浆水力学》. (中译本), 水利出版社.
3. 陕西省水利科学研究所, 高浓度组含沙静水沉降试验研究报告 (1977年11月).
4. Bingham, E.C., An investigation of the laws of plastic flow, *U S. Bur. of Standards Bull.* 13, (1916) 309.  
*Colloid Types, Fifth Coll. Symp Monograph* 1, (1928) 219.  
*Rheology Index J. Rheol.* 2 (1931) 10-107.

# The Mechanical Property of the Slurry and the Resistance Force of a Sphere Moving with Uniform Velocity in the Slurry

Tsai Shu-tang

*(Department of Modern Mechanics of University of Science and  
Technology of China, Hefei)*

### Abstract

The shear stress of the slurry flowing in the tube or two-dimensional channel is expressed by the shear stress of Bingham fluid, usually, ie

$$\tau = \tau_B + \eta \frac{dU}{dy} \quad \text{or} \quad \tau = \tau_B + \eta \left| \frac{dU}{dr} \right| \quad (1.1)$$

Where  $\tau_B$  is the yield stress of Bingham fluid and  $\eta$  is the coefficient of rigidity. The author disapproves this point of view. The author thinks that the mechanical property of the slurry may be more like that of highly viscous fluid than that of Bingham fluid. Basing on this idea, we adopt another method to treat the mechanical problem. We assume that, for the case of small Reynolds number, the velocity distribution of the slurry is very close to that of Stokes solution. Thus, we may apply the method of effective viscosity to calculate the resistance force of a sphere moving in the slurry with uniform velocity.

As it is commonly used, we take the center of the sphere as the origin of the moving coordinate system. Where  $a$  is the radius of the sphere. In this coordinate system, the flow pattern of the slurry becomes in a steady state. We choose the spherical polar coordinates, and the polar axis is along the fluid velocity far away from the sphere. Now, we shall find the effective viscosity coefficient. We calculate the value of shear stress at the equator ( $\theta = \frac{\pi}{2}$ ) on the sphere. According to the expression of the velocity of Stokes solution, we obtain shear stress  $\sigma_{r\theta}$

$$\sigma_{r\theta} = -\frac{3}{2} \mu_e \frac{U}{a} \quad (2.1)$$

where  $U$  is the velocity far away from the sphere,  $\mu_e$  is the effective viscosity coefficient to be found. On the other hand, from the point of view of Bingham fluid, we have shear stress  $\sigma_{r\theta}$

$$\sigma_{r\theta} = -\tau_B - \frac{3}{2} \eta \frac{U}{a} \quad (2.1)'$$

These two expressions describe the same physical phenomenon. Hence, they must be equal identically with each other.

Thus, we have

$$\mu_e = \eta + \frac{\tau_B}{\frac{3}{2} \frac{U}{a}} \quad (2.2)$$

Substituting this effective viscosity into Stokes formula of resistance, we obtain the formula of resistance force of a sphere moving in the slurry with uniform velocity. Resistance  $R$

$$R = 6\pi\eta Ua + 4\pi a^2 \tau_B \quad (2.3)$$

If we consider the sand particles as spheres, the limiting velocity  $U_e$  may be obtained from that the resistance force is equal to the resultant force of gravitational force and the force of buoyancy, i.e.

$$U_e = \frac{1}{18} \frac{d}{\eta} [(\gamma_s - \gamma_e)d - 6\tau_B] \quad (2.4)$$

When  $U_e$  is equal to zero, we get the diameter  $d_0$  of the sand particle which will not sink

$$d_0 = \frac{6\tau_B}{\gamma_s - \gamma_e} \quad (2.5)$$

Now, we Compare the equation (2.5) with the experimental data of Northwest Institute of Hydrotechnical Research and Institute of Hydraulic Research, Yellow River Conservancy Commission. The result is plotted in this figure, We see that the deviations of the experimental data to the theoretical line are within experimental error.